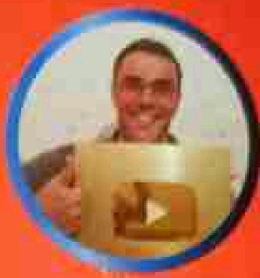
السّلسلة الفضّية

الإصدار الثالث
طبعة جديدة
ومنقحة مع إضافات



الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

كل ما تحتاجه في كتاب واحد

الدّوال
من الألف إلى الياء

الشّعب العلميّة والتّقنيّة والرّياضيات

موافقة لفيديوهات اليوتيوب YouTube

150 تمرين

- ملخص شامل حول الدّوال
- التّدريبات الشاملة للإنطلاقة الممتازة
- جميع دوال شعبة العلوم التجريبيّة 2008-2021
- جميع دوال شعبة التّقني الرّياضي 2008-2021
- جميع دوال شعبة الرّياضيات 2008-2021
- دوال مقترحة
- دوال أجنبيّة

التّحضير الجيّد لبكالوريا الجزائر

عكاشة BOOKSTORE

السّلســـلة الفضّيــة

مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع

أولاد فايت الجزائر العاصمة

الأستاذ نور الدين عيساوي

بالتعاون مع فريق عكاشة

الـــدوال

من الألـــف إلى اليــاء

موافقة لفيديوهات اليوتيوب

ملخص شامل حول الدوال

دوال تدريبية للانطلاقة الممتازة

جميع دوال شعبة العلوم التجريبية 2008-2021

جميع دوال شعبة التقني رياضي 2009-2021

جميع دوال شعبة الرياضيات 2008-2021

دوال مقترحة ودوال مقتبسة من مواضيع أجنبية

التحضير الجيد لبكالوريا الجزائر

عكاشة
BOOKSTORE
We can help you
يمكننا أن نساعدك

code: 22-17

بطاقة الكتاب

العنوان: الدوال من الألف إلى الياء - السلسلة الفضية-

السنة: الثالثة ثانوي - البكالوريا -

المؤلف: الأستاذ نور الدين عيساوي بالتعاون مع فريق عكاشة

الإصدار: الثالث 2021-2022

دار النشر: مكتبة عكاشة للنشر والتوزيع

العنوان: 03 شارع الملعب اولاد فايت الجزائر العاصمة - الجزائر

ردمك: 978-9931-856-16-0

الإيداع القانوني: أكتوبر 2021

الطبعة: أكتوبر 2021

السعر: **640** دج

كلمة فريق عكاشة

عندما كنا صغارا أحببنا المطر فكنا نلعب تحته ونستمتع به،

وعندما كبرنا أحببنا العلم فجمعنا شملنا لأجله، وعقدنا العزم على تسخير أنفسنا له.

الأستاذ نور الدين **عيساوي** الذي غرس الأمل والحماس في قلوب مئات الآلاف من التلاميذ والأساتذة في ثانويات وطننا العربي عامة وفي الجزائر خاصة، فصارت الرياضيات مادة ممتعة جدا وسهلة الوصول إليها، بواسطة فيديوهات مبسطة ورائعة جدا.

السلسلة الفضية هي سلسلة جامعة في مادتها، تساعد التلميذ على توحيد مصدره وجمع كل ما يحتاجه في كتاب واحد، تحوي ملخصا شاملا حول الدوال- **تم إصدار باقي الوحدات بفضل الله**-، تليها مجموعة من التمارين الشاملة من أجل التمرن الحسن الشامل، تأتي بعدها حلول جميع مواضيع البكالوريا لشعبة العلوم التجريبية وشعبة التقني الرياضي وشعبة الرياضيات، ثم مجموعة من التمارين المقترحة ودوال مقتبسة من مواضيع أجنبية. وعلاوة على كل هذا فللكتاب خاصية فريدة من نوعها وهي موافقته لفيديوهات اليوتيوب المتوفرة مجانا على قناة الاستاذ نور الدين فبواسطتها يمكنك التوسع في الشرح أو الزيادة في الفهم.

إلى كل من يقرأ هذا الكتاب، نسأل الله لك التوفيق والنجاح، ونعلمك أنه يمكنك المساهمة في تطوير النسخة القادمة بإرسال ملاحظاتك أو اقتراحاتك. ولا تنسوا الترحم على أم أستاذنا الغالي نورالدين عيساوي.

يمكنك الاشتراك في قناة الأستاذ نورالدين في اليوتيوب لكي يصلك كل جديد

مع تحيات الأستاذ نور الدين وفريق عكاشة

جدول محتويات السلسلة الفضية

جزء التدريبات الشاملة للإنطلاقة الممتازة 29

جزء دوال شعبة العلوم التجريبية 95

ملخص شامل حول الدوال

.01 مكتسبات قبلية

المتطابقات الشهيرة

a و b عددان حقيقيان

المتطابقة الشهيرة رقم 1	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
المتطابقة الشهيرة رقم 2	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
المتطابقة الشهيرة رقم 3	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

دراسة إشارة معادلة من الدرجة الأولى $ax + b = 0$

مبرهنة: a، b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

دراسة إشارة معادلة من الدرجة الثانية $ax^2 + bx + c = 0$

لدراسة إشارة المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ نتبع الخطوات التالية:

1- نحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال المميز Δ

2- نعين الجذور إن وجدت $(\Delta \geq 0)$ ثم نستنتج الإشارة

مبرهنة:

a، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$

لدراسة إشارة $ax^2 + bx + c$ نحل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بحساب المميز Δ ونميز ثلاث حالات وذلك حسب إشارة المميز Δ

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

● **الحالة الأولى $\Delta < 0$: ليس للمعادلة جذور ولدينا**

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	

● **الحالة الثانية $\Delta = 0$: للمعادلة جذر مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ولدينا**

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	نفس إشارة a	

● **الحالة الثالثة $\Delta > 0$: للمعادلة جذران متمايزان**

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بفرض $x_1 < x_2$ لدينا :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

.02. تعاريف أساسية

❖ دالة عددية لمتغير حقيقي

- تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$

نسمي f دالة عددية معرفة على D ، كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ نرمز له بالرمز $f(x)$

- اصطلاحا :

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f

- ليكن x عنصرا من D بحيث $y = f(x)$

← y يسمى **صورة** x بالدالة f

← العنصر x يسمى **سابقة** العنصر y

← الدالة f تسمى كذلك **دالة لمتغير حقيقي** x

❖ مجموعة تعريف دالة

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x

- مجموعة تعريف الدالة f :هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجودة أي قابلة للحساب ويرمز لها بالرمز D_f يعني

$x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$

❖ تساوي دالتين

- تعريف: القول عن دالتين f و g أنهما متساويان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D وأن من أجل كل عدد حقيقي x من D

لدينا : $f(x) = g(x)$ ونكتب: $f = g$

❖ العمليات الجبرية

العملية	التعريف	مجموعة التعريف
$f+k$	$(f+k)(x) = f(x)+k$	D_f
$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$	D_f
$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g$ $g(x) \neq 0$

.03. تمرين تدريبي

اليوتيوب: عموميات حول الدوال للسنة الأولى ثانوي رقم 02

(C_f) و (C_g) تمثيلان بيانيان للدالتين f و g معرفتين على مجال D كما في الشكل المقابل.

بقراءة بيانية عين:

1) D مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g .

2) عين $f(-2)$ ، $g(-2)$، $f(0)$، $g(0)$، $f(3)$، $g(3)$.

3) عين سوابق العدد 2 بالدالة f.

4) عين سوابق العدد 4 بالدالة g.

5) شكل جدول تغيرات الدالة f.

6) شكل جدول تغيرات الدالة g.

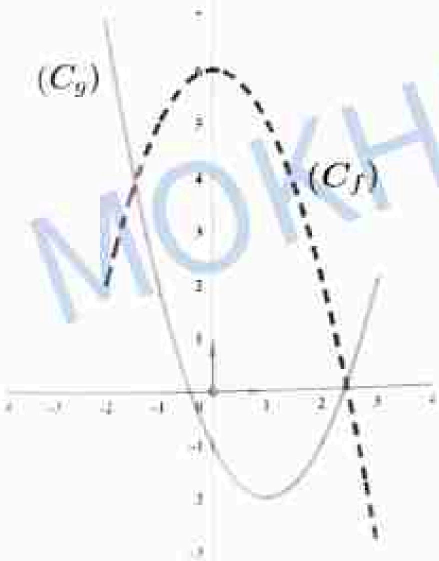
7) عين حلول المعادلتين:

أ) $f(x) = 0$ ب) $f(x) = g(x)$.

8) عين حلول المتراجحة $f(x) \leq g(x)$.

9) عين القيمة الحدية العظمى للدالة f .

10) عين القيمة الحدية الصغرى للدالة g .



الحل

1) تعيين D مجموعة تعريف الدالتين f و g.

$D_f = [-2;3]$ $D_g = [-2;3]$

2) تعيين $f(-2)$ ، $g(-2)$، $f(0)$، $g(0)$، $f(3)$، $g(3)$:

$f(-2) = 2$ ، $g(-2) = 7$

$f(0) = 6$ ، $g(0) = -1$

$f(3) = -3$ $g(3) = 2$

3) تعيين سوابق العدد 2 بالدالة f:

نقوم برسم خط أفقي يمر بالترتيبة 2 أي $y = 2$

إذن سوابق 2 بالدالة f هي $x = -2$ و $x = 2$

4) سوابق العدد 4 بالدالة g :

نرسم مستقيم افقي معادلته $y = 4$

$x = -1.5$

5) جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		0		3
$f(x)$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	-3

6) جدول تغيرات الدالة g :

x	-2		1		3
$g(x)$	7	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

7) تعيين حلول المعادلتين:

أ) $f(x) = 0$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

$$x = 2.5$$
$$S = \{2.5\}$$

ب) $f(x) = g(x)$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع (C_g)

$$S' = \{-1.5; 2.5\}$$

8) تعيين حلول المتراجحة $f(x) \le g(x)$:

حلول هذه المتراجحة هي فواصل نقط (C_g) التي تقع فوق (C_f)

$$S'' = [-2; -1.5] \cup [2.5; 3]$$

إضافة:

$$f(x) \ge g(x)$$

(C_f) فوق (C_g)

$$S = [-1.5; 2.5]$$

9) تعيين القيمة الحدية العظمى للدالة f:

القيمة الحدية للدالة f (العظمى) هي 6 عند الفاصلة $x = 0$.

10) تعيين القيمة الحدية الصغرى للدالة g:

القيمة الحدية للدالة g (الصغرى) هي -2 عند الفاصلة $x = 1$.

04. إيجاد ثوابت في الدوال العددية

اليوتيوب: إيجاد ثوابت في الدوال العددية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$$

1) عين a، b، c و d حيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

الحل :

1- تعيين الاعداد a، b، c و d

لدينا : $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

أي :

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 6x + 3 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline -x^3 - 2x^2 - x & x + 1 \\ \hline x^2 + 5x + 3 & \\ -x^2 - 2x - 1 & \\ \hline 3x + 2 & \end{array}$$

إذن:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 3 = (x^2 + 2x + 1)(x + 1) + 3x + 2$$

و عليه:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2} = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x + 1) + 3x + 2}{(x^2 + 2x + 1)}$$

$$f(x) = \frac{(x^2 + 2x + 1)(x + 1)}{(x^2 + 2x + 1)} + \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 1)}$$

أي: $f(x) = x + 1 + \frac{3x+2}{(x+1)^2}$ و

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة نجد :

$a = 1$ ، $b = 1$ ، $c = 3$ ، $d = 2$

05. النهـــايــات وتفسيرها الهندسي

في كل ما يأتي $a, b, c, d, l, k \in \mathbb{R}$ و $n, m \in \mathbb{N}$

❖ نهايات الدوال المرجعية

$\lim_{x \to \pm\infty} \lvert x \rvert = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
$\lim_{x \to -\infty} ax + b = -\infty$ a عدد موجب تماما		$\lim_{x \to +\infty} ax + b = +\infty$ a عدد موجب تماما	$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$

❖ نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية الحد الأعلى درجة

مثال:

$$\lim_{x \to \mp\infty} ax^3 + bx^2 + cx + d = \lim_{x \to \mp\infty} ax^3 \qquad (a \neq 0 \text{ حيث})$$

❖ نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ و$-\infty$ هي نهاية (الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام)

مثال:

$$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{ax^2+1}{bx+2} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{ax^2}{bx} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{ax}{b} \qquad (a \neq 0 \text{ حيث} \text{ و } b \neq 0)$$

❖ حالات عدم التعيين

$+\infty - \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0 \times \infty$

❖ طرق إزالة حالات عدم التعيين

أ- التحليل والاختزال:

مثال:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{0}{3} = 0$$

غالبا ما نستعمل هاته الطريقة عند حساب $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x_0) = g(x_0) = 0$

ب- استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}$$

جـ-استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لابد أن تكون النهاية من الشكل $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ حيث تكون هذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال لتكن $f(x) = \sin x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$$

حيث:

$$f(0) = 0 \text{ و } f'(x) = \cos x \text{ و } f'(0) = 1$$

❖ نهاية دالة مركبة

$f = v \circ u$ يكافئ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} u(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} v(x) = c \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

مثال: $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+2}{x^2+1}} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+2}{x^2+1} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+2}{x^2+1}} = \sqrt{2}$

❖ النهايات بالمقارنة (الحصر و الترتيب)

أ- الحالة الأولى (الحصر):

$\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$

$\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

ب- الحالة الثانية (الترتيب):

$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

مثال:-احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 + \cos x)$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$-2x^2 - 1 \le -2x^2 + \cos x \le -2x^2 + 1$$
$$\begin{cases} -2x^2 + \cos x \le -2x^2 + 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2 + 1 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^2 + \cos x) = -\infty$$

❖ المستقيمات المقاربة (التفسير الهندسي للنهايات)

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ المستقيم ذو المعادلة $x = a$ مستقيم مقارب عمودي لـ(C_f) (موازي لمحور التراتيب)

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ المستقيم ذو المعادلة $y = b$ مستقيم مقارب أفقي لـ(C_f) (موازي لمحور الفواصل)

3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_f)

06. الاستمرارية و مبرهنة القيم المتوسطة

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا كان: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$

و تكون الدالة f مستمرة على المجال $I = [a; b]$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة من قيم هذا المجال.

❖ **مبرهنة القيم المتوسطة:**

أ- لبيان أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a; b[$:

1- نبين أنّ الدالة f مستمرة ورتيبة تماما (متزايدة أو متناقصة) على المجال $[a; b]$

2- نبين أنّ $f(a) < k < f(b)$

حالة خاصة: إذا كانت المعادلة $f(x) = 0$ على المجال $[a; b]$ **يكفي** أن نبين أنها مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a; b]$ وأن $f(a) \times f(b) < 0$. (أو $\lim\limits_{x \to \infty} f(a) \times \lim\limits_{x \to \infty} f(b) < 0$)

ملاحظة: لبيان أنّ المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a; b[$ يكفي أن نبين أنّها مستمرة على المجال $[a; b]$ و أن $f(a) < k < f(b)$

07. الاشتقاقية وتفسيراتها الهندسية

(حيث الدالة f و g معرفتان على D_f و D_g على الترتيب وتقبلان الاشتقاق عند x_0)

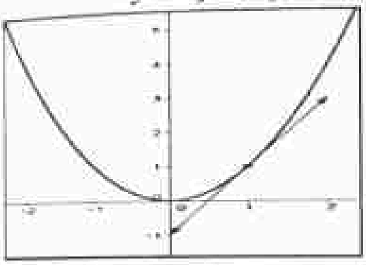
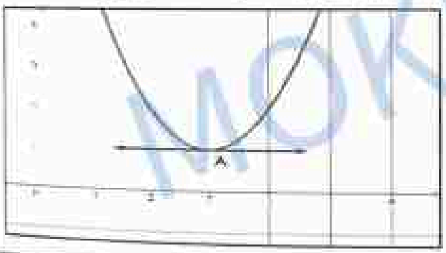
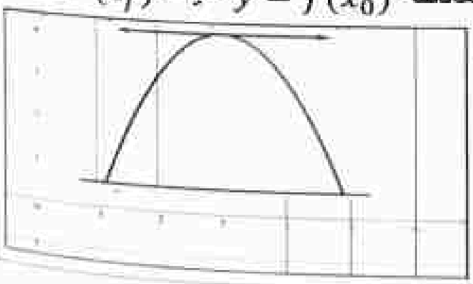
تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وفقط إذا كان:

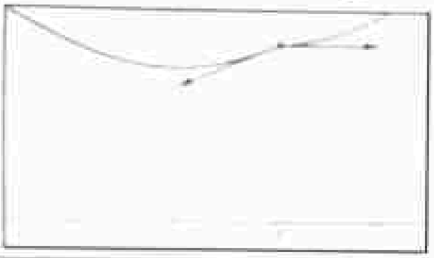
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \ (l \neq \infty)$$

مثال لدينا $f(x) = \sqrt{x-1}$ معرفة على المجال D_f:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

حيث: $f(2) = 1 \ ; \ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \ ; \ f'(2) = \frac{1}{2}$

النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0) = a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا معادلته $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ 
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0^+$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0) = 0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا معادلته $y = f(x_0)$ حيث (C_f) فوق المماس 
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0^-$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0) = 0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ مماسا معادلته $y = f(x_0)$ حيث (C_f) تحت المماس 

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'(x_0) = a$	(C_f) يقبل نصف مماس على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ 
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = b$	fتقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'(x_0) = b$	(C_f) يقبل نصف مماس على يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لاتقبل الاشتقاق عند x_0	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية 
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$	f لا تقبل الاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$	f لا تقبل الاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0; f(x_0))$ نصف مماس عمودي

❖ **مشتقات الدوال المألوفة:**

$f(x)$	$f'(x)$	مجال الاشتقاق
a	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \ , n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$f'(x)$	مجال الاشتقاق
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

❖ **العمليات على الدوال المشتقة** مشتقة مركب دالتين **(انتبه ! يجب أن تتحقق شروط التعريف)**

$f(x)$	$f(x)'$
$k.u$	$k.u'$
$u+v$	$u'+v'$
$u.v$	$u'.v+u.v'$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
$u[v(x)]$	$v'(x) \times u'[v(x)]$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u^n \quad , n \in \mathbb{N}$	$nu'.u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n} \quad , n \in \mathbb{N}$	$-\frac{nu'}{u^{n+1}}$

08. تطبيقات الاشتقاقية

1-اتجاه تغير الدالة

نعين الدالة المشتقة $f'(x)$ من أجل كل x من D_f ثم ندرس اشارتها

- إذا كان $f'(x) > 0$ من أجل كل x من D_f فإن الدالة متزايدة تماما.
- إذا كان $f'(x) < 0$ من أجل كل x من D_f فإن الدالة متناقصة تماما.
- إذا كان $f'(x) = 0$ من أجل كل x من D_f فإن الدالة ثابتة.

2-القيمة الحدية الصغرى والعظمى:

إذا انعدمت $f'(x)$ عند القيمة x_0 ثم غيرت اشارتها فان القيم الحدية لـ $f(x)$ كالاتي:

x		x_0	
$f'(x)$	+		-
	لـ f قيمة حدية عظمى عند القيمة x_0		

x		x_0	
$f'(x)$	-		+
	لـ f قيمة حدية صغرى عند القيمة x_0		

3-نقطة الانعطاف:

ط1- $f'(x)$ تنعدم عند القيمة x_0 ولا تغير إشارتها.

ط2- $f''(x)$ تنعدم عند القيمة x_0 وتغير إشارتها.

ط3- المماس (T) يخترق (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 (وتتغير وضعيته النسبية بالنسبة لـ (C_f))

09. تطبيقات تدريبية حول المشتقات

اليوتيوب: مشتقات الدوال العددية للسنة الثانية ثانوي رقم 01

I) باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto 3x^2 - 4x + 1$
2) $f: x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x + 5$
3) $f: x \mapsto \frac{3x^2+12x+1}{6}$
4) $f: x \mapsto \sqrt{3}x^4 - \sqrt{2}x^3 - \sqrt{6}x^2 + 3x - 5$

II) باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto -\frac{2}{x}$
2) $f: x \mapsto \frac{-x+1}{x+2}$
3) $f: x \mapsto 2x + 1 - \frac{x+1}{x-3}$
4) $f: x \mapsto \frac{2x^2+3x-1}{x^2-3}$

III) باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto (3x-2)^2$
2) $f: x \mapsto 3\sqrt{x} - 2$
3) $f: x \mapsto \sqrt{x-3}$
4) $f: x \mapsto \sqrt{2-3x}$
5) $f: x \mapsto (2x-3)(\sqrt{x})$
6) $f: x \mapsto (x^2+2x-3)\sqrt{-x+3}$

IV) باستعمال النظريات على المشتقات احسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f: x \mapsto \cos(3x-2)$
2) $f: x \mapsto \sin(3x-2)$
3) $f: x \mapsto \sin(x) \times \cos(x)$
4) $f: x \mapsto \sin(x-2\pi) \times \cos(x+\pi)$
5) $f: x \mapsto \cos^2(3x)$

الحل

I) إيجاد الدوال المشتقة

(1

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f'(x) = 3(2x) - 4$$

$$f'(x) = 6x - 4$$

(2

$$f'(x) = \frac{2x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x - \frac{1}{2}$$

(3

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$f'(x)=\frac{1}{6}(6x+12)$$
$$f'(x)=x+2$$

4)
$$f(x)=\sqrt{3}x^4-\sqrt{2}x^3-\sqrt{6}x^2+3x-5$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها كثير حدود ودالتها المشتقة
$$f'(x)=4\sqrt{3}x^3-3\sqrt{2}x^2-2\sqrt{6}x+3$$

II) إيجاد الدوال المشتقة

1)
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$$
$$f(x)=-\frac{2}{x}$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{2}{x^2}$$

2)
$$f(x)=\frac{-x+1}{x+2}$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}-\{-2\}$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{-1(x+2)-1(-x+1)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{x-2-x-1}{(x+2)^2}=-\frac{3}{(x+2)^2}$$

3)
$$f(x)=2x+1-\frac{x+1}{x-3}$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}-\{3\}$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=2+0-\frac{1(x-3)-1(x+1)}{(x-3)^2}$$
$$f'(x)=2-\frac{x-3-x-1}{(x-3)^2}$$
$$f'(x)=2+\frac{4}{(x-3)^2}$$

4)
$$f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x^2-3}$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $\mathbb{R}-\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{(4x+3)(x^2-3)-2x(2x^2+3x-1)}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{4x^3-12x+3x^2-9-4x^3-6x^2+2x}{(x^2-3)^2}$$
$$=\frac{-3x^2-10x-9}{(x^2-3)^2}$$

III)- إيجاد الدوال المشتقة

1)
$$f(x)=(3x-2)^2=9x^2-12x+4$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=18x-12$$

2)
$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$
$$f(x)=3\sqrt{x}-2$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}$$

3)
$$f(x)=\sqrt{x-3}$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]3;+\infty[$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

4)
$$f(x)=\sqrt{2-3x}$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$ ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

5)
$$(u\times v)'=u'\times v+v'\times u$$
$$f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$$
الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x-3)$$
$$= \frac{4x + 2x - 3}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = \frac{6x-3}{2\sqrt{x}}$$

(6

$$f(x) = (x^2 + 2x - 3)\sqrt{-x+3}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;3[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (2x+2)\sqrt{-x+3} + \frac{-(x^2+2x-3)}{2\sqrt{-x+3}}$$

IV) إيجاد الدوال المشتقة

(1

$$[(v\ o\ u)(x)]' = u'(x) \times v'[u(x)]$$
$$[\cos(x)]' = -\sin(x)$$
$$[\sin(x)]' = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(3x-2)$$
$$f'(x) = -3\sin(3x-2)$$

(2

$$f(x) = \sin(3x-2)$$
$$f'(x) = 3\cos(3x-2)$$

(3

$$f(x) = \sin(x) \times \cos(x)$$
$$f'(x) = \cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos^2(x) - sin^2(x)$$

(4

$$f : x \mapsto \sin(x - 2\pi) \times \cos(x + \pi)$$
$$f'(x) = \cos(x - 2\pi) \times \cos(x + \pi)$$
$$+(-\sin(x+\pi) \times \sin(x - 2\pi)$$

(5

$$[[f(x)]^n]' = nf'(x) \times f^{n-1}(x)$$
$$f(x) = \cos^2(3x)$$
$$f'(x) = 2[-3\sin(3x)][\cos(3x)]$$
$$= -6\sin(3x) \times \cos(3x)$$

10. الاشتقاقية والتقريب التآلفي

نعتبر الدالة التآلفية f حيث:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

معرفة على المجال $D_f = [-1; +\infty[$

1- ادرس قابلية الاشتقاق عند 0 للدالة f ثم اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة $x_0 = 0$

2- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x$$

أكمل الجدول التالي:

x	-0.003	-0.002
$f(x)$		
$g(x)$		

x	-0.001	0.001	0.002
$f(x)$			
$g(x)$			

ماذا تستنتج ؟

استنتج القيمة المقربة لكل من $\sqrt{1.00007}$ ، $\sqrt{0.999917}$.

اليوتيوب: الاشتقاقية والتقريب التآلفي للسنة الثانية ثانوي رقم 1

الحل

1- دراسة قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x_0 = 0$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h+x_0) - f(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{f(h) - f(0)}{h}$$
$$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$
$$\lim_{h\to0}\frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to0}\frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}$$
$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$
$$= \frac{1}{2} = f'(0)$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 0 و $f'(0) = \frac{1}{2}$

معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $A(0,1)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

2- إكمال الجدول:

x	-0.003	-0.002
$f(x)$	0.9984988	0.998999
$g(x)$	0.9985	0.999

x	-0.001	0.001	0.002
$f(x)$	0.99949	1.00049	1.00099
$g(x)$	0.9995	1.0005	1.001

الاستنتاج:نلاحظ أنه إذا كان x قريب من العدد 0

فإن: $f(x) \approx g(x)$

ومنه: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

نقول أحسن تقريب تآلفي للدالة f عند 0 هي الدالة g ونكتب $g(x) = 1 + \frac{1}{2}x$

- استنتاج القيمة المقربة لكل من $\sqrt{1.00007}$ ، $\sqrt{0.999917}$:

لدينا: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

-استنتاج القيمة المقربة لـ $\sqrt{1.00007}$:

$$x = 0.00007$$
$$\sqrt{1.00007} = \sqrt{1 + 0.00007}$$
$$\approx 1 + \frac{1}{2}(0.00007)$$
$$\approx 1.000035$$

- استنتاج القيمة المقربة لـ $\sqrt{0.999917}$:

$$1 + x = 0.999917$$
$$x = 0.999917 - 1 = -0.000083$$
$$\sqrt{0.999917} = \sqrt{1 + (-0.000083)}$$
$$\approx 1 + \frac{1}{2}(-0.000083) \approx 0.9999585$$

.11 الشفعية والتناظر

الدالة f معرفة على المجال D_f حيث D_f متناظر بالنسبة للصفر.

السؤال	طريقة الإجابة عنه
بين أن النقطة $\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)	يكفي أن نبيّن أن : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$
بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر لـ(C_f)	يكفي أن نبيّن أن: $f(2\alpha - x) = f(x)$
بين أن الدالة f فردية ((C_f) يقبل مبدأ المعلم كمركز تناظر)	من قانون مركز التناظر $f(-x) + f(x) = 0$
بين أن الدالة f زوجية ((C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر)	من قانون محور التناظر $f(-x) - f(x) = 0$

.12 إيجاد عبارة دالة عددية انطلاقا من جدول تغيراتها

اليوتيوب: إيجاد عبارة دالة عددية انطلاقا من جدول تغيراتها

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بالعبارة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ حيث a و b و c ثوابت حقيقية ومعرفة بجدول تغيراتها المبين أدناه.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

المطلوب:انطلاقا من جدول تغيرات الدالة f :

- أوجد الثوابت a و b و c

لحل

إيجاد الثوابت a ، b و c :

$$\begin{cases} f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases} , \begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$$

$$f(-2)=a(-2)+b+\frac{c}{(-2)+1}$$

$$-2a+b-c=-2 \quad ......(1)$$

$$f(0)=2(0)+b+\frac{c}{0+1}=2$$

$$b+c=2 \quad ......(2)$$

ولدينا $f'(x)=a-\frac{c}{(x+1)^2}$

$$f'(-2)=a-\frac{c}{(-2+1)^2}=0$$

$$a=c \quad ......(3)$$

نعوض (3) في (1) نجد: $-2c+b-c=-2$

$$-3c+b=-2$$

بضرب (2) في -1 نجد:

$$-b-c=-2$$

$$\begin{cases} -3c+b=-2 \\ -b-c=-2 \end{cases}$$

بالجمع نجد $-4c=-4$

$$c=1$$

بما أن $a=c$ أي $a=1$

$$b+1=2$$

$$b=1$$

ومنه عبارة الدالة f هي: $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$

13. إيجاد عبارة دالة انطلاقا من منحناها البياني

اليوتيوب: إيجاد عبارة دالة انطلاقا من منحناها البياني للثانية والثالثة ثانوي

المنحنى (C_f) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=ax^3+bx+c$$

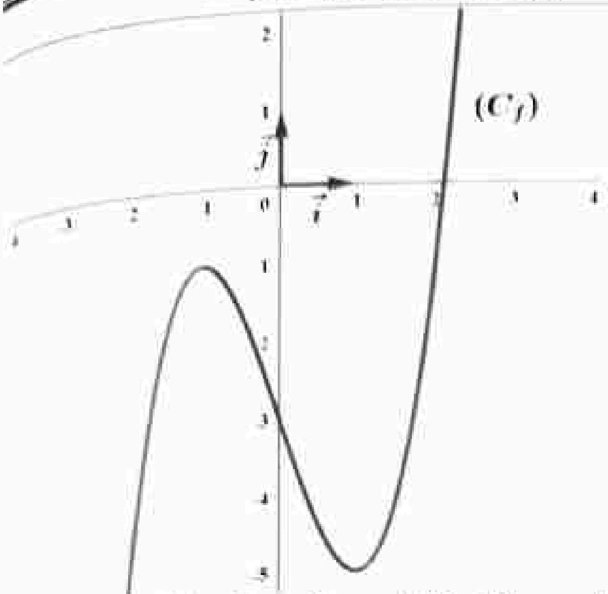
باستعمال المنحنى (C_f):

أ- عين الأعداد a و b و c.

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

الحل:

أ- تعيين الأعداد a ، b ، c :



$$\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} f(-1)=-1 \\ f(1)=-5 \end{cases}$$

$$f(x)=ax^3+bx+c$$

لدينا:

$$f(-1)=a(-1)^3+b(-1)+c$$

$$-a-b+c=-1 \quad ......(1)$$

$$f(1)=a(1)^3+b(1)+c$$

$$a+b+c=-5 \quad ......(2)$$

ولدينا:

$$f'(x)=3ax^2+b$$

$$f'(1)=3a(1)^2+b=0$$

$$3a+b=0 \quad .....(3)$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$2c=-6$ $\quad c=-\frac{6}{2}$ $\quad c=-3$

من (3) لدينا: $b=-3a \quad ......(4)$

وبالتعويض في (2) نجد $a-3a-3=-5$

$-2a=-2$ $\quad a=1$

بتعويض قيمة a في (4) نجد : $b=-3(1)$

$$b=-3$$

ومنه عبارة الدالة f :

$$f(x)=x^3-3x-3$$

ب- تشكيل جدول التغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

14. استنتاج تمثيل بياني لدالة انطلاقا من تمثيل بياني لدالة أخرى

غالبا ما يأتي هذا السؤال في نهاية التمرين حيث نكون قد قمنا بتمثيل (C_f) ويطلب منا تمثيل البياني لـ(C_h) انطلاقا منه

عبارة $h(x)$ بدلالة $f(x)$	استنتاج التمثيل البياني لـ (C_h) انطلاقا من (C_f)
$h(x) = f(x) + k$	(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;k)$
$h(x) = f(x+b)$	(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-b;0)$
$h(x) = f(x+b) + k$	(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-b;k)$
$h(x) = -f(x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل
$h(x) = f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب
$h(x) = -f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$h(x) = f(\|x\|)$	لما $x \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \leq 0$ (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب
$h(x) = f(-\|x\|)$	لما $x \leq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$ (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب
$h(x) = \|f(x)\|$	لما $f(x) \geq 0$ (C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \leq 0$ (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

15. نقاط تقاطع مع المحاور

- **محور الفواصل** : المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل أي $y = 0$ لايجاد x نحل المعادلة $f(x) = 0$
- **محور التراتيب** : المنحنى (C_f) يقطع محور التراتيب أي $x = 0$ لايجاد y نحسب $f(0)$

16. وضعية منحنى بالنسبة لمستقيم

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ندرس الفرق بين $f(x) - y$

- إذا كان $f(x) - y > 0$ فإن المنحنى (C_f) **فوق** المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x) - y < 0$ فإن المنحنى (C_f) **تحت** المستقيم (Δ)
- إذا كان $f(x) - y = 0$ فإن المنحنى (C_f) **يقطع** المستقيم (Δ) وبحل المعادلة $f(x) - y = 0$ نتحصل على فواصل نقاط تقاطع المنحى (C_f) مع المستقيم (Δ)

حالة خاصة مهمة جدا: اذا كان الفرق ينعدم و لا يغير اشارته عند قيمة x_1 فإن المستقيم مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_1 ولا يقطعه فيها.

17. وضعية منحنى بالنسبة لمنحنى

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لمنحنى (C_g) ندرس الفرق بين $f(x) - g(x)$

- إذا كان $f(x) - g(x) > 0$ فإن المنحنى (C_f) **فوق** المنحنى (C_g)
- إذا كان $f(x) - g(x) < 0$ فإن المنحنى (C_f) **تحت** المنحنى (C_g)
- إذا كان $f(x) - g(x) = 0$ فإن المنحنى (C_f) **يقطع** المنحنى (C_g) وبحل المعادلة $f(x) - g(x) = 0$ نتحصل على فواصل نقاط تقاطع المنحى (C_f) مع المنحنى (C_g)

حالة خاصة مهمة جدا : اذا كان الفرق ينعدم و لا يغير اشارته عند قيمة x_1 فإن المنحنى (C_f) يمس المنحنى (C_g) في النقطة ذات الفاصلة x_1 ولا يقطعه فيها.

18. معادلة المماس والحالات الممكنة

اليوتيوب: معادلة المماس والحالات الست للأسئلة

هناك ست صيغ – تقريبا- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى **معرفة فاصلة نقطة التماس x_0 هي المفتاح للإجابة** على أي منها كما سنرى.

1- الصيغة الأولى (العادية): اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0.

الإجابة: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المعطاة.

2- الصيغة الثانية: اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيبية y_0.

الإجابة: نحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى

3- الصيغة الثالثة: بين أنه يوجد مماس-أو أكثر- للمنحنى (C_f) ميله أو معامل توجيهه يساوي a

الإجابة: نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا كذلك إلى الحالة الأولى.

ملاحظة: عدد الحلول يدل على عدد المماسات.

4- الصيغة الرابعة: بين أنه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$.

الإجابة: نحل المعادلة $f'(x_0) = a$ (عدنا إلى الحالة الثالثة).

5- الصيغة الخامسة: بين أنه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$.

الإجابة: نحل المعادلة $af'(x_0) = -1$. عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى.

6- الصيغة السادسة: بين أنه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ذات الإحداثيتين $(\alpha;\beta)$.

الإجابة: نحل $\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0)$ عند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عدنا إلى الحالة الأولى.

19. تطبيق حول المماس المشترك لمنحنيين

اليوتيوب: المماس المشترك لمنحنيين

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 + \cos x$ و $f(x) = x^3 + 2$

- بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

الحل

بيان أن المنحنيين (C_f) و (C_g) يقبلان نفس المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

حتى يكون للمنحنيين (C_f) و (C_g) نفس المماس عند $x_0 = 0$ يجب أن يكون

$$(\Delta): \begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) \end{cases}$$

$$(\Delta): \begin{cases} y = f'(0)(x) + f(0) \\ y = g'(0)(x) + g(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(0) = g'(0) \\ f(0) = g(0) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0) = 2 \\ g(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ g'(x) = -\sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 3(0) = 0 \\ g'(0) = -\sin(0) = 0 \end{cases}$$

إذن: $f'(0) = g'(0)$

ومنه (Δ) مماس مشترك بين (C_f) و (C_g) معادلته:

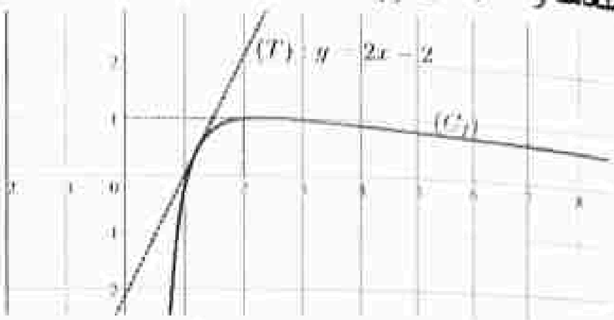
$$y = 0(x) + 2$$

$$(\Delta): y = 2$$

20. المناقشة البيانية بالتفصيل

اليوتيوب: المناقشة البيانية بالتفصيل

f دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$



(T) مماس عند النقطة $A(1;0)$ معادلته $y=2x-2$

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة في كل حالة مما يلي:

I)- المناقشة الأفقية

1. $f(x)=m$ — 2. $f(x)=-m$
3. $f(x)=|m|$ — 4. $f(x)=|m-1|$
5. $f(x)=m^2$ — 6. $f(x)=\sqrt{m}$ $(m\in\mathbb{R}^+)$
7. $f(x)=f(m)$

II)- المناقشة المائلة

1. $f(x)=2x+m$
2. $f(x)=2x-m$

III)- المناقشة الدورانية

(T_m) مستقيم ذو المعادلة $y=mx-m$

برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثياتها ثم ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة

1. $f(x)=mx-m$
2. $f(x)=|m|(x-1)$
3. $f(x)=m^2(x-1)$

الحل

I)- المناقشة الأفقية تكون من الشكل $f(x)=b$

.1 $\boxed{f(x)=m}$

الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y=m$

1) $m\le 0$ للمعادلة حل وحيد
2) $0<m<1$ للمعادلة حلان متمايزان
3) $m=1$ للمعادلة حل مضاعف $x=2$
4) $m>1$ لايوجد حلول للمعادلة

.2 $\boxed{f(x)=-m}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y=-m$

1) $-m\le 0$ ومنه $m\ge 0$ للمعادلة حل وحيد
2) $0<-m<1$ ومنه $0>m>-1$ للمعادلة حلان
3) $-m=1$ ومنه $m=-1$ للمعادلة حل مضاعف
4) $-m>1$ ومنه $m<-1$ لايوجد حلول للمعادلة

.3 $\boxed{f(x)=|m|}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y=|m|$ حيث $|m|\ge 0$

1) $|m|=0$ أي $m=0$ للمعادلة حل وحيد
2) $0<|m|<1$ أي $m\in]-1;0[\cup]0;1[$ للمعادلة حلان
3) $|m|=1$ أي $m=1$ أو $m=-1$ للمعادلة حل مضاعف
4) $|m|>1$ أي $m\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

.4 $\boxed{f(x)=|m-1|}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y=|m-1|$ حيث $|m-1|\ge 0$

1) $|m-1|=0$ أي $m=1$ للمعادلة حل وحيد
2) $0<|m-1|<1$ أي $(m-1)\in]-1;0[\cup]0;1[$ ومنه $m\in]0;1[\cup]1;2[$ للمعادلة حلان
3) $|m-1|=1$ أي $m=2$ أو $m=0$ للمعادلة حل مضاعف
4) $|m-1|>1$ أي $(m-1)\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه $m\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

.5 $\boxed{f(x)=m^2}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y=m^2$ حيث $m^2\ge 0$

1) $m^2=0$ أي $m=0$ للمعادلة حل وحيد
2) $0<m^2<1$ أي $m\in]-1;0[\cup]0;1[$ للمعادلة حلان

3) $m^2 = 1$ أي $m = -1$ أو $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف $x = 2$

4) $m^2 > 1$ أي $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

6. $\boxed{f(x) = \sqrt{m}}$ $(m \in \mathbb{R}^+)$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = \sqrt{m}$ حيث $m \geq 0$

1) $\sqrt{m} = 0$ أي $m = 0$ للمعادلة حل وحيد

2) $0 < \sqrt{m} < 1$ أي $0 < m < 1$ للمعادلة حلان

3) $\sqrt{m} = 1$ أي $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف $x = 2$

4) $\sqrt{m} > 1$ أي $m > 1$ لا يوجد حلول للمعادلة

7. $\boxed{f(x) = f(m)}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = f(m)$

لدينا النقطة مجموعة النقط من (C_f) حيث $M_m(m, f(m))$

1) $f(m) \leq 0$ أي $m \in]0; 1]$ للمعادلة حل وحيد

2) $0 < f(m) < 1$ أي $m \in]1; 2[U]2; +\infty[$ للمعادلة حلان

3) $f(m) = 1$ أي $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف $x = 2$

4) $f(m) > 1$ أو $m \leq 0$ لا يوجد حلول للمعادلة

II)- المناقشة المائلة

1. $\boxed{f(x) = 2x + m}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $y = 2x + m$

نلاحظ أن (T) يوازي (T_m) لأن لهما نفس معامل التوجيه 2 ومنه فإن المناقشة ستكون بالموازاة مع المستقيم (T)

1) $m < -2$ للمعادلة حلان متمايزان

2) $m = -2$ للمعادلة حل مضاعف

3) $m > -2$ لايوجد حلول للمعادلة

2. $\boxed{f(x) = 2x - m}$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $y = 2x - m$

1) $-m < -2$ أي $m > 2$ للمعادلة حلان متمايزان

2) $-m = -2$ أي $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف

3) $-m > -2$ $m < 2$ لا يوجد حلول للمعادلة

III)- المناقشة الدورانية

البرهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة $A(x_0, y_0)$

$A \in (T_m)$ معناه

$$y_0 = mx_0 - m$$
$$y_0 = m(x_0 - 1)$$
$$m(x_0 - 1) - y_0 = 0$$

المتغير في هذه المعادلة هو m

ينعدم كثير الحدود إذا انعدمت معاملات حدوده أي:

$$\begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -y_0 = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

ومنه جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة $A(1,0)$

1. $\boxed{f(x) = mx - m}$

الحلول البيانية للمعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $y = m(x - 1)$

1) $m \leq 0$ للمعادلة حل وحيد

2) $0 < m < 2$ للمعادلة حلان متمايزان

3) $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف

4) $m > 2$ للمعادلة حلان متمايزان

2. $\boxed{f(x) = |m|(x - 1)}$

الحلول البيانية للمعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $y = |m|(x - 1)$

$|m| > 0$

1) $|m| = 0$ للمعادلة حل وحيد

2) $0 < |m| < 2$ أي $m \in]-2; 0[U]0; 2[$ للمعادلة حلان متمايزان

3) $|m| = 2$ أي $m = 2$ أو $m = -2$ للمعادلة حل مضاعف

4) $|m| > 2$ أي $m \in]-\infty; -2[U]2; +\infty[$ للمعادلة حلان متمايزان

3. $\boxed{f(x) = m^2(x - 1)}$

الحلول البيانية للمعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $y = m^2(x - 1)$

1) $m^2 = 0$ أي $m = 0$ للمعادلة حل وحيد

2) $0 < m^2 < 2$ أي $0 < |m| < \sqrt{2}$ أي $m \in]-\sqrt{2}, 0[\cup]0; \sqrt{2}[$ للمعادلة حلان متمايزان

3) $m^2 = 2$ أي $m = \sqrt{2}$ أو $m = -\sqrt{2}$ للمعادلة حل مضاعف

4) $m^2 > 2$ أي $|m| > \sqrt{2}$ أو ومنه $m \in]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$ للمعادلة حلان متمايزان

21. تركيب الدوال بالتفصيل

1) g دالّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بجدول تغيّراتها. α عدد حقيقي $1 < \alpha < 2$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

شكّل جدول إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

2) لتكن الدالّة f ودالّتها المشتقّة f' المعرفتان كما يلي في كلّ حالة:

أ- $f'(x) = g(x),\ D_f = \mathbb{R}$

ب- $f'(x) = g(-x),\ D_f = \mathbb{R}$

ج- $f'(x) = g(x^2),\ D_f = \mathbb{R}$

د- $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right),\ D_f = \mathbb{R}^*$

هـ- $f'(x) = g(\sqrt{x}),\ D_f = \mathbb{R}_+$

و- $f'(x) = g(\ln x),\ D_f = \mathbb{R}_+^*$

ي- $f'(x) = g(e^x),\ D_f = \mathbb{R}$

أدرس اتجاه تغيّر الدالّة f في كلّ حالة.

3) لتكن الدالّة h المعرّفة في كلّ حالة كما يلي:

أ- $h(x) = f(-x),\ D_h = \mathbb{R}$

ب- $h(x) = f(x^2),\ D_h = \mathbb{R}$

ج- $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right),\ D_h = \mathbb{R}^*$

د- $h(x) = f(\sqrt{x}),\ D_h = \mathbb{R}_+$

هـ- $h(x) = f(\ln x),\ D_h = \mathbb{R}_+^*$

و- $h(x) = f(e^x),\ D_h = \mathbb{R}$

أحسب $h'(x)$ ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدالّة h في كلّ حالة.

الحل

1) جدول إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) دراسة اتّجاه تغيّر الدالة f في كلّ حالة:

لدراسة اتجاه تغيّر الدالّة f ندرس إشارة $f'(x)$ ومنه فإشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

2-أ) $f'(x) = g(x)$، $D_f = \mathbb{R}$:

- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty;\alpha]$.
- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha;+\infty[$.

2-ب) $f'(x) = g(-x)$، $D_f = \mathbb{R}$:

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

$g(x) \le 0$ إذا كان $x \le \alpha$ ومنه:

$g(-x) \le 0$ إذا كان $-x \le \alpha$ أي $x \ge -\alpha$

$g(x) \ge 0$ إذا كان $x \ge \alpha$ ومنه:

$g(-x) \ge 0$ إذا كان $-x \ge \alpha$ أي $x \le -\alpha$

وعليه نلخّص الجدول:

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty;-\alpha]$.
- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $[-\alpha;+\infty[$

2-ج) $f'(x) = g(x^2)$، $D_f = \mathbb{R}$:

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

$g(x^2) \le 0$ إذا كان $x^2 \le \alpha$ ومنه:

$g(x^2) \le 0$ إذا كان $\sqrt{x^2} \le \sqrt{\alpha}$ أي أنّ $|x| \le \sqrt{\alpha}$ ونعلم أنّ $\sqrt{x^2} = |x|$. أي $-\sqrt{\alpha} \le x \le \sqrt{\alpha}$

$g(x^2) \ge 0$ إذا كان $x^2 \ge \alpha$ ومنه:

$|x| \ge \sqrt{\alpha}$ أي $\sqrt{x^2} \ge \sqrt{\alpha}$ أي:

$x \in]-\infty;-\sqrt{\alpha}] \cup [\sqrt{\alpha};+\infty[$

وعليه نلخّص الجدول:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty;-\sqrt{\alpha}] \cup [\sqrt{\alpha};+\infty[$
- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $[-\sqrt{\alpha};\sqrt{\alpha}]$.

2-د) $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$، $D_f = \mathbb{R}^*$:

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$g(x) \le 0$ إذا كان $x \le \alpha$ ومنه:

$g\left(\frac{1}{x}\right) \le 0$ إذا كان $0 < \frac{1}{x} \le \alpha$ أو $\frac{1}{x} < 0$ أي:

$x < 0$ أو $x \ge \frac{1}{\alpha}$

$g\left(\frac{1}{x}\right) \ge 0$ إذا كان $\frac{1}{x} \ge \alpha$ ومنه: $0 < x \le \frac{1}{\alpha}$

وعليه نلخّص الجدول:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty;0[\cup [\frac{1}{\alpha};+\infty[$
- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $]0;\frac{1}{\alpha}]$

2-هـ) $f'(x) = g(\sqrt{x})$ ، $D_f = \mathbb{R}_+$:

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}_+$:

$g(x) \le 0$ إذا كان $x \le \alpha$ ومنه:

$g(\sqrt{x}) \le 0$ إذا كان $0 \le \sqrt{x} \le \alpha$

نربع الطرفين فنجد $x \le \alpha^2$.

$g(x) \ge 0$ إذا كان $x \ge \alpha$ ومنه:

$g(\sqrt{x}) \ge 0$ إذا كان $\sqrt{x} \ge \alpha$

نربع الطرفين فنجد $x \ge \alpha^2$

$x \in]-\infty;-\sqrt{\alpha}] \cup [\sqrt{\alpha};+\infty[$

وعليه نلخّص الجدول:

x	0		α^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $[0;\alpha^2]$.
- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha^2;+\infty[$

2-و) $f'(x) = g(\ln x)$ ، $D_f = \mathbb{R}_+^*$:

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$:

$g(\ln x) \le 0$ إذا كان $\ln x \le \alpha$ ومنه:

$e^{\ln x} \le e^{\alpha}$ أي: $x \le e^{\alpha}$

نعلم أنّ: $e^{\ln x} = a$: $a > 0$

$g(\ln x) \ge 0$ إذا كان $\ln x \ge \alpha$ أي: $x \ge e^{\alpha}$

وعليه نلخّص الجدول:

x	0		e^{α}		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $]0;e^{\alpha}]$.
- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $[e^{\alpha};+\infty[$

2-ي) $f'(x) = g(e^x)$ ، $D_f = \mathbb{R}$:

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

$g(e^x) \le 0$ إذا كان $e^x \le \alpha$ أي: $x \le \ln\alpha$

نعلم أنّ: $\ln e = 1$

$g(e^x) \ge 0$ إذا كان $e^x \ge \alpha$ أي: $x \ge \ln\alpha$

وعليه نلخّص الجدول:

x	$-\infty$		$\ln\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- الدالّة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty;\ln\alpha]$.
- الدالّة f متزايدة تماماً على المجال $[\ln\alpha;+\infty[$

3) حساب $h'(x)$:

الدالّة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

نعلم أنّ $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{0(x)-1(1)}{x^2}$

$$h'(x) = -1\,f'(-x)$$

$$h'(x) = 2x\,f'(x^2)$$

الدالّة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}\,f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

الدالّة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,f'(\sqrt{x})$$

الدالّة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

$$h'(x) = \frac{1}{x}\,f'(\ln x)$$

الدالّة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x f'(e^x)$$

اتجاه تغيّر الدالّة h:

لدراسة اتجاه تغيّر الدالّة h ندرس إشارة $h'(x)$ أي إشارة $f'(x)$ في كلّ حالة، حيث: $f'(x) = g(x)$

3-أ) $h(x) = f(-x)$ ، $D_h = \mathbb{R}$:

$$h'(x) = -f'(-x)$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'(x) \le 0$ إذا كان: $x \le \alpha$ ومنه:

$f'(-x) \le 0$ إذا كان: $x \ge -\alpha$

$f'(x) \ge 0$ إذا كان: $x \ge \alpha$ ومنه:

$f'(-x) \ge 0$ إذا كان: $x \le -\alpha$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(-x)$		$+$	0	$-$	
$-f'(-x)$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

- الدالّة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty;-\alpha]$.
- الدالّة h متزايدة تماماً على المجال $[-\alpha;+\infty[$

3-ب) $h(x) = f(x^2)$ ، $D_h = \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2x\,f'(x^2)$$

$f'(x^2) \le 0$ إذا كان: $\sqrt{x^2} \le \sqrt{\alpha}$ ومنه:

$|x| \le \sqrt{\alpha}$ إذا كان: $-\sqrt{\alpha} \le x \le \sqrt{\alpha}$

$f'(x^2) \ge 0$ إذا كان: $\sqrt{x^2} \ge \sqrt{\alpha}$ ومنه:

$|x| \ge \sqrt{\alpha}$ أي أنّ:

$x \in]-\infty;-\sqrt{\alpha}] \cup [\sqrt{\alpha};+\infty[$

إذا كان: $2x = 0$ ومنه $x = 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$2x$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

- الدالّة h متناقصة تماماً على المجال $]-\infty;-\sqrt{\alpha}] \cup [0;\sqrt{\alpha}]$
- الدالّة h متزايدة تماماً على المجال $[-\sqrt{\alpha};0] \cup [\sqrt{\alpha};+\infty[$.

3-ج) $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$، $D_h = \mathbb{R}^*$:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'\left(\frac{1}{x}\right) \le 0$ إذا كان: $0 < \frac{1}{x} \le \alpha$ أو $\frac{1}{x} < 0$

$f'\left(\frac{1}{x}\right) \le 0$ إذا كان: $x \ge \frac{1}{\alpha}$ أو $x < 0$

$f'\left(\frac{1}{x}\right) \ge 0$ إذا كان: $\frac{1}{x} \ge \alpha$ ومنه:

$f'\left(\frac{1}{x}\right) \ge 0$ إذا كان: $0 < x \le \frac{1}{\alpha}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$-\frac{1}{x^2}$		$-$	‖	$-$		$-$	
$h'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

- الدالّة h متزايدة تماما على المجال:

$]-\infty;0[\cup[\frac{1}{\alpha};+\infty[$

- الدالّة h متناقصة تماما على المجال $]0;\frac{1}{\alpha}]$

3-د) $h(x) = f(\sqrt{x})$، $D_h = \mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'(\sqrt{x}) \le 0$ إذا كان: $0 < \sqrt{x} \le \alpha$ ومنه:

نربّع الطرفين فنجد : $0 < x \le \alpha^2$

$f'(\sqrt{x}) \ge 0$ إذا كان: $\sqrt{x} \ge \alpha$ ومنه:

نربّع الطرفين فنجد : $x \ge \alpha^2$

x	0		α^2		$+\infty$
$f'(\sqrt{x})$	‖	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	‖	$+$		$+$	
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- الدالّة h متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha^2]$.
- الدالّة h متزايدة تماما على المجال $[\alpha^2;+\infty[$

3-هـ) $h(x) = f(\ln x)$، $D_h = \mathbb{R}_+^*$:

$$h'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x)$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'(\ln x) \le 0$ إذا كان: $\ln x \le \alpha$ ومنه:

$e^{\ln x} \le e^{\alpha}$ أي $0 < x \le e^{x}$

$f'(\ln x) \ge 0$ إذا كان: $\ln x \ge \alpha$ ومنه:

$e^{\ln x} \ge e^{\alpha}$: أي $x \ge e^{\alpha}$

x	0		e^{α}		$+\infty$
$f'(\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{x}$	‖	$+$	|	$+$	
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

- الدالّة h متناقصة تماما على المجال $]0;e^{\alpha}]$.
- الدالّة h متزايدة تماما على المجال $[e^{\alpha};+\infty[$

3-و) $h(x) = f(e^x)$، $D_h = \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x f'(e^x)$$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$f'(e^x) \le 0$ إذا كان: $e^x \le \alpha$ ومنه:

$\ln e^x \le \ln \alpha$ أي: $x \le \ln \alpha$

$f'(e^x) \ge 0$ إذا كان: $e^x \ge \alpha$ ومنه:

$\ln e^x \ge \ln \alpha$ أي: $x \ge \ln \alpha$ ومنه:

x	$-\infty$		$\ln \alpha$		$+\infty$
$f'(e^x)$		$-$	0	$+$	
e^x			$+$		
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

- الدالّة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\ln \alpha]$.
- الدالّة h متزايدة تماما على المجال $[\ln \alpha;+\infty[$

25. الحساب التكاملي

❖ تعريف

f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ و F دالتها الأصلية على I.

و a و b عددان حقيقيان من I ، العدد الحقيقي $(F(b)-F(a))$ يسمى التكامل المحدود لـ f من a الى b ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

❖ خواص

1) اذا كان $a \leq b$ ومن أجل كل عدد x من $[a;b]$ $f(x) \geq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

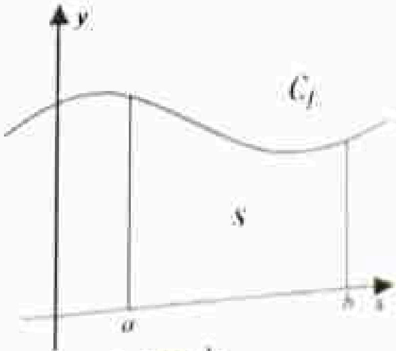
2) اذا كان $a \leq b$ ومن أجل كل عدد x من $[a;b]$ $f(x) \leq 0$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

3) اذا كان $a \leq b$ ومن أجل كل عدد x من $[a;b]$ $f(x) \leq g(x)$ فإن: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

❖ التفسير الهندسي للتكامل المحدود

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الدالة f مستمرة وموجبة تماما على مجال I من $\mathbb{R}$ (C_f) تمثيلها البياني، a و b عددان حقيقيان من المجال I : $b \geq a$

المساحة S من السطح المستوي المحدد بـ (C_f) و $(x'x)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=a$ و $x=b$ هي مساحة مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث:



$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

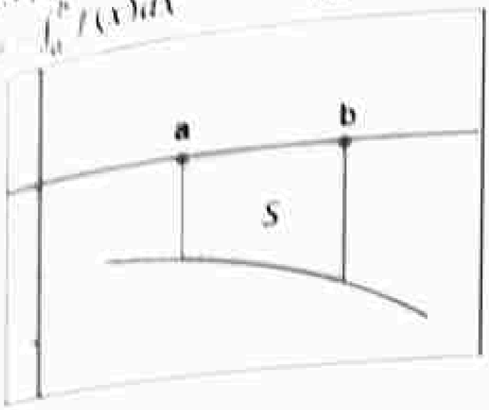
ولدينا:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

وحدة المساحة S هي مساحة مستطيل الوحدة والتي تساوي $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$

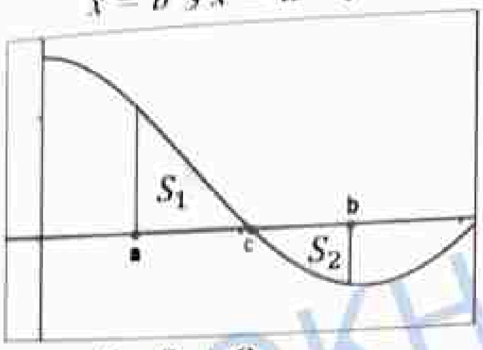
❖ ملاحظات

1) اذا كانت f دالة مستمرة وسالبة على $[a;b]$ فإن المساحة S تعطى بـ $S = -\int_a^b f(x)dx$



2) إذا كانت f دالة مستمرة وتغير اشارتها على المجال $[a;b]$

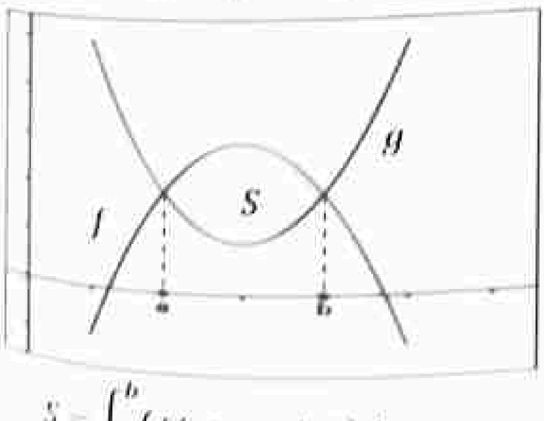
المساحة S المحددة بـ (C_f) و $(x'x)$ والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=a$ و $x=b$



$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

3) مساحة الحيز S المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x=a$ و $x=b$



$$S = \int_a^b (f(x)-g(x))dx$$

4) f مستمرة تماما على مجال $[-a;a]$ مع $a \in \mathbb{R}^*$

* إذا كانت f زوجية فإن:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

•إذا كانت f فردية فإن $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

ملاحظة مهمة: الأصل في حساب المساحة للتكامل إذا كانت f فردية $\int_{-a}^{a} f(x)dx = S_1 + S_2$ لكن قيمته صفرية اعتمادا على القوانين التكامل.

❖ التكامل بالتجزئة

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و u' و v' مشتقتيهما مستمرتين على I فإنه من أجل كل عددين حقيقين a و b من I لدينا

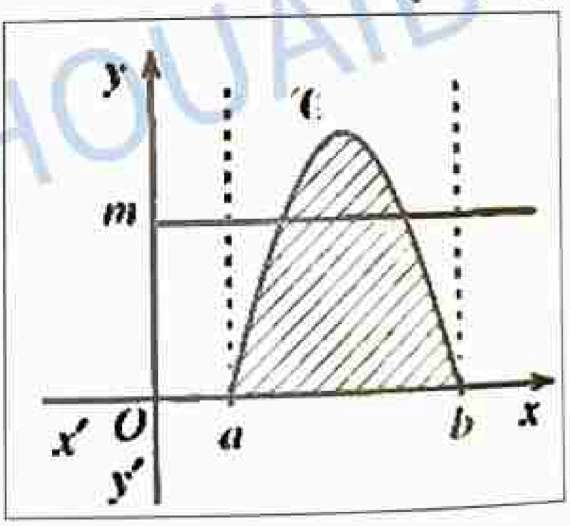
$$\int_a^b u \times v' dx = [u \times v]_a^b - \int_a^b v \times u' dx$$

❖ القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف: f دالة مستمرة على مجال $[a,b]$ من $\mathbb{R}$ القيمة المتوسطة للدالة f على $[a,b]$ هي العدد الحقيقي m حيث

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

التفسير الهندسي



مساحة المستطيل الذي بعديه $(b-a)$ و m تساوي مساحة المستوي المحدد بـ (C_f) و $(x'x)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = a$ و $x = b$

نتائج:

f **دالة مستمرة على المجال** $[a;b]$

1) إذا كان $m \le f(x) \le M$ **فإن:**

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

2) إذا كان $|f(x)| \le M$ **فإن:**

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$$

26. المعادلات التفاضلية

f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ ،
F دالتها الأصلية
G الدالة الأصلية للدالة F على I
a ، b ، C ، d ، α ، β ، ω، أعداد حقيقية
مع $a \neq 0$ و $\omega \neq 0$
يكون الحل العام لبعض المعادلات التفاضلية كما في الجدول:

المعادلة التفاضلية	حلها العام
$y' = f(x)$	$y = F(x) + C$
$y'' = f(x)$	$y = G(x) + C.x + d$
$y' = a.y$	$y = C.e^{ax}$
$y' = a.y + b$	$y = C.e^{ax} - \frac{b}{a}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x$

جزء التدريبات الشاملة للإنطلاقة الممتازة

.01. المراجعة الشاملة في نهايات الدالة العددية

اليوتيوب: حساب النهايات وإزالة حالة عدم التعيين بشرح مفصل للسنة الثانية ثانوي

أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)$

(2 $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)$

(3 $\lim_{x\to-\infty}(-x^3+x)$

(4 $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x+1}\right)$

(5 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$

(6 $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$

(7 $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$

(8 $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

(9 $\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

(10 $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)$

(11 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$

(12 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

(13 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

(14 $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

(15 $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$

(16 $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\right)$

الحل

حالات عدم التعيين: $+\infty-\infty$ و $\frac{\infty}{\infty}$
و $0(\infty)$ و $\frac{0}{0}$

(1 $\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

(2 $\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$

(3 $\lim_{x\to-\infty}(-x^3+x)$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3+x)=\lim_{x\to-\infty}-x^3=+\infty$$

(4 $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{x+1}\right)=-\infty$$

(5 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$$

(6 $\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

(7 $\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

(8 $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

(9 $\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

(10 $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{(\sqrt{x+3})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}\right]$$
$$= \frac{1}{4}$$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$ (11

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]$$
$$= f'(0) = \sin(0) = 0$$

حيث $f(x)=\cos(x)$ ، $f(0)=1$ ، والدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 ودالتها المشتقة:

ومنه $f'(x) = -\sin(x)$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (12

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$
$$= \cos(0) = 1$$

حيث $f(x)=\sin(x)$ ، $f(0)=0$ ، $f'(x)=\cos(x)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ (13

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$$
$$= 0$$

$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ (14

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= 0$$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$ (15

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[|x|\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-x\right]$$

نعلم أن $|x| = \begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}-1\right)\right] = +\infty$$

$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}\right)$ (16

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

02. الدالّة العددية الشاملة الكبرى

اليوتيوب: المراجعة النهائية للدوال العددية للتحضير للباكالوريا

I) لتكن الدالّة g المعرّفة على $\mathbb{R}$:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$

(C_g) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أدرس تغيّرات الدالّة g.

2) برهن أنّ (C_g) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها ثمّ برهن أنّ هذه النقطة هي مركز تناظر للمنحنى (C_g).

3) α و β عددان حقيقيان، برهن أنّه إذا كان $\beta > \alpha$ فإنّ $g(\beta) > g(\alpha)$ ثمّ استنتج مقارنة بين العددين $g(2020)$ و $g(2021)$ دون حساب قيمتيهما.

4) أعط إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثمّ استنتج وضعية (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل.

5) أرسم (C_g)

II) نعتبر الدالّة العدديّة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$$

(C_f) منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) عيّن العددين الحقيقين a و b حيث:

$$f(x) = ax + \frac{bx}{(x-1)^2}$$

1-ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

1-جـ) احسب $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيّاً.

1-د) احسب $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$، فسّر النتيجة هندسيّاً.

1-هـ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإنّ:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

1-و) استنتج اتجاه تغيّر الدالّة f على مجالي تعريفها ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)، ثمّ أدرس وضعيّة (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) بيّن أنّه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي (Δ) في نقطة وحيدة A يطلب تعيينها، ثمّ اكتب معادلة للمماس (T).

4) احسب إحداثيّات نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل.

5) أعط إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$ ثمّ استنتج وضعيّة (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل (xx').

6) أرسم (Δ)، (T) ثمّ (C_f) في معلم جديد يختلف عن (C_g).

7) ناقش بيانيّاً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية:

$f(x) = m$ ، $f(x) = |m| - 1$ ، $f(x) = f(m)$ ،
$-\frac{x}{(x-1)^2} = m$ ، $f(x) = x + m^2 - 4$ ،
$x^3 - 2x^2 = mx(x-1)^2$.

III) لتكن الدّوال العدديّة التالية: h_1 ، h_2 ، h_3. حيث

$h_1(x) = f(|x|)$ و $D_{h_1} = \mathbb{R} - \{-1,1\}$، بيّن أنّ h_1 دالّة زوجية.

$h_2(x) = |f(x)|$ و $D_{h_2} = D_f$

$h_3(x) = f(x-1) + 2$ و $D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\}$

-اشرح كيف يتمّ رسم المنحنيات (C_{h_1}) ، (C_{h_2}) و (C_{h_3}) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثمّ أرسمها.

IV) لتكن الدالّة k المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$:

$$k(x) = f(x^2)$$

أدرس اتّجاه تغيّر الدالّة k ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

الحل

I- الدالّة g المعرّفة على $\mathbb{R}$: $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$

1- دراسة تغيرات الدالة g

1- حساب النهايات:

لدينا: $D_g =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

2- المشتقة واشارتها

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $3x^2 - 6x + 4$

- معادلة من الدرجة الثانية

نحسب المميز Δ

$$\Delta = 36 - 4(3)(4) = -12 < 0$$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $a = 3 > 0$

ومنه $g'(x) > 0$

3- اتجاه تغير الدالة g

الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن $g'(x) > 0$

4- جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2- البرهان أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف :

- يقبل (C_g) نقطة انعطاف اذا كانت المشتقة الثانية تنعدم وتغير إشارتها

الدالة g' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g''(x) = 6x - 6$$

$g''(x) = 0$ معناه $6x - 6 = 0$

لدينا $6x = 6$ ومنه $x = \frac{6}{6} = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	

- بما أن المشتقة الثانية انعدمت و غيرت اشارتها فإن (C_g) يقبل نقطة انعطاف

$$I(1; g(1))$$

$$g(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 4(1) = 2$$

ومنه $I(1;2)$

-برهان أن النقطة (I) هي مركز تناظر لـ (C_g)

$I(a;b)$ مركز تناظر لـ(C_g) إذا كان $x \in D_g$ و $(2a - x) \in D_g$

$$g(2a - x) + g(x) = 2b$$

ولدينا احداثيات I هي $(1;2)$

أي نثبت أن: $g(2 - x) + g(x) = 4$

لدينا :

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$$
$$g(2 - x) = (2 - x)^3 - 3(2 - x)^2 + 4(2 - x)$$
$$= (2 - x)(2 - x)^2 - 3(4 + x^2 - 4x) + 8 - 4x$$
$$= -x^3 + 4 + 3x^2 - 4x$$

ومنه

$$g(2 - x) + g(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4 + x^3 - 3x^2 + 4x$$
$$g(2 - x) + g(x) = 4$$

ومنه (I) مركز تناظر للمنحنى (C_g)

3- البرهان انه إذا كان $\beta > \alpha$ فإن $g(\beta) > g(\alpha)$

لدينا من جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

بما أن $\beta > \alpha$ والدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن

$$g(\beta) > g(\alpha)$$

استنتاج المقارنة بين $g(2020)$ و $g(2021)$

لدينا $2021 > 2020$ والدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

فإن $g(2021) > g(2020)$

4- إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

$$g(x) = x(x^2 - 3x + 4)$$

اذا كانت $g(x) = 0$ نجد

$x(x^2 - 3x + 4) = 0$ أي $x = 0$

أو $x^2 - 3x + 4 = 0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 < 0$$

ومنه $x^2 - 3x + 4 > 0$

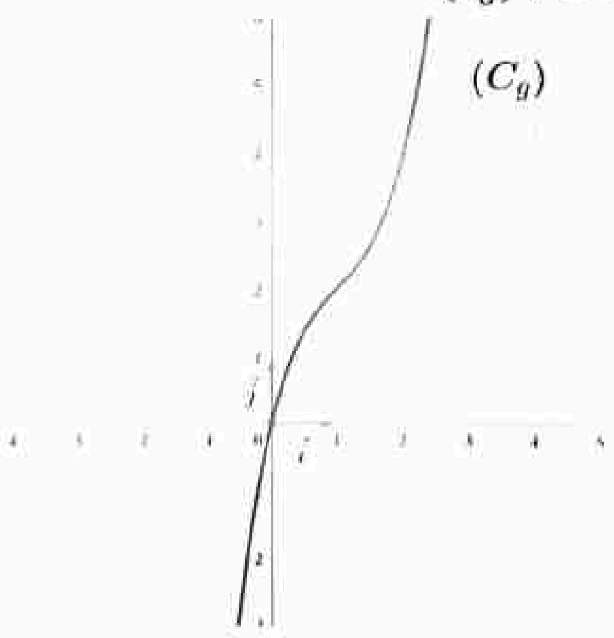
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$x^2 - 3x + 4$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

- استنتاج وضعية (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل

-نحتاج الى إشارة $g(x)$ لتحديد وضعية (C_g) بالنسبة الى محور الفواصل

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_g) تحت محور الفواصل	(C_g) يقطع محور الفواصل	(C_g) فوق محور الفواصل

5- رسم (C_g)



II) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$$

1-أ تعيين a و b حيث $f(x)=ax+\frac{bx}{(x-1)^2}$

طريقة 1

نستعمل القسمة الاقليدية

لدينا:

$$f(x)=\text{الحاصل}+\frac{\text{الباقي}}{\text{القاسم}}$$

$$f(x)=ax+\frac{bx}{(x-1)^2}$$

نعلم أن $(x-1)^2=x^2-2x+1$

ومنه

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+2x^2-x & x \\ \hline 0+0-x & \end{array}$$

ومنه نجد أن $a=1$ و $b=-1$

طريقة 2

نستعمل المطابقة من أجل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

لدينا:

$$f(x)=ax+\frac{bx}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax(x-1)^2+bx}{(x-1)^2}=\frac{ax(x^2-2x+1)+bx}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{ax^3-2ax^2+ax+bx}{(x-1)^2}=\frac{ax^3-2ax^2+(a+b)x}{(x-1)^2}$$
$$f(\alpha)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$-2a=-2\Rightarrow a=1$$
$$\begin{cases}a+b=0\\1+b=0\end{cases}\Rightarrow b=-1$$

ب- حساب النهايات

طريقة 1:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

طريقة 2: باستعمال الشكل $f(x)=x-\frac{x}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{x^2-2x+1}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

جـ حساب $\lim_{x\to1}f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

- التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيما مقاربا شاقوليا معادلته $x=1$ بجوار $-\infty$.

د- حساب $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{(2+h)^3-2(2+h)^2}{(2+h-1)^2}-f(2)}{h}$$
$$\lim_{h\to0}\frac{\frac{(2+h)(2+h)^2-2(2+h)^2}{(1+h)^2}-f(2)}{\frac{h}{1}}$$
$$\lim_{h\to0}\frac{(2+h)^2(h+2-2)}{h(h+1)^2}=\lim_{h\to0}\frac{(h+2)^2}{(h+1)^2}$$
$$=\left(\frac{2+0}{0+1}\right)^2=4\in\mathbb{R}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق عند العدد 2 أي $f'(2)=4$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 2 مماسا معامل توجيهه يساوي 4، ومنه معادلة المماس :

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$
$$\begin{cases}f(2)=0\\f'(2)=4\end{cases}$$

ومنه: $y=4(x-2)$ أي:

$$y=4x-8$$

هـ- البرهان أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$ من أجل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-2x^2)}{(x-1)^4}$$
$$f'(x)=\frac{3x^3-3x^2-4x^2+4x-2x^3+4x^2}{(x-1)^3}$$
$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

و- استنتاج اتجاه تغيّر الدالّة f

لدينا $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $\frac{g(x)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجالين

$]-\infty,0]$ و $[1;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[0;1[$

جدول التغيرات

لدينا $f(0)=0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \| -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2)البرهان أن المستقيم ذا المعادلة $(\Delta): y=x$ مقارب مائل لـ (C_f)بجوار $+\infty$

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{|x|\to+\infty}\left[x-\frac{x}{(x-1)^2}-x\right]$$
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{x}{x^2-2x+1}\right]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

ندرس اشارة الفرق: $f(x)-y$

لدينا: $f(x)-y=\frac{-x}{(x-1)^2}$ ومنه اشارة الفرق من اشارة $-x$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

3- البرهان انه يوجد مماس (T) حيث $(T)//(\Delta)$

نحل المعادلة $f'(x)=1$ حيث 1 هو معامل توجيه المستقيم (Δ)

لدينا:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}=1$$
$$\Rightarrow \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}=1$$
$$\Rightarrow \frac{x^3-3x^2+4x}{(x-1)^3}-1=0$$
$$\Rightarrow \frac{x^3-3x^2+4x-(x-1)^3}{(x-1)^3}=0$$
$$\Rightarrow \frac{x^3-3x^2+4x-x^3+3x^2-3x+1}{(x-1)^3}=0$$
$$\Rightarrow \frac{x+1}{(x-1)^3}=0$$
$$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

ومنه (C_f) يقبل مماس (T) حيث $(T)//(\Delta)$ عند النقطة $A\big(-1;f(-1)\big)$

$$f(-1)=-\frac{3}{4}$$

ومنه $A\left(-1;-\frac{3}{4}\right)$

- معادلة للمماس (T).

$$y=f'(-1)(x+1)-\frac{3}{4}$$
$$(T): y=x+\frac{1}{4}$$

4- ايجاد احداثيات تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

نحل المعادلة $f(x)=0$

$$\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=0$$

ومنه

$$x^3-2x^2=0$$
$$x^2(x-2)=0$$
$$\begin{cases}x^2=0\\x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}$$

ومنه إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل. $\{(0;0),(2;0)\}$

5- اشارة الدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$

لدينا $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ أي $f(x)=\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2}$

ومنه اشارة $f(x)$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x^2		$+$	0		$+$			$+$	
$x-2$		$-$			$-$		0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$			0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

وضعية (C_f) بالنسبة لـ محور الفواصل

نستعمل إشارة $f(x)$

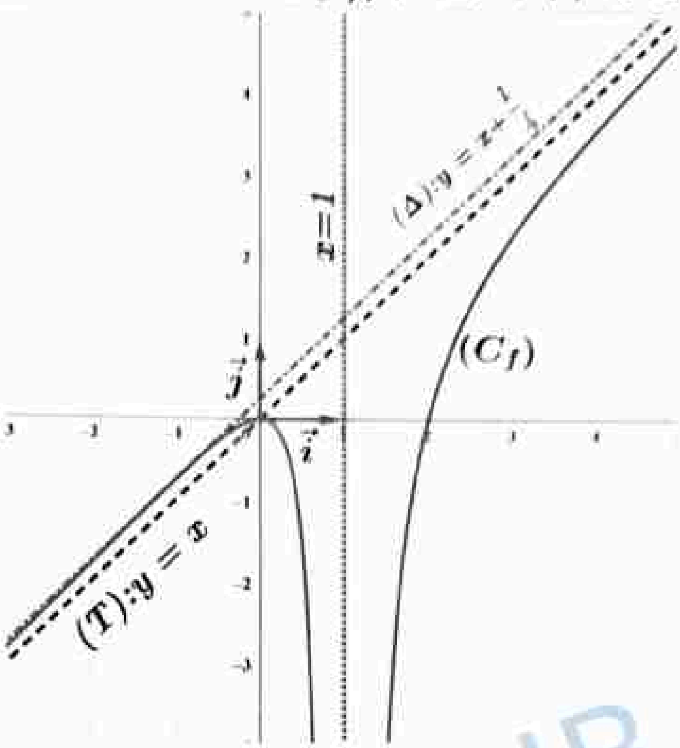
(C_f) فوق محور الفواصل في المجال $]2;+\infty[$

(C_f) تحت محور الفواصل في المجال

$]-\infty;0[\cup]0;1[$ و $]1;2[$

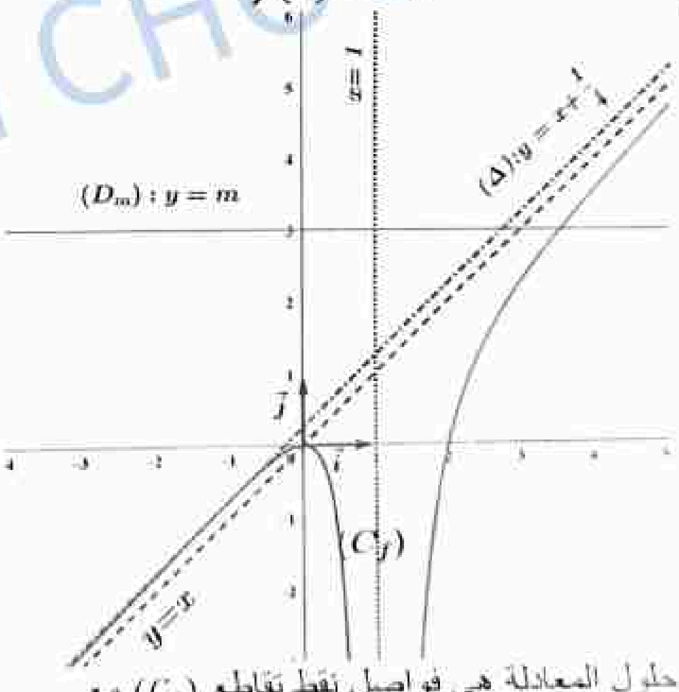
(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين $x=0$ و $x=2$

6- رسم (Δ)، (T) ثم (C_f)



7- المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلات التالية:

$$f(x) = m$$



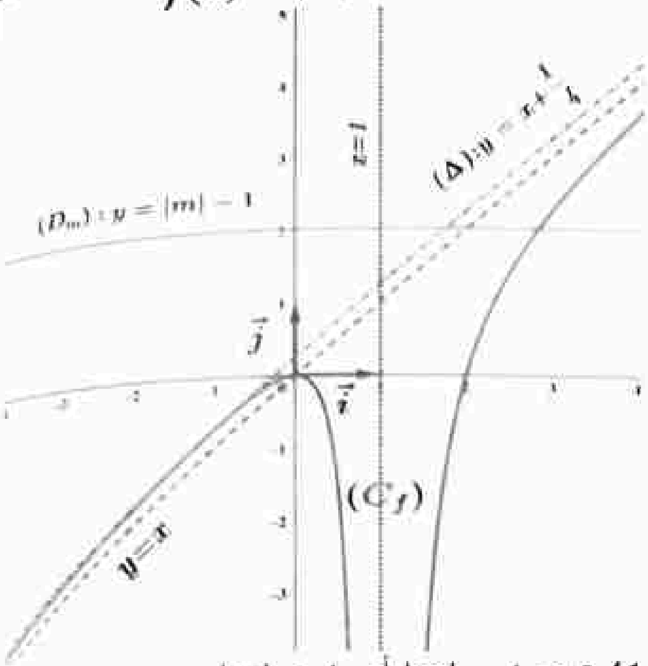
حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (D_m) ذو المعادلة $y = m$

1) $m < 0$ أو $m \in]-\infty; 0[$ للمعادلة 3 حلول (حلان موجبان وحل سالبا)

2) $m = 0$ للمعادلة حلا مضاعفا معدوما وحلا موجبا تماما

3) $m > 0$ للمعادلة حل واحدا موجبا تماما

$$f(x) = |m| - 1$$



1) $|m| - 1 < 0$ أي $|m| < 1$

ومنه $-1 < |m| < 1$ للمعادلة 3 حلول (حلان موجبان وحل سالبا)

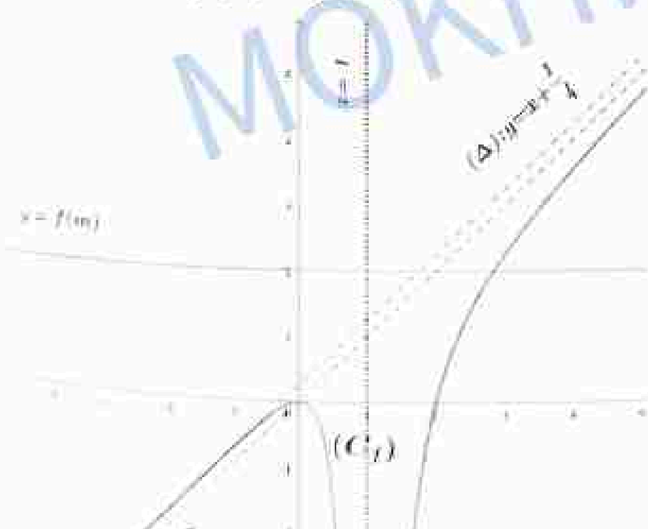
2) $|m| - 1 = 0$ أي $|m| = 1$ ومنه $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

للمعادلة حلا مضاعفا معدوما وحلا موجبا تماما

3) $|m| - 1 > 0$ أي $|m| > 1$

$\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ للمعادلة حلا واحدا موجبا تماما

$$f(x) = f(m)$$



1) $f(m) < 0$ أي

$m \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 2[$

للمعادلة 3 حلول (حلان موجبان وحل سالب)

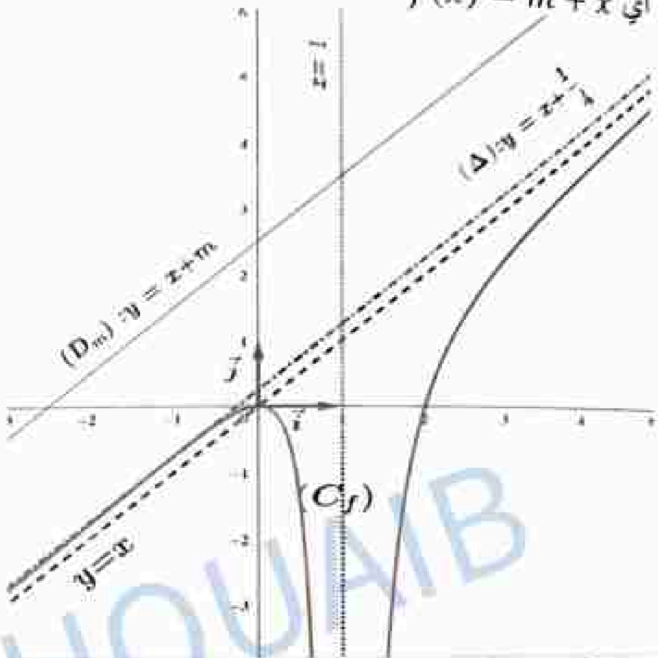
2) $f(m) = 0$ أي $m = 0$ أو $m = 2$ للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم والاخر موجب $x = 2$

3) $f(m) > 0$ أي $m > 2$ للمعادلة حلا واحدا موجبا تماما

$$-\frac{x}{(x-1)^2} = m$$

نضيف x لكل من الطرفين $x - \frac{x}{(x-1)^2} = x + m$

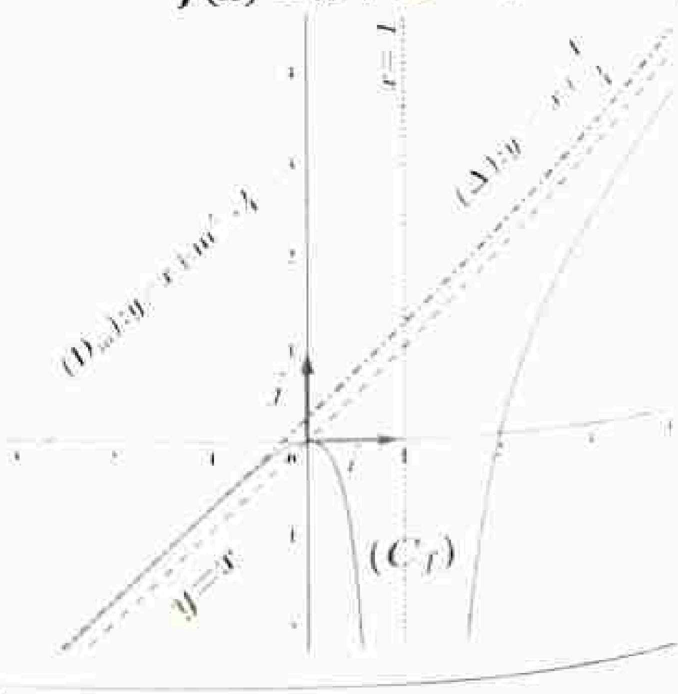
أي $f(x) = m + x$



مناقشة مائلة أي $(\Delta) // (D_m) // (T)$

1) $m < 0$ للمعادلة حلان موجبان تماما
2) $m = 0$ للمعادلة حل وحيد معدوم
3) $0 < m < \frac{1}{4}$ للمعادلة حلان سالبان
4) $m = \frac{1}{4}$ للمعادلة حل مضاعف سالب
5) $m > \frac{1}{4}$ لا توجد حلول للمعادلة.

$$f(x) = x + m^2 - 4$$



مناقشة مائلة $\sqrt{m^2} = |m|$

$(T)//(D_m)//(\Delta)$

1) $m^2 - 4 < 0$ أي $\sqrt{m^2} < \sqrt{4}$ أي $|m| < 2$

ومنه: لمّا $-2 < m < 2$ فإن:
للمعادلة حلان متمايزان موجبان

2) $m^2 - 4 = 0$ أي $\sqrt{m^2} = \sqrt{4}$ أي $|m| = 2$

$\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$ للمعادلة حلا واحدا معدوما

3) $0 < m^2 - 4 < \frac{1}{4}$ أي $\sqrt{4} < \sqrt{m^2} < \sqrt{\frac{17}{4}}$

$2 < |m| < \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} -\frac{\sqrt{17}}{2} < |m| < -2 \\ 2 < m < \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ للمعادلة حلان سالبان

4) $m^2 - 4 = \frac{1}{4}$ أي $\sqrt{m^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ أي: $|m| = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} m = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ m = -\frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ للمعادلة حل مضاعف سالب

5) $m^2 - 4 > \frac{1}{4}$ أي $\sqrt{m^2} > \frac{\sqrt{17}}{2}$ أي $|m| > \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\begin{cases} m < -\frac{\sqrt{17}}{2} \\ m < \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ لا توجد حلول للمعادلة

$$.x^3 - 2x^2 = mx(x-1)^2$$

نقوم بقسمة الطرفين على $(x-1)^2$

$$\frac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2} = mx$$

أي $f(x) = mx$ **مناقشة دورانية**

لتكن النقطة $A_0(x_0;y_0)$ حيث A نقطة ثابتة من D_m

حيث معادلة D_m هي: $y_0 = mx_0$

$mx_0 - y_0 = 0$ (المتغير هو الوسيط m)

أي $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ $\quad A(0,0) = O$

1) $m < 0$ للمعادلة ثلاث حلول أحدها معدوم وحلين موجبين تماما

2) $m = 0$ للمعادلة حلان أحدهما مضاعف معدوم والاخر موجب تماما

3) $0 < m < 1$ للمعادلة ثلاث حلول أحدها سالب والاخر معدوم والاخر موجب

4) $m = 1$ للمعادلة حل معدوم

5) $m > 1$ للمعادلة حل واحد معدوم

III- البرهان أن h_1 دالة زوجية

بما أن D_{h_1} متناظرة بالنسبة الى O

لأن $D_{h_1} =]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

و $x \epsilon D_{h1}$ و $-x \epsilon D_{h1}$

$h_1(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h_1(x)$

$(|x| = |-x|)$

ومنه h_1 دالة زوجية

و (C_{h_1}) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

شرح كيفية الرسم

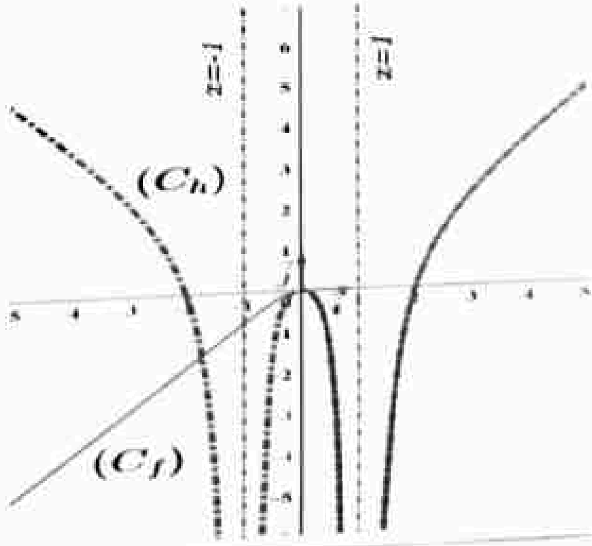
أولا:

(C_{h_1}) حيث $h_1(x) = f(|x|)$

$$h_1(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & : x \epsilon [0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(-x) & : x \epsilon]-\infty;-1[\cup]-1;0] \end{cases}$$

(C_{h_1}) ينطبق على (C_f) في المجال $[0;1[\cup]1;+\infty[$

وبما ان h_1 دالة زوجية فان (C_{h_1}) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب



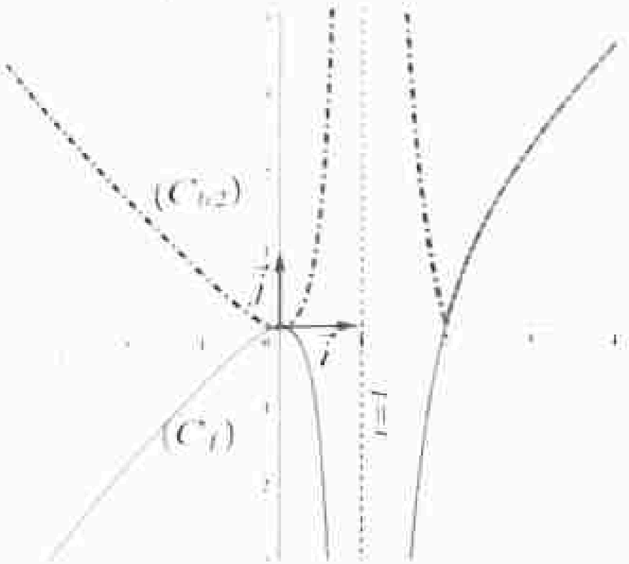
ثانيا :

$h_2(x) = |f(x)|$ و $D_{h2} = D_f$

$$h_2(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) : f(x) \geq 0 \\ -f(x) : f(x) \leq 0 \end{cases}$$

(C_{h_2}) يقع فوق محور الفواصل لأن $|f(x)| \geq 0$

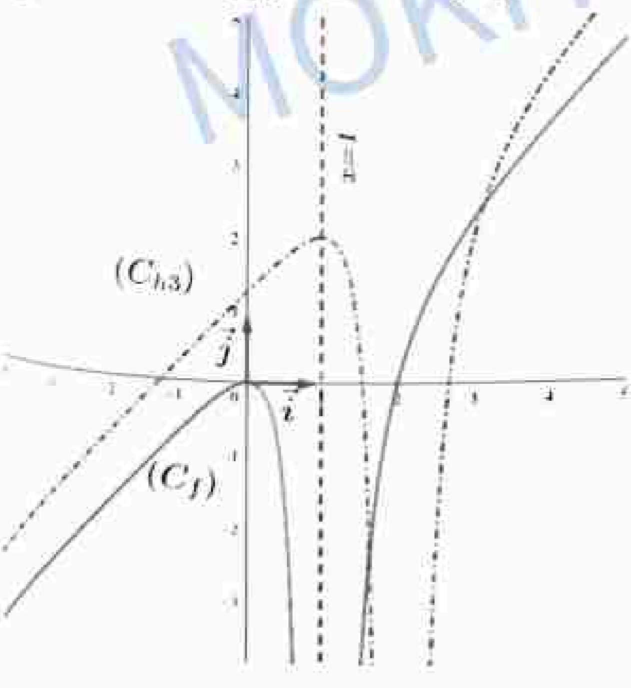
(C_{h_2}) ينطبق على (C_f) على المجال $[2;+\infty[$ و يناظره بالنسبة الى محور الفواصل على المجال $]-\infty;1[\cup]1;2]$



ثالثا: رسم (C_{h_3}) حيث :

$h_3(x) = f(x-1) + 2$ $\quad D_{h_3} = \mathbb{R} - \{2\}$

يتم رسم (C_{h_3}) انطلاقا من (C_f) بإنسحاب شعاعه $\vec{v}$



IV - دراسة اتجاه تغير k على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ •

نلاحظ أن $k = f \circ u$ حيث $u(x) = x^2$

الدالة k قابلة للاشتقاق على المجالات $]-\infty; -1[$ و $]-1; 1[$ و $]1; +\infty[$

$$k'(x) = 2xf'(x^2)$$

1) $f'(x^2) \geq 0$ اذا كان $x^2 \leq 0$

أو $\sqrt{x^2} > \sqrt{1}$

لما $x = 0$ أي $\sqrt{x^2} = |x|$ أي $|x| > 1$

$x > 1$ أو $x < -1$ أي $-1 < x < 1$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$f'(x^2)$	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
$k'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$

الدالة k متناقصة تماما

على المجالين $]-\infty; -1[$ و $[0; 1[$

ومتزايدة تماما

على المجالين $]-1; 0]$ و $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة $\boldsymbol{k}$

$$\lim_{x \to -\infty} k(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x^2) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x^2) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to -1}} k(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x^2) = \lim_{\substack{< \\ x \to -1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to -1}} k(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x^2) = \lim_{\substack{> \\ x \to -1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1}} k(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x^2) = \lim_{\substack{< \\ x \to 1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 1}} k(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x^2) = \lim_{\substack{> \\ x \to 1}} f(x) = -\infty$$

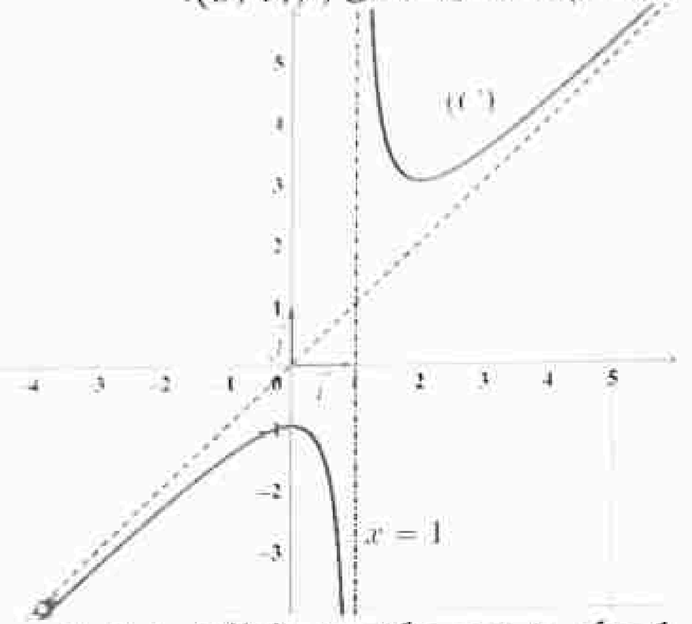
x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
$k(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

$k(x) = f(0^2) = f(0) = 0$

03. الأسئلة البيانيّة للدوال بالتفصيل

اليوتيوب: مراجعة شاملة في الأسئلة البيانية الدوال التحضير للبكالوريا (رائع و مهم)

I) (C) التمثيل البياني للدالّة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1- عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f من البيان.

2- عيّن بيانيًا حلول المعادلة $f'(x) = 0$

3-عيّن بيانيًا حلول المتراجحتين:

$f'(x) > 0$ ، $f'(x) \leq 0$.

4- شكّل جدول تغيرات الدالّة f.

5- شكّل جدول إشارة الدالّة f.

6- عيّن دون حساب قيمة $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

فسّر ذلك بيانيًا.

II) لتكن عبارة الدالة f: $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$

حيث a و b عددان حقيقيان

1- انطلاقا من البيان C_f عين قيمة كل من a و b .

2- عيّن معادلة للمستقيم المقارب المائل للمنحنى (C)

3- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$f(x) = f(m)$ و $f(x) = |m| - 2$

III) - لتكن الدالّة h المعرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$:

$h(x) = |f(x)|$، و (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

اشرح كيف تمّ رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثم ارسمه في المعلم السابق.

الحل

I-1-تعيين مجموعة التعرف D_f :

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

I-2-حلول المعادلة $f'(x) = 0$

قيم x التي تحقق المعادلة $f'(x) = 0$ هي قيم x التي تكون الدالة عندها تقبل قيم حدّية محلّية

من البيان: $x = 0$ ، $x = 2$

أي $S = \{0,2\}$

I-3-التعيين بيانيا حلول المتراجحتين $f'(x) > 0$ و $f'(x) \leq 0$

الحلول البيانية:

أ) $f'(x) > 0$

حلول المتراجحة $f'(x) > 0$ هي قيم x التي تكون فيها الدالة f متزايدة تماما:

$$S' =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$$

ب) $f'(x) \leq 0$

حلول المتراجحة: $f'(x) \leq 0$ هي قيم x التي تكون فيها الدالة f متناقصة: $S'' = [0; 1[\cup]1; 2]$

4-جدول تغيرات الدالة f

من المنحنى نجد:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

حساب النهايات: من البيان:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا شاقوليا معادلته : $x = 1$

5-جدول إشارة f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	‖	$+$
الوضع النسبي	المنحنى تحت محور الفواصل	‖	المنحنى فوق محور الفواصل

6-التعيين دون حساب قيمة $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ وتفسير ذلك بيانيا:

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 0$$

(قانون العدد المشتق)

لأن الدالة f تقبل قيمة حدّية محلية صغرى عند $x = 2$

التفسير البياني: (C) يقبل مماسا أفقيا معادلته $y = 3$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$$

لأن الدالة f تقبل قيمة حدّية محلية عظمى عند $x = 0$

التفسير البياني: (C) يقبل مماسا أفقيا معادلته $y = -1$

II-لتكن عبارة الدالة f هي : $f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$ حيث a و b عددان حقيقيان :

1- تعيين قيمة a و b:

انطلاقا من البيان (C): $f(0) = -1$ ، $f(2) = 3$ و $f'(0) = 0$ ، $f'(2) = 0$

بالتعويض في عبارة الدالة f بالقيمة 0 نجد :

$$f(0) = a(0) + \frac{b}{0-1} = -1$$
$$\frac{b}{-1} = -1 \Rightarrow b = 1$$

اي $f(x) = ax + \frac{1}{x-1}$

بالتعويض بالقيمة 2 نجد أن

$$a(2) + \frac{1}{2-1} = 3$$
$$2a + 1 = 3$$

اي $2a = 2$

ومنه $a = 1$

تصبح : $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

2-تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل للمنحنى(C)

معادلة المستقيم المقارب المائل تكتب من الشكل
$y = ax + b$

من البيان نجد: $0 = a(0) + b$
$b = 0$

أي $y = ax$ إذن: $1 = a(1)$
$a = 1$

ومنه معادلة المستقيم المقارب المائل هي $y = x$

3-المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلتين: $f(x) = |m| - 2$ ، $f(x) = f(m)$

أ-حلول المعادلة $f(x) = |m| - 2$

الحلول البيانية للمعادلة $f(x) = |m| - 2$ هي فواصل نقاط تقاطع (C) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = |m| - 2$

هنا المناقشة أفقية :

1) $|m| - 2 < -1$

أي $|m| < -1 + 2$ أي $|m| < 1$

قاعدة : $|x| < a$ فإن $-a < x < a$

أي : $-1 < m < 1$

للمعادلة حلان متمايزان أحدهما موجب والآخر سالب

2) $|m| - 2 = -1$ أي $|m| = 1$ أي $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

للمعادلة حلا مضاعف معدوما

3) $-1 < |m| - 2 < 3$

أي $2 - 1 < |m| < 3 + 2$

فإن $1 < |m| < 5$

قاعدة :

$a < |m| < b$

$\begin{cases} -b < x < -a \\ a < x < b \end{cases}$

أي
$\begin{cases} -5 < m < -1 \\ 1 < m < 5 \end{cases}$

لا يوجد حلول للمعادلة

4) $|m| - 2 = 3$ أي $|m| = 5$

$\begin{cases} m = 5 \\ m = -5 \end{cases}$ للمعادلة حلا مضاعفا موجبا $x = 2$

5) $|m| - 2 > 3$ أي $|m| > 5$

$\begin{cases} m < -5 \\ m > 5 \end{cases}$ للمعادلة حلان متمايزان موجبان تماما

قاعدة : لما $a < |m|$

فإن $-m < a < m$

ب-حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

الحلول البيانية للمعادلة $f(x) = f(m)$ مع $(m \neq 1)$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $y = f(m)$

1) $f(m) < -1$ أي $m \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[$

للمعادلة حلان أحدهما موجب والأخر سالب

2) $f(m) = -1$ أي $m = 0$

للمعادلة حلا مضاعفا معدوما

3) $f(m) = 3$ أي $m = 2$ للمعادلة حلا مضاعفا موجبا $x_0 = 2$

4) $f(m) > 3$ أي $m \in]1; 2[\cup]2; +\infty[$

للمعادلة حلان متمايزان موجبان تماما

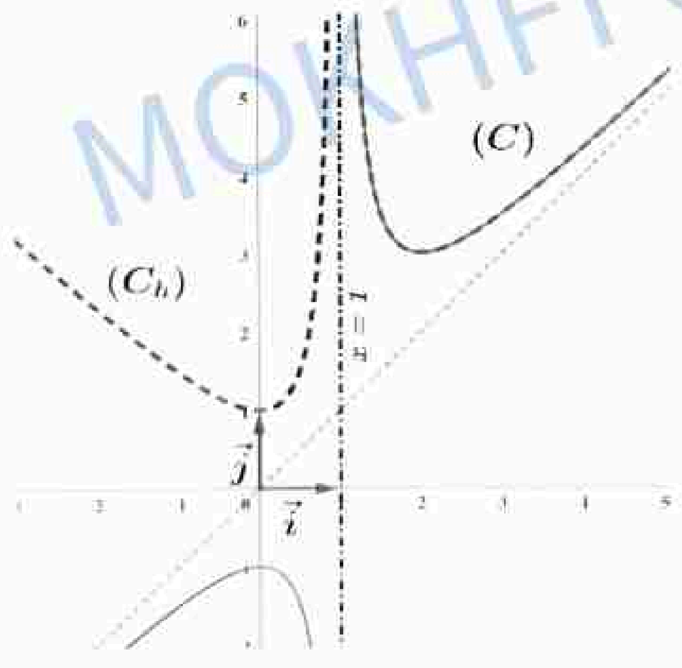
4- لتكن h معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$:
$h(x) = |f(x)|$

$$h(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \ : \ f(x) \geq 0 \\ -f(x) \ : \ f(x) < 0 \end{cases}$$

1-(C_h) ينطبق على (C) إذا كان (C) فوق محور الفواصل

2-(C_h) يناظر (C) بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال $]-\infty; 1[$

تمثيل (C_h) :



.04 دالة تدريبية رقم 01

الموضوع: دراسة دالة عددية شاملة رقم 2

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على: $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1- أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$$

2- استنتج أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ وعند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له، ثم حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

-أدرس تغيرات الدالة f

3- جد إحداثيي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f).

4- أرسم المنحنى (C_f).

5- استنتج رسم المنحنى (C') الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x) = \frac{(x-4)^2}{|x-3|}$$

الحل

الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$

1- إيجاد الأعداد الحقيقية $c; b; a$:

تعيين D_f :

لكي تكون f معرفة يجب ألا ينعدم المقام، أي:

$$x - 3 \neq 0$$

أي: $x \neq 3$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

لدينا: $f(x) = \frac{x^2-8x+16}{x-3}$

نستعمل القسمة الاقليدية:

$x^2 - 8x + 16$	$x - 3$
$-(x^2 - 3x)$	$x - 5$
$-5x + 16$	
$-(-5x + 15)$	
1	

$$x^2 - 8x + 16 = (x-3)(x-5) + 1$$

$$\frac{x^2-8x+16}{(x-3)} = \frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)} + \frac{1}{(x-3)}$$

$$= x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

بالمطابقة نجد: $a = 1$ $\quad b = -5$ $\quad c = 1$

2- استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $\pm\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

وبما أن الدالة f مكتوبة من الشكل:

$$f(x) = ax + b + h(x) = x - 5 + \left(\frac{1}{x-3}\right)$$

ولكي يكون (Δ) مستقيم مقارب مائلا (م م م) يجب أن يكون $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (h(x)) = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (h(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x-3}\right) = 0$$

وعليه: $(\Delta): y = x - 5$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار: $\pm\infty$

دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = \frac{1}{x-3}$

لدينا إشارة البسط موجبة تماما (لأن $1 > 0$)

إذن إشارة الفرق من إشارة المقام: $(x-3)$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$\frac{1}{x-3}$	$-$	||	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	||	(C_f) فوق (Δ)

- دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات:

$$\lim_{\substack{x\to 3\\<}} \left(x - 5 + \frac{1}{x-3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\>}} \left(x - 5 + \frac{1}{x-3}\right) = +\infty$$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{1}{x-3} = -\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{1}{x-3} = +\infty$

التفسير الهندسي: $(\Delta): x = 3$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) باتجاه $+\infty$ و $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - 5 + \frac{1}{x-3}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(x - 5 + \frac{1}{x-3}\right) = -\infty$$

المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{3\}$ لأنها عبارة عن قسمة كثيري حدود قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام ينعدم عند القيمة التي تساوي 3 ومنه:

$$f'(x)=\frac{(2x-8)(x-3)-(x^2-8x+16)}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{2x^2-6x-8x+24-x^2+8x-16}{(x-3)^2}$$
$$=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}-\{3\}$:

لدينا المقام: $(x-3)^2>0$

إذن إشارتها من إشارة البسط: (x^2-6x+8)

نضع: $x^2-6x+8=0$

تذكير $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=36-4(1)(8)=4>0$

تذكير $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ؛ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{6-2}{2}=2\ ;\ x_2=\frac{6+2}{2}=4$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

اتجاه التغير: الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]\cup[4;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[2;3[\cup]3;4]$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

3- إيجاد إحداثيي ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين، واثبات أنها مركز تناظر المنحنى (C_f)

لدينا: $x=3$ معادلة م م عمودي لـ (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

$y=x-5$ معادلة م م مائل لـ (C_f) بجوار: $\pm\infty$

نقطة تقاطع المستقيمين هي: ω

$y=3-5=-2$

ومنه إحداثيات ω: $\omega(3;-2)$

البرهان أنها مركز تناظر:

لتكون $\omega(3;-2)$ مركز تناظر يجب أن يكون:

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$

أي يجب أن يكون:

$f(2(3)-x)+f(x)=2(-2)$

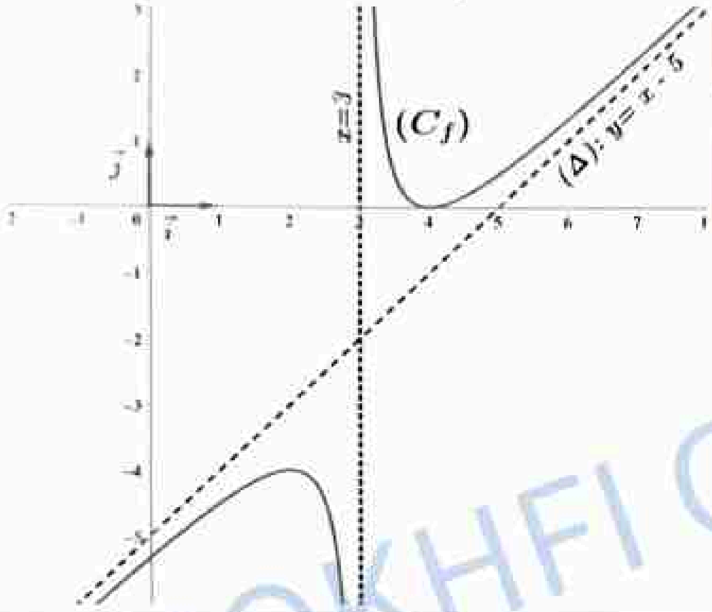
$f(6-x)+f(x)=$

$(6-x)-5+\frac{1}{6-x-3}+\frac{1}{x-3}+x-5$

$=-4$

ومنه: ω هي مركز تناظر لـ (C_f).

4- رسم المنحنى C_f



5- استنتاج رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h

$$h(x)=\frac{x^2+16-8x}{|x-3|}$$

ولدينا: $(x-4)^2>0$

إذن: إشارة الكسر من إشارة المقام: $|x-3|$

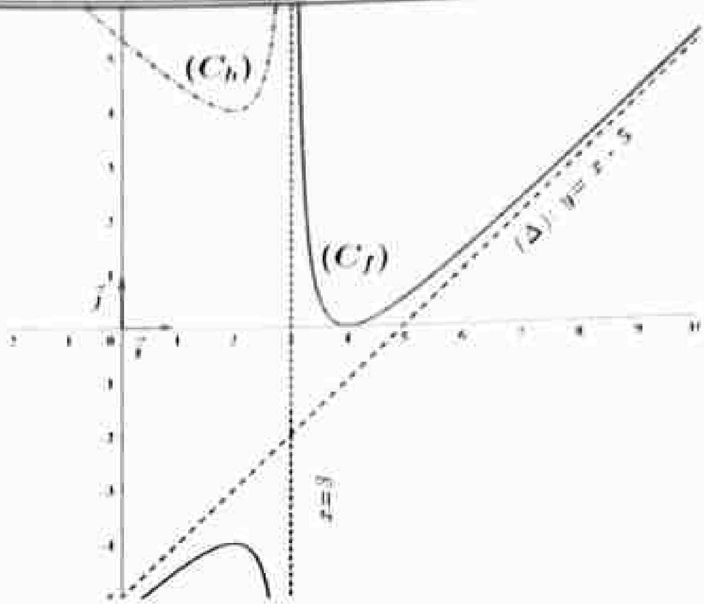
$$|x-3|=\begin{cases}(x-3), & x\geq 3\\ -(x-3), & x\leq 3\end{cases}$$

ومنه:

$$h(x)=\begin{cases}\frac{(x-4)^2}{x-3}=f(x), & x>3\\ -\frac{(x-4)^2}{x-3}=-f(x), & x<3\end{cases}$$

استنتاج رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

- لما $x\in]3;+\infty[$: (C_h) ينطبق على (C_f).
- لما $x\in]-\infty;3[$: (C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل



.05 دالة تدريبية رقم 02

اليوتيوب: دراسة دالة عددية شاملة ورائعة رقم 4

الجزء الأول:

نعتبر الدالة ϕ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\phi(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$$

1- ادرس تغيرات الدالة ϕ

2- بين أن المعادلة $\phi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.4 < \alpha < -0.3$

3- حدد حسب قيم x إشارة $\phi(x)$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$

1- بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1}$$

2- احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

وما هو تفسيرك الهندسي للنتيجة؟

5- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة للمنحنى (P) الممثل للدالة: $x \to (x^2 - 2x - 1)$

6- بين أن: $f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2$

واستنتج حصرا لـ$f(\alpha)$

7- أرسم (P) و (C_f).

الحل

الجزء الأول:

نعتبر الدالة ϕ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\phi(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$$

1- دراسة تغيرات ϕ :

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} \phi(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

المشتقة $\phi'(x)$: الدالة ϕ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن كثير حدود ومنه:

$$\phi'(x) = 6x^2 - 12x + 6$$

إشارة المشتقة:

$$6x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$\Delta = 144 - 4(6)(6) = 0$$

$$x_0 = \frac{12}{12} = 1$$

نحلل العبارة $\phi'(x) = 6x^2 - 12x + 6$ الى

$$\phi'(x) = 6(x^2 - 2x + 1)$$

$$\phi'(x) = 6(x-1)^2$$

ولدينا: $6(x-1)^2 \geq 0$

ومنه المشتقة موجبة دائما

اتجاه التغير: الدالة ϕ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\phi'(x)$	$+$	0	$+$
$\phi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2- البرهان أن المعادلة $\phi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

من جدول التغيرات الدالة ϕ مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي كذلك مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.4; -0.3[$

ولدينا:

$$\begin{cases} \phi(-0.4) = -0.49 \\ \phi(-0.3) = 0.61 \end{cases}$$

و

$$\phi(-0.4) \times \phi(-0.3) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $\phi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

3- إشارة $\phi(x)$ حسب قيم x :

بما أن الدالة ϕ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $\phi(-0.4) < 0$ فسيكون:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$\phi(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني:

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}$$

1- البرهان أن: $f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1}$

ننطلق من العبارة المعطاة حتى نصل إلى عبارة الدالة.

$$x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1} = \frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{(x-1)}$$
$$= \frac{x^3-x^2-2x^2+2x-x+1-5}{x-1}$$
$$= \frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1} = f(x)$$

2- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \left(x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1}\right)$$

المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 1$

لدينا:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} -\frac{5}{x-1} = +\infty$$

ومنه:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x-1}$$

لدينا:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \left(-\frac{5}{x-1}\right) = -\infty$$

ومنه:
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -\infty$$

نهاية شهيرة:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} \frac{1}{x-a} = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to a\\ >}} \frac{1}{x-a} = +\infty$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ لأنها عبارة عن قسمة كثيري حدود قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام ينعدم عند القيمة التي تساوي 1 ومنه دالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-6x+1)(x-1)-(x^3-3x^2+x-4)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x+x-1-x^3+3x^2-x+4}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{2x^3-6x^2+6x+3}{(x-1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\phi(x)}{(x-1)^2}$$

إشارة $f'(x)$:

إشارة f' من إشارة $\phi(x)$ لأن:

$f'(x) = \frac{\phi(x)}{(x-1)^2}$ و $(x-1)^2 > 0$

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	

اتجاه التغير:

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;1[\cup]1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4- حساب: $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

لدينا: $f(x) - (x^2 - 2x - 1) = -\frac{5}{x-1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{5}{x-1}\right) = 0 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{5}{x-1}\right) = 0$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (P) ذو المعادلة $(x \mapsto x^2 - 2x - 1)$ هو منحنى مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

-ندرس تغيراتها ونسميها $g(x)$:

*
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

*
$$g'(x) = 2x - 2$$
$$2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

5- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (P) :

ندرس اشارة الفرق

$$[f(x)-(x^2-2x-1)] = -\frac{5}{x-1}$$

جدول الوضعية:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$-\frac{5}{x-1}$	$+$	$\|$	$-$
الوضعية	(P) فوق (C_f)	$\|$	(P) تحت (C_f)

6- بيان أن: $f(\alpha)=\frac{15}{2(1-\alpha)}-2$

نعوض α في الدالة f :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3-3\alpha^2+\alpha-4}{\alpha-1}$$

والمعادلة $\phi(x)=0$ تقبل α كحل إذن:

$$2\alpha^3-6\alpha^2+6\alpha+3=0$$

ومنه: $\alpha^3=\frac{6\alpha^2-6\alpha-3}{2}$

نعوض في عبارة الدالة g :

$$f(\alpha)=\frac{\frac{6\alpha^2-6\alpha-3}{2}-3\alpha^2+\alpha-4}{\alpha-1}$$

$$f(\alpha)=\frac{-4\alpha-11}{2(\alpha-1)}$$

بالقسمة الإقليدية:

$$\begin{array}{r|l} -4\alpha-11 & 2\alpha-2 \\ \cline{2-2} -(-4\alpha+4) & -2 \\ \hline -15 & \end{array}$$

$$-4\alpha-11=(2\alpha-2)(-2)-15$$

$$\frac{-4\alpha-11}{2\alpha-2}=\frac{(2\alpha-2)(-2)}{2\alpha-2}-\frac{15}{2\alpha-2}$$

$$f(\alpha)=-2+\frac{15}{-(2\alpha-2)}$$

$$f(\alpha)=\frac{15}{-2\alpha+2}-2=\frac{15}{2(1-\alpha)}$$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا: $f(\alpha)=\frac{15}{-2\alpha+2}-2$

$-0.4<\alpha<-0.3$

$0.3<-\alpha<0.4$

$1.3<1-\alpha<1.4$

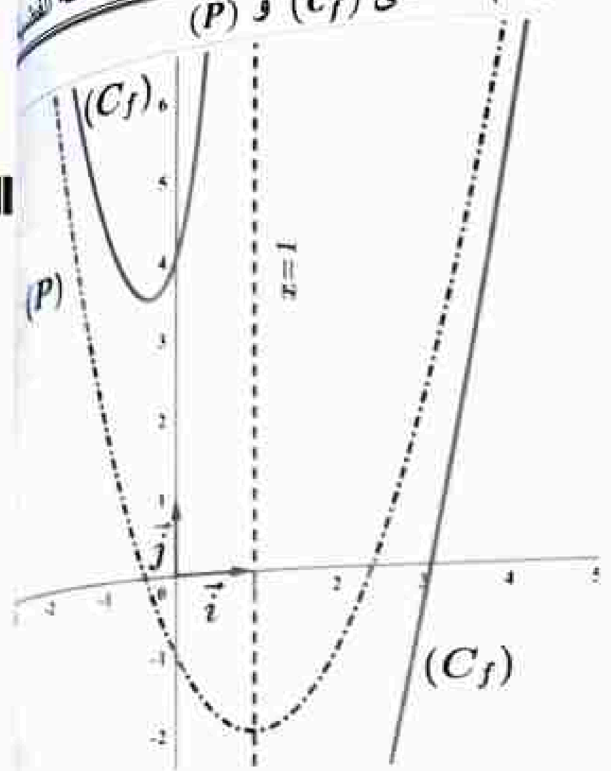
$2.6<2(1-\alpha)<2.8$

$\frac{1}{2.8}<\frac{1}{2(1-\alpha)}<\frac{1}{2.6}$

$\frac{15}{2.8}-2<\frac{15}{2(1-\alpha)}-2<\frac{15}{2.6}-2$

$3.36<f(\alpha)<3.77$

7- رسم المنحنى (C_f) و (P)



.06 دالة تدريبية رقم 03

اليوتيوب: دراسة دالة عددية شاملة ورائعة

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x)=x^3+6x+12$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha\in]-1.48;-1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1-أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

1-ب- بيّن من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2-أ- بين ان المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

2-ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3- بيّن أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4- ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

الحل

I- الدالة g المعرفة بـ: $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1- دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن كثير حدود ومنه $g'(x) = 3x^2 + 6$

ولدينا: $3x^2 + 6 > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2- بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1.48; -1.47[$

و $\begin{cases} g(-1.48) = -0.12 \\ g(-1.47) = 0.0035 \end{cases}$

و $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث: $\alpha \in]-1.48; -1.47[$

استنتاج إشارة g حسب قيم x:

بما أن الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $g(-1.48) < 0$ فيكون:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$

1-أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

ب- البرهان أن: $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن قسمة كثيري حدود قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنّ المقام لا ينعدم أبدا ومنه :

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2) - 2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{3x^4+6x^2-2x^4+12x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2}$$

$$= \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$:

لدينا: $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$

ولدينا $(x^2+2)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

اتجاه التغير:

f متزايدة تماما على $]-\infty; \alpha] \cup [0; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; 0]$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- بيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$:

لكي يكون م م مائلا يجب أن يكون:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-6-2x}{x^2+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{2x}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) جوار $\pm\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$

$$f(x) - y = \frac{-2x-6}{x^2+2}$$

ولدينا: $x^2 + 2 > 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه إشارة الفرق من إشارة: $(-2x-6)$

$-2x - 6 = 0$

$-2x = 6 \Leftrightarrow x = -3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$-2x-6$	$+$	0	$-$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3) بيان أن: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أن: $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha$$
$$= \frac{2\alpha^3 - 12 - 3\alpha^3 - 6\alpha}{2(\alpha^2 + 2)}$$
$$= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{2(\alpha^2 + 2)}$$
$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = -\frac{g(\alpha)}{2(\alpha^2 + 2)}$$

ولدينا من السؤال السابق: $g(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{0}{2(\alpha^2+2)} = 0$$

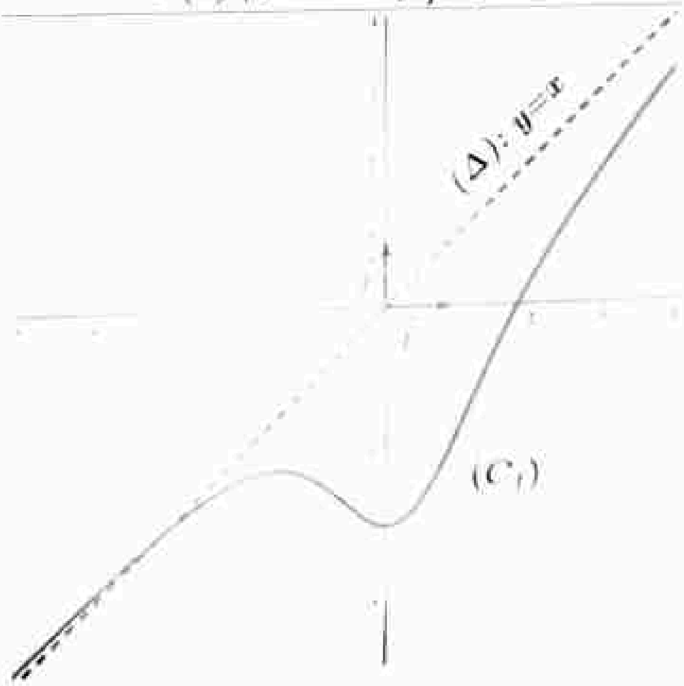
ومنه:
$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ولدينا $-1.48 < \alpha < -1.47$

$$\frac{3}{2}(-1.48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22 < f(\alpha) < -2.21$$

4- رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .



.07. دالة تدريبية رقم 04

الموضوع: دراسة شاملة لدالة عددية بالقيمة المطلقة رقم 3

I- نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 3x + 2}$$

1- عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بين أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

2- أدرس تغيرات الدالة f

3- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

-أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب الأفقي (Δ) .

4- عين تقريب تآلفي للدالة f عند العدد 0.

5- أنشئ (C_f).

II- نعرف الدالة g كما يلي:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$

1- عين مجموعة تعريف الدالة g .

2- اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3- ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة g عند 0.

4- ادرس شفعية الدالة g .

5-استنتج التمثيل البياني (γ) للدالة g انطلاقا من (C_f)

6- ناقش بيانيا وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$

حيث m وسيط حقيقي.

الحل

I- نعتبر الدالة f : $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$

1- تعيين D_f :

لتكون f معرفة يجب أن يكون

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\Delta = 9 - 4(1)(2) = 1$$
$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\}$

البرهان أن: $f(x) = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

نتبع ما يلي:

1- توحيد المقامات

2- النشر وترتيب القوى

3- المطابقة

$$f(x) = \frac{a(x^2-3x+2)+b(x-2)+c(x-1)}{x^2-3x+2}$$

$$f(x) = \frac{ax^2-3ax+2a+bx-2b+cx-c}{x^2-3x+2}$$

$$f(x) = \frac{ax^2+(-3a+b+c)x+2a-2b-c}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}$$

بالمطابقة نجد: $a = 1$

$-3a + b + c = 2$

$-3 + b + c = 2$

$2a - 2b - c = 1$

$2 - 2b - c = 1$

$$\begin{cases} b + c = 5 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2b + c = 1 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد:

$b = -4$

نعوض في (1): $-4 + c = 5$

$c = 9$

ومنه: $f(x) = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$

2- دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right) = 1$$

لأن $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-a} = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left[1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right] = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$$

لأن
$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \to a \\ <}} \frac{1}{x-a} = -\infty \\ \lim_{\substack{x \to a \\ >}} \frac{1}{x-a} = +\infty \end{cases}$$

المشتقة: الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1; 2\}$ لأنها عبارة عن قسمة كثيري حدود قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام ينعدم عند القيمتين 1 و 2 ومنه دالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-3x+2)-(2x-3)(x^2+2x+1)}{(x^2-3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5x^2+2x+7}{(x^2-3x+2)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط: $-5x^2 + 2x + 7$

لأن المقام: $(x^2 - 3x + 2)^2 > 0$ على $\mathbb{R} - \{1; 2\}$

$\Delta = 4 - 4(-5)(7) = 144 > 0$

$$x_1 = \frac{-2-12}{-10} = \frac{7}{5}$$

$$x_2 = \frac{-2+12}{-10} = -1$$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

اتجاه التغير:

الدالة f متزايدة تماما على المجال

$$]-1; 1[\cup]1; \tfrac{7}{5}[$$

ومتناقصة تماما على $]-\infty; -1] \cup [\frac{7}{5}; 2[\cup]2; +\infty[$

جدول تغيرات $f(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \| -\infty$	$\nearrow$	-24	$\searrow$	$-\infty \| +\infty$	$\searrow$	1

3- تعيين معادلات المستقيمات المقاربة:

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي

$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ مستقيمان مقاربان عموديان.

دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و م م الأفقي (Δ)

-ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

$$= \frac{-4(x-2)+9(x-1)}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{-4x+8+9x-9}{x^2-3x+2}$$

$$= \frac{5x-1}{x^2-3x+2}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط × المقام:

$$5x-1=0$$
$$5x=1$$

ومنه: $x=\frac{1}{5}$

$$x^2-3x+2 \neq 0$$

معناه $x \neq 1$ و $x \neq 2$

جدول الوضعية:

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$		1		2	$+\infty$
$5x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]\frac{1}{5};1[\cup]2;+\infty[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]-\infty;\frac{1}{5}[\cup]1;2[$

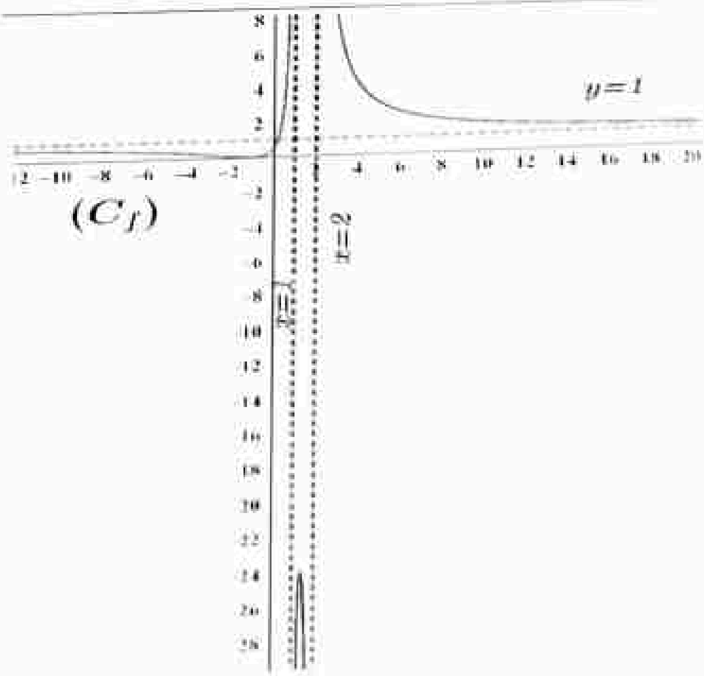
(C_f) يقطع (Δ) عند $x=\frac{1}{5}$

4- تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0 :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$f'(0)=\frac{7}{4}$$
$$f(0)=\frac{1}{2}$$

ومنه: $y=\frac{7}{4}x+\frac{1}{2}$

5- رسم (C_f)



II) الدالة g معرفة بـ: $g(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$

1-تعيين مجموعة تعريف g :

لتكون g معرفة يجب أن يكون:

$$x^2-3|x|+2 \neq 0$$

نفكك القيمة المطلقة:

$$x^2-3|x|+2=\begin{cases} x^2-3x+2, & x \geq 0 \\ x^2+3x+2, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \Leftrightarrow & x \neq 2, \quad x \neq 1 \\ x^2+3x+2 \Leftrightarrow & x \neq -2, \quad x \neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\{-2;-1;1;2\}$

2- كتابة g بدون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x)\begin{cases} \frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}=f(x), & x \geq 0 \\ \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2} & x \leq 0 \end{cases}$$

3- دراسة استمرارية الدالة g عند 0:

عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند عدد، نقول إن الدالة مستمرة عند ذلك العدد.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{(0)^2-2(0)+1}{(0)^2+3(0)+2}=\frac{1}{2}$$

و

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{(0)^2-2(0)+1}{(0)^2+3(0)+2}=\frac{1}{2}$$

بما أن: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x)=\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)=\frac{1}{2}$

فإن: g مستمرة عند 0

قابلية الاشتقاق:

نحسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}-\frac{1}{2}}{x-0}$$

$$g'(x)=\frac{(2x-2)(x^2+3x+2)-(2x+2)(x^2-2x+1)}{(x^2+3x+2)^2}$$

$$g'(0)=\frac{-4-3}{4}=-\frac{7}{4}$$

و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{7}{4}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 0.

لأنه من شروط قابلية الاشتقاق أن تكون النهايتان من اليمين و اليسار متساويتين.

ومنه: المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين معامل توجيه كل منهما $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

4- دراسة شفعية الدالة g

نحسب $g(-x)$

إذا كانت $g(-x)=g(x)$: الدالة زوجية

إذا كان $g(-x)=-g(x)$: الدالة فردية

$$g(-x)=\frac{(-x)^2+2|-x|+1}{(-x)^2-3|-x|+2}=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$$
$$=g(x)$$

ومنه g دالة زوجية

5- استنتاج التمثيل البياني (γ) للدالة g انطلاقا من (C_f)

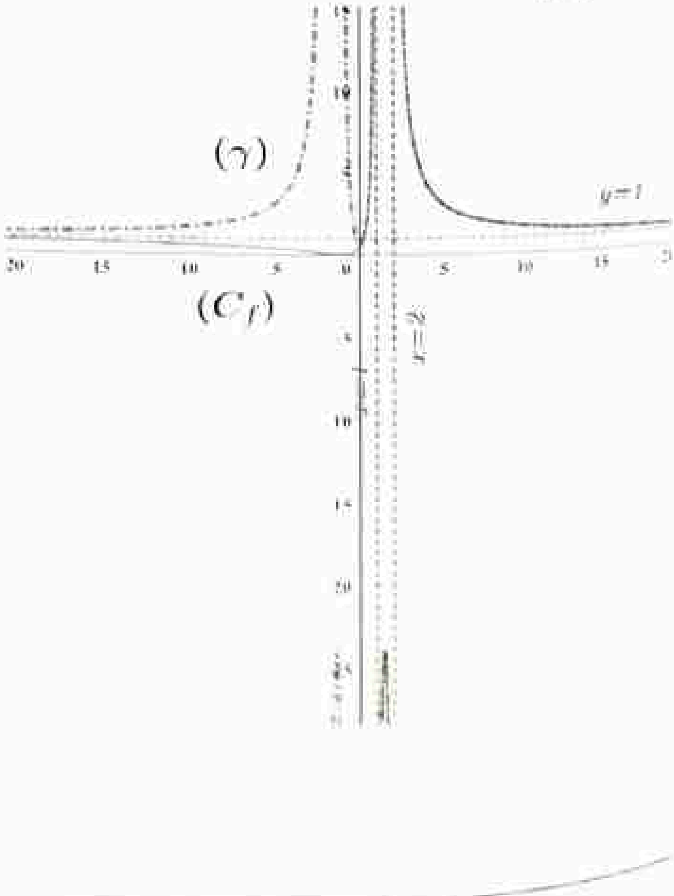
لدينا لما $x \geq 0$ فإن

$$g(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+1}=f(x)$$

ومن فإن التمثيل البياني (γ) للدالة g ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة g زوجية فإن منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

-انشاء (γ)



6- المناقشة البيانية لعدد وحلول المعادلة:

$$(m-1)x^2-(3m+2)x+2m-1=0$$
$$mx^2-x^2-3mx-2x+2m-1=0$$
$$x^2+2x+1=mx^2-3mx+2m$$
$$x^2+2x+1=m(x^2-3x+2)$$
$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}=m$$
$$f(x)=m$$

مناقشة أفقية

حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y=m$ مع (C_f).

$m\in]-\infty;-24[$	يوجد حلان موجبان
$m=-24$	يوجد حل مضاعف $x=\frac{7}{5}$
$m\in]-24;0[$	لا يوجد حلول
$m=0$	يوجد حل وحيد $x=-1$
$m\in]0;1[$	يوجد حلان سالبان
$m=1$	يوجد حل وحيد $x=-\frac{1}{5}$
$m\in]1;+\infty[$	يوجد حلان

.08 دالة تدريبية رقم 05

اليوتيوب: الاسم على اليوتيوب: دراسة دالة صماء 3

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه، استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O.\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر المستقيمين $(D):y=-3x$ و $(D'):y=x$

1- أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة.

3- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$ ثم فسر النتيجة المحصل عليها بيانيا.

4- بين أن المستقيم (D') مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

5- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ: (D) و (D')، ثم ارسم (C_f) و (D) و (D').

الحل

I- لدينا الدالة g $g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$

1- دراسة اتجاه تغير g :

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2x - \sqrt{1+x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2x - \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 2x - |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left[x\left(2 - 1\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right] = -\infty$$

بنفس الطريقة:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

المشتقة:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$
$$= -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 2$$
$$g'(x) = \frac{-x+2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

و لدينا: $\sqrt{1+x^2} > 0$

إذن إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط: $-x+2\sqrt{1+x^2}$

$$-x+2\sqrt{1+x^2} = 0$$
$$2\sqrt{1+x^2} = x$$

نربع الطرفين:

$$(2\sqrt{1+x^2})^2 = x^2$$
$$4(x^2+1) = x^2$$
$$3x^2+4 = 0$$

ولدينا $x > 0$ فتصبح العبارة

$$3x^2+4 > 0$$

و منه: $g'(x) > 0$

أي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

من جدول التغيرات لدينا أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$$

فانه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

تعيينه:

لدينا: $2x - \sqrt{x^2+1} = 0$ أي

$$2x = \sqrt{x^2+1}$$

مع احترام أن: $2x \geq 0$ أي $x \geq 0$

نربع الطرفين:

$$4x^2 = x^2+1$$
$$3x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{......... مقبول} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \text{...... مرفوض} \end{cases}$$

الحل الثاني مرفوض لأن $x \geq 0$

$$x_1 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	+	

II- الدالة f المعرفة بـ: $2\sqrt{1+x^2} - x$

1- دراسة نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(2\sqrt{1+x^2} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(2\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(-2\,x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - 1\right)$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2\sqrt{1+x^2} - x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2\,x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1\right)$$
$$= +\infty$$

2- البرهان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

نشتق الدالة f :

$$f'(x) = 2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$
$$= \frac{2x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

ومنه:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

استنتاج جدول تغيرات الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\sqrt{1+x^2} > 0$

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

- الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right[$.

جدول التغيرات للدالة f :

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}$$

3-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x+3x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}+2x\right)$$

(بالضرب في المرافق):

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(2\sqrt{x^2+1}+2x)(2\sqrt{x^2+1}-2x)}{(2\sqrt{x^2+1}-2x)}$$

(حسب المتطابقة الشهيرة)

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4(x^2+1)-4x^2}{(2\sqrt{x^2+1}-2x)}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2(\sqrt{x^2+1}-2x)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = 0$$

استخرجنا x^2 إلى $(-x)$ لأننا نحسب النهاية عند $-\infty$

التفسير البياني:

$(D) :\ y = -3x$ هو مستقيم م مائل بجوار $-\infty$

4-بيان أن (D') مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-x-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}-2x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2(\sqrt{x^2+1}-x)\right)\left(2(\sqrt{x^2+1}+x)\right)}{2(\sqrt{x^2+1}+x)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

ومنه: (D') ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

5-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D') و (D)

الوضع النسبي بين (C_f) و (D)

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = 2\sqrt{x^2+1} + 2x$$
$$= \frac{(2\sqrt{x^2+1}-x)(2\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$$
$$= \frac{2(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x} = \frac{2}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

ولكن: $2 > 0$ و $1 > 0$ و $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} > 0$ و

$-x > 0$

لأن $x < 0$

إذن:

$$\frac{2(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}-x} > 0$$

إذن اشارة الفرق موجبة ومنه (C_f) فوق (D) .

الوضع النسبي بين (C_f) و (D')

$$f(x) - y = 2\sqrt{x^2+1} - x - x$$

نضع:

$$2\sqrt{x^2+1}-2x=0$$

$$2\sqrt{x^2+1}=2x$$

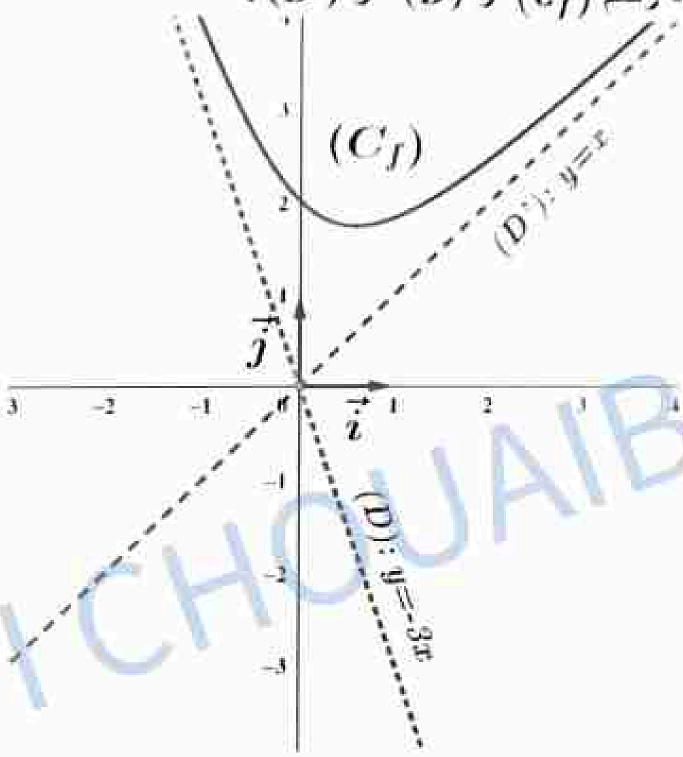
$$\sqrt{x^2+1}=x$$

بتربيع الطرفين $x^2+1=x^2$

$$x^2-x^2+1>0$$

ومنه (D') فوق (C_f).

- رسم (C_f) و (D) و (D').



09. دالة تدريبية رقم 06

اليوتيوب: دالة عددية شاملة 2018 رقم 1

لتكن الدالة f قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها، لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	3	$\nearrow +\infty$

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل التالي:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

حيث a و b و c أعداد حقيقية

1- احسب $f'(x)$

2- اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :

أ- عين الأعداد الحقيقية c, b, a

ب- عين $\lim\limits_{x \to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^{<}} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

جـ- قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللا إجابتك.

3- نأخذ فيما يلي: $a=1$ و $b=1$ و $c=\frac{1}{4}$ ولتكن (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

أ- بين أنه عندما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائل (Δ) معادلته $y=x+1$.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ)

جـ- أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

د- عين نقاط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل

4- λ عدد حقيقي، عين بيانيا، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$

الحل

لتكن الدالة f حيث: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$

1- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للاشتقاق "معطى" على $\mathbb{R}-\{1\}$

ودالتها المشتقة هي: $f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}$

2-أ- تعيين الأعداد الحقيقية a ;b و c :

من الجدول نجد:

$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ $\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=3$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ $\quad f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$

لدينا أن: $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=a\left(\frac{1}{2}\right)+b+\frac{c}{\left(\frac{1}{2}\right)-1}=1$$

$$=\frac{a}{2}+b+\frac{c}{-\frac{1}{2}}=1$$

بضرب الطرفين في العدد 2:

$$\left(\frac{a}{2}+b-2c=1\right)$$

$$=a+2b-4c=2\ \ldots\ldots\ldots(1)$$

ولدينا: $f\left(\frac{3}{2}\right)=3$:

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=a\left(\frac{3}{2}\right)+b+\frac{c}{\frac{3}{2}-1}=3$$

$$= \frac{3a}{2} + b + \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

بضرب الطرفين في 2:

$$(2)\left(\frac{3a}{2} + b + \frac{c}{\frac{1}{2}}\right) = 3(2)$$
$$= 3a + 2b + 4c = 6 \ldots\ldots\ldots (2)$$

ولدينا: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = a - \frac{c}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = 0$$
$$= a - \frac{c}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = a - 4c = 0$$
$$= a - \frac{c}{\frac{1}{4}} = a - 4c = 0 \ldots\ldots (3)$$

ولدينا: $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = a - \frac{c}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = a - 4c = 0$$
$$(3) \Leftrightarrow a = 4c$$

نعوض في المعادلة (1):

$$(1) \Leftrightarrow a + 2b - 4c = 2$$
$$= 4c + 2b - 4c = 2b$$
$$2b = 2$$
$$b = 1$$

نعوض b في المعادلتين (1) و (2):

$$(1) \Leftrightarrow a + 2 - 4c = 2$$
$$(2) \Leftrightarrow 3a + 2 + 4c = 6$$

نجمع طرفا إلى طرف:

$$4a + 4 = 8$$
$$4a = 4$$
$$a = 1$$

من (3) نجد:

$$a = 4c$$
$$1 = 4c$$
$$\Longrightarrow c = \frac{1}{4}$$

ومنه تصبح عبارة الدالة:

$$f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$$

ب- تعيين النهايات:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$$

التفسير البياني:

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 1$

جـ المقارنة بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$:

لدينا أن $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$ و الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$

إذن: $f\left(\frac{3}{4}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

3-نأخذ فيما يلي: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

أ- البرهان أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $\pm\infty$ معادلته $y = x + 1$:

حتى يكون(Δ) مستقيم مقارب مائل عند $\pm\infty$ يجب أن:

$$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - y] = 0$$
$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - x - 1\right)$$
$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0$$

ومنه: (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى(C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب- دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - x - 1$$
$$= \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$$

و $\frac{1}{4} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة:$(x-1)$

جدول الوضعية

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$
الوضعية	(C) تحت (Δ)	‖	(C) فوق (Δ)

جـ إثبات أن النقطة $\omega(1;2)$ هي مركز تناظر لـ(C)

يجب أن يتحقق : $f(2(1) - x) + f(x) = 4$

$$f(2-x) + f(x) = 2 - x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{2-x-1} + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$$
$$= 4 + \frac{-\frac{1}{4}}{-(-x+1)} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$$
$$= 4 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 4$$

ومنه ω هي مركز تناظر لـ (C)

د- تعيين نقط تقاطع (C) مع محور الفواصل:

نحل المعادلة: $f(x)=0$

$$f(x)=0$$

$$x+1+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}=0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}+\frac{\frac{1}{4}}{x-1}=0$$

$$\frac{x^2-1+\frac{1}{4}}{x-1}=0$$

ومن مجموعة التعريف المقام $(x-1)\neq 0$ ومنه:

$$x^2-1+\frac{1}{4}=0$$

$$x^2-\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=0$$

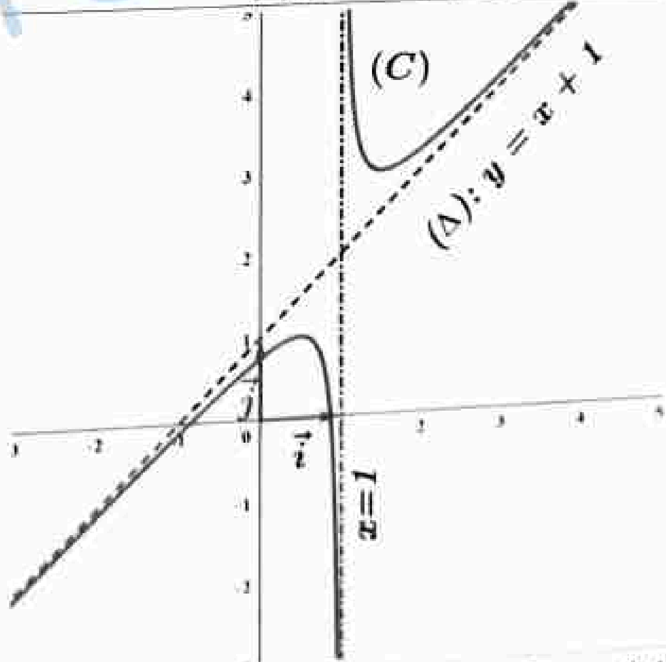
$$x^2-\frac{3}{4}=0$$

$$x^2=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\frac{3}{4}}\\ x=-\sqrt{\frac{3}{4}}\end{cases}$$

ومنه نقط التقاطع هي: $\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\right\}$

لأن أي تقاطع مع محور الفواصل يكون ترتيبه 0.

رسم المنحنى (C) والمستقيم (Δ)



4 تعيين حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$

حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذي المعادلة $y=|\lambda|$

المناقشة:

$y=|\lambda|$

$y<1$ ، $|\lambda|<1$

- لما: $\lambda\in]1;-1[$ للمعادلة حلان متمايزان

$y=1$ ، $|\lambda|=1$

$\begin{cases}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{cases}$ للمعادلة حل مضاعف $x=\frac{1}{2}$

$|y|=\lambda\Leftrightarrow y=|\lambda|$

- لما $\lambda\in]-3;-1[\cup]1;3[$ ليس للمعادلة حل

$y=\frac{3}{2}$ ، $\lambda=3$

- لما $\begin{cases}\lambda=3\\ \lambda=-3\end{cases}$ للمعادلة حل مضاعف

- لما $\lambda\in]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$ للمعادلة حلان متمايزان

10. دالة تدريبية رقم 07

اليوتيوب: دالة عددية شاملة 2018

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد $(O.\vec{i};\vec{j})$.

1-أ- عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

ب- أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2-أ- عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$$

ب- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$؟ برر.

جـ- حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d)، لتكن A نقطة تقاطع (C_f) و (d).

3- أرسم (C_f) و (d) (تؤخذ الوحدة $2cm$ على (Ox) و $1cm$ على (Oy)).

4- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$ ، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α

5- استنتج بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

6-أ- نريد إيجاد نتيجة السوال (5) باستعمال الحساب بين أن فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته: $y=x+m$

هي حلول المعادلة (E) التالية:

$$(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

ب- جد حسب قيم m حلول المعادلة (E)

الحـل

1- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

أ- تعيين النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{x^2+1-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{x^2+1-2x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}(x^3-4x^2+8x-4)$$

نحسب أولا $\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

نهاية شهيرة: $a\in\mathbb{R}\ ;\ \lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}=+\infty$

ثم: $\lim_{x\to1}(x^3-4x^2+8x-4)$

$$\lim_{x\to1}(x^3-4x^2+8x-4)=1$$

ومنه: $\lim_{x\to1}f(x)=(+\infty)\times(1)=+\infty$

ب- دراسة تغيرات الدالة f:

بما أن الدالة f دالة ناطقة فهي تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$ وعليه:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{3x^3-3x^2-8x^2+8x+8x-8-2x^3+8x^2-16x+8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

إشارة f' من إشارة (البسط × المقام):

$$(x-1)^3\neq0 \implies x-1\neq0 \implies x\neq1$$

$$x^3-3x^2=0 \implies x^2(x-3)=0$$

$$x^2=0\Rightarrow x=0$$

$$x-3=0\Rightarrow x=3$$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$(x-1)^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال:

$$]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$$

ومتناقصة تماما على المجال $]1;3[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- تعيين الأعداد الحقيقية $c;b;a$:

باستخدام القسمة الاقليدية

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+8x-4 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^3+2x^2-x & x-2 \\ \hline -2x^2+7x-4 & \\ +2x^2-4x+2 & \\ \hline 3x-2 & \end{array}$$

نجد

$$x^3-4x^2+8x-4=(x-2)(x-1)^2+(3x-2)$$

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x^2-2x+1)(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{(3x-2)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x^2-2x+1)(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^2}+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$f(x)=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

ومنه: $c=3;b=-2;a=1$

ب- استنتاج المستقيم المقارب المائل:

$$\lim_{|x|\to+\infty}x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-(x-2)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x}{x^2}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3}{x}=0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x-2$ م م مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ج- وضعية (C_f) بالنسبة الى (d):

ندرس إشارة الفرق:

$$f(x)-y = x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-x+2$$
$$= \frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

إشارة الفرق من إشارة (البسط في المقام) و المقام موجب دوما على المجال $\mathbb{R}-\{1\}$:

جدول الوضعية

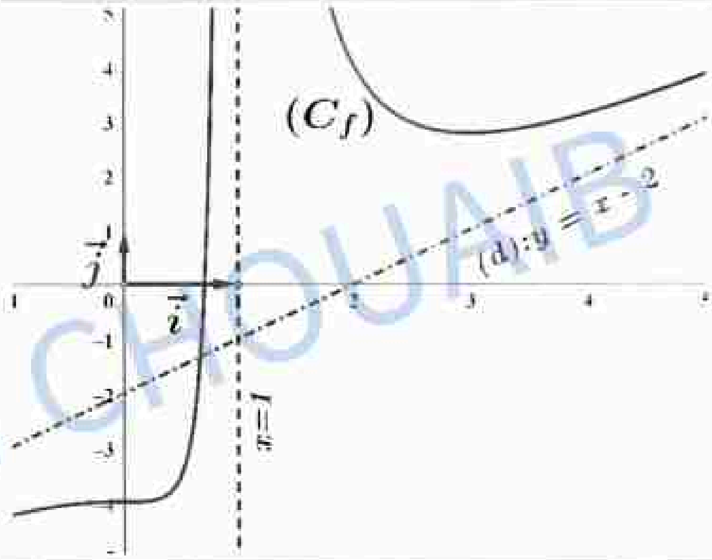
x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

(C_f) فوق (d) على المجال $]\frac{2}{3};1[\cup]1;+\infty[$

(C_f) تحت (d) على المجال $]-\infty;\frac{2}{3}[$

(C_f) يقطع (d) عند $x=\frac{2}{3}$

3- رسم (C_f) و (d).



4- بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=+\infty\end{cases}$$ و

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\times\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$ حيث:

$\alpha\in]-\infty;1[$

-استنتاج قيمة مقربة لـ α إلى 10^{-2}

من البيان نجد أن α محصور بين $]0;1[$

x	0	0.5	0.75	1
$f(x)$	-4	-3.5	-0.25	$+\infty$

ومنه: $0.75<\alpha<1$ تكافئ: $75.10^{-2}<\alpha<1$

5- استنتاج بيانيا حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f)مع المستقيم $(d_m): y=x+m$ (أي مناقشة مائلة)

لدينا: (d) يوازي (d_m) أي لهما نفس معامل التوجيه 1 أي $f'(x)=1$

$$\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=1$$
$$x^3-3x^2=(x-1)^2(x-1)$$
$$=(x^2+1-2x)(x-1)$$
$$=x^3-x^2-2x^2+2x+x-1$$
$$x^3-3x^2=x^3-3x^2+3x-1$$
$$3x=1$$
$$x=\frac{1}{3}$$

نحسب معادلة المماس عند $x=\frac{1}{3}$:

$$y=f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$y=\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{47}{12}\right)$$
$$y=x-\frac{51}{12}$$
$$y=x-\frac{17}{4}$$

لأن: $f'\left(\frac{1}{3}\right)=1$ و $f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{47}{12}$

المناقشة:

$m\in]-\infty;-\frac{17}{4}[$ لا يوجد حلول للمعادلة

$m=-\frac{17}{4}$ للمعادلة حل وحيد $x=\frac{1}{3}$

$m\in]-\frac{17}{4};-2[$ للمعادلة حلان موجبان

$m=-2$ للمعادلة حل مضاعف $x=\frac{2}{3}$

$m\in]-2;+\infty[$ للمعادلة حلان موجبان

6-أ-إيجاد حسب قيم m حلول المعادلة

$$(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

$$\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=x+m$$
$$x^3-4x^2+8x-4=(x+m)(x-1)^2$$
$$=x^3-2x^2+x+mx^2-2mx+m$$
$$4x^2-8x+4-2x^2+x+mx^2-2mx+m=0$$
$$2x^2+mx^2-7x-2mx+m+4=0$$
$$(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

وهي نفس حلول المعادلة E

نعوض قيم m :

لما $m=-2$:

$$-(-4+7)x-2+4=0$$

$$-3x + 2 = 0$$

$$-3x = -2 \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

لما: $m \neq -2$ تصبح العبارة من الدرجة الثانية:

$$\Delta = (2m + 7)^2 - 4(m + 2)(m + 4)$$
$$= 4m^2 + 49 + 28m - 4m^2 - 16m - 8m - 32$$
$$= 4m + 17$$

نجعل المعادلة صفرية: $4m + 17 = 0$

$$m = -\frac{17}{4}$$

لما $\Delta = 0$ فإن $m = -\frac{17}{4}$ للمعادلة حل مضاعف

هو $x_0 = -\frac{b}{2a}$ يكافئ: $x_0 = \frac{2m+7}{2(m+2)}$

لما $\Delta < 0$ ليس للمعادلة حلول

لما $\Delta > 0$ أي:

$$m \in \left]-\frac{17}{4}; -2\right[\cup \left]-2; +\infty\right[$$

للمعادلة حلان متمايزان:

$$x_1 = \frac{2m+7-\sqrt{4m+7}}{2(m+2)} \qquad x_2 = \frac{2m+7+\sqrt{4m+7}}{2(m+2)}$$

مع: $m \neq -2$

x	$-\infty$		$-\frac{17}{4}$		-2		$+\infty$
Δ		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	

11. دالة تدريبية رقم 08

اليوتيوب: دالة عددية شاملة 2018 رقم 3

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1-أ- أحسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقيx إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O.\vec{i}\,;\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2-أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

جـ- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

3-أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x) = \frac{xg(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$ ،حيث$f'(x)$مشتقة الدالةf

ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f (نأخذ $f(\alpha) \approx -0.1$)

4- احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$المعادلة $f(x) = 0$

5- أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

6- لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x) - 2$$

ب- استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي يطلب تعيينه، ثم أنشئ(C_h).

الحل

1-أ- الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\boldsymbol{g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4}$$

حساب النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$
$$= \lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$
$$= \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$$

ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$:

المشتقة:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$

إشارة المشتقة:

$$\boldsymbol{g'(x) = 0}$$
$$6x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$(\Delta) = 64 - 4(6)(7)$$
$$= -104 < 0$$

إشارة العبارة من إشارة 6 و $6 > 0$ إذن:

$$6x^2 - 8x + 7 > 0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

-تشكيل جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2-أ-اثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.7 < \alpha < 0.8$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ومنه مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.7; 0.8[$

و $\begin{cases} g(0.8) = 0.06 \\ g(0.7) = -0.37 \end{cases}$

و $g(0.7) \times g(0.8) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$0.7 < \alpha < 0.8$

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II- الدالة f المعرفة بـ : $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

2-أ- البرهان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

بتوحيد المقامات نجد:

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3-2x^2+x+2x^2-2x+1+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= f(x)$$

ب- استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته:

نلاحظ أن $f(x) = ax + b + h(x)$

ويجب أن يكون: $\lim_{|x|\to+\infty} h(x) = 0$

$$\lim_{|x|\to+\infty} h(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1-3x}{4x^2-4x+2}$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-3x}{4x^2} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-3}{4x} = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) معادلته:

$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ بجوار $\pm\infty$

جـ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} - \frac{1}{2}(x+1)$$

$$= \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

أولا ندرس إشارة المقام $2(2x^2-2x+1)$

$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(\Delta) = 4 - 4(2)(1) = -4 < 0$$

إشارتها من إشارة 2 إذن: $2x^2 - 2x + 1 > 0$

ومنه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة البسط $1 - 3x$

$$1 - 3x = 0$$

$$1 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

جدول الوضعية:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f)يقطع(Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3- أ- بيان أن $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$.

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (f دالة ناطقة)

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$= \frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ب- استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ حسب قيم x :

لدينا: إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$ لأن:
$$(2x^2-2x+1)^2>0$$

إشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4- حساب $f(1)$:

$$f(1)=\frac{(1)^3-2(1)+1}{2(1)^2-2(1)+1}=\frac{0}{1}=0$$

ومنه (1) هو جذر لـ $f(x)$

حل المعادلة: $f(x)=0$

يكافئ: $\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=0$

ويكافئ: $x^3-2x+1=0$

لأن: $2x^2-2x+1>0$

اذن باستخدام القسمة الاقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x^2+x-1 \\ \hline x^2-2x+1 & \\ -x^2+x & \\ \hline -x+1 & \\ x-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه: $(x^3-2x+1)=(x-1)(x^2+x-1)$

فتصبح المعادلة: $x^3-2x+1=0$

تكافئ: $(x-1)(x^2+x-1)=0$

$$\begin{cases} x-1=0 & \text{أو} \\ x^2+x-1=0 & \end{cases}$$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$x^2+x-1=0$

$(\Delta)=1-4(1)(-1)=5>0$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

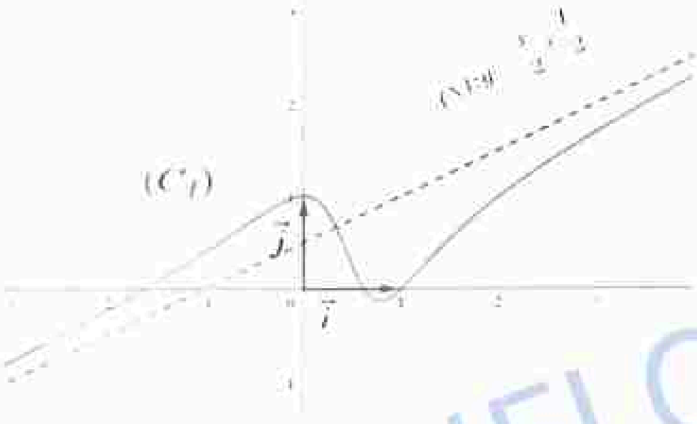
$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ومنه حلول المعادلة هي: $\left\{1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$

التفسير البياني لحلول المعادلة: $f(x)=0$

هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل (xx').

5-إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى C_f .



6-أ- التحقق أن $h(x)=f(x)-2$

$$f(x)-2=\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}-2$$
$$=\frac{x^3-2x+1-4x^2+4x-2}{2x^2-2x+1}$$
$$=\frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}=h(x)$$

ب- استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة تحويل نقطي

لدينا: $h(x)=f(x+a)+b$

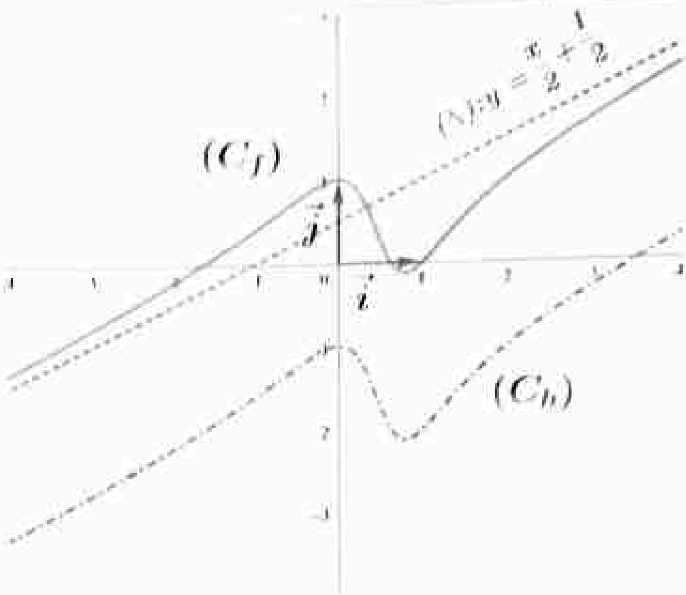
يتم رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه:

$$\vec{v}=-a\vec{i}+b\vec{j} \quad \text{أي} \quad \vec{v}\binom{-a}{b}$$

بالتطبيق: $h(x)=f(x)-2$

ومنه: (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{v}\binom{0}{-2}$

• إنشاء (C_h)



12. دالة تدريبية رقم 09

اليوتيوب: دراسة دالة عددية شاملة 2018 رقم 4

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x-2}$$

(C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}.\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

1- أدرس تغيرات الدالة f

2-أ- برر أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y = x + 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

- أدرس الوضعية النسبية بين (C) ومقاربه المائل (d)

ب- أرسم (d) ثم (C)

3-أ- باستعمال (C) عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$x^2 + (1-m)x + 2m = 0$$

4- لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بـ:

$$g(x) = \left|\frac{x(x+1)}{x-2}\right|$$

أ- اكتب $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x

ب- أرسم (γ) منحنى الدالة g اعتمادا على (C)

5- لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2;2\}$ بـ:

$$h(x) = \frac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}$$

أ- بين أن الدالة h دالة زوجية.

ب- ارسم منحنى (T) للدالة h اعتمادا على (C)

الحل

f الدالة العددية المعرفة على : $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x-2}$$

1) دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\<}} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\>}} \frac{x^2+x}{x-2} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

المشتقة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{2\}$ لأنها عبارة عن قسمة كثيري حدود قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام ينعدم عند القيمة 2 ومنه دالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x-2)-(x^2+x)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x+x-2-x^2-x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$$

إشارة المشتقة:

لدينا: $(x-2)^2 > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{2\}$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة البسط $(x^2 - 4x - 2)$.

$$x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(1)(-2) = 24 > 0$$

$$x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6}$$

$$x_2 = \frac{4 + 2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6}$$

x	$-\infty$		$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-4x-2		+	0	−		−	0	+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على:

$$]2-\sqrt{6};2[\cup]2;2+\sqrt{6}[$$

ومتزايدة تماما على:

$$]-\infty;2-\sqrt{6}[\cup]2+\sqrt{6};+\infty[$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	$2-\sqrt{6}$		2		$2+\sqrt{6}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$5-2\sqrt{6}\simeq 0.1$	↘ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ ↘	$5+2\sqrt{6}\simeq 9.9$	↗ $+\infty$

2-أ- التبرير أن المستقيم (d) ذي المعادلة $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل لـ (C)

حتى يكون (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل يجب أن يكون: $\lim\limits_{x\to\mp\infty}[f(x)-y]=0$

$$\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^2+x}{x-2}-(x+3)\right]$$
$$=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x^2+x-(x+3)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+x-x^2+2x-3x+6}{(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{(x-2)}=0$$

ومنه (d) مستقيم مقارب مائل لـ (C) بجوار $\mp\infty$

دراسة الوضع النسبي بين (d) و (C)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{2\}$

$$f(x)-y=\frac{6}{(x-2)}$$

ومنه إشارة الفرق من اشارة المقام:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$\frac{6}{x-2}$		$-$	$\Vert$	$+$	
الوضعية		(d) أسفل (C)	$\Vert$	(d) فوق (C)	

3-أ- المناقشة البيانية:

المناقشة البيانية للمعادلة

$$x^2+(1-m)x+2m=0$$

لدينا

$$x^2+(1-m)x+2m=0$$
$$x^2+x-mx+2m=0$$
$$x^2+x=mx-2m$$
$$x^2+x=m(x-2)$$
$$\frac{x^2+x}{x-2}=m$$

ومنه
$$f(x)=m$$

و عليه الحلول البيانية للمعادلة $x^2+(1-m)x+2m=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C) والمستقيم ذي المعادلة $y=m$

اذن:

- لما $m\in]-\infty;0[$: للمعادلة حلان متمايزان مختلفين في الاشارة
- لما $m=0$ للمعادلة حلان حل معدوم وحل سالب
- لما $m\in]0;5-2\sqrt{6}[$: للمعادلة حلان سالبان
- لما $m=5-2\sqrt{6}$: للمعادلة حل مضاعف سالب $x=2-\sqrt{6}$
- لما $m\in]5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}[$: ليس للمعادلة حل
- لما $m=5+2\sqrt{6}$: للمعادلة حل مضاعف موجب $x=2+\sqrt{6}$
- لما $m\in]5+2\sqrt{6};+\infty[$: للمعادلة حلان موجبان

لتكن الدالة g المعرفة بـ: $g(x)=\left|\frac{x(x+1)}{x-2}\right|$

4-أ-كتابة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ حسب قيم x:

لدينا :

$$g(x)=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\geq 0\\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$$

أي:

$$g(x)=\begin{cases}f(x); x\in[-1;0]\cup]2;+\infty[\\ -f(x); x\in]-\infty;-1[\cup]0;2[\end{cases}$$

- المنحنى (γ) ينطبق على المنحنى (C). في المجال $[-1;0]\cup]2;+\infty[$
- المنحنى (γ) يناظر المنحنى (C) بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $]-\infty;-1[\cup]0;2[$

5-أ- بيان أن الدالة h زوجية:

لتكون h زوجية يجب أن يكون $x\in D_h$ و $-x\in D_h$ و $h(x)=h(-x)$

$$h(-x)=\frac{|-x|(|-x|+1)}{|-x|-2}$$

ونعلم أن: $|-x|=|x|$

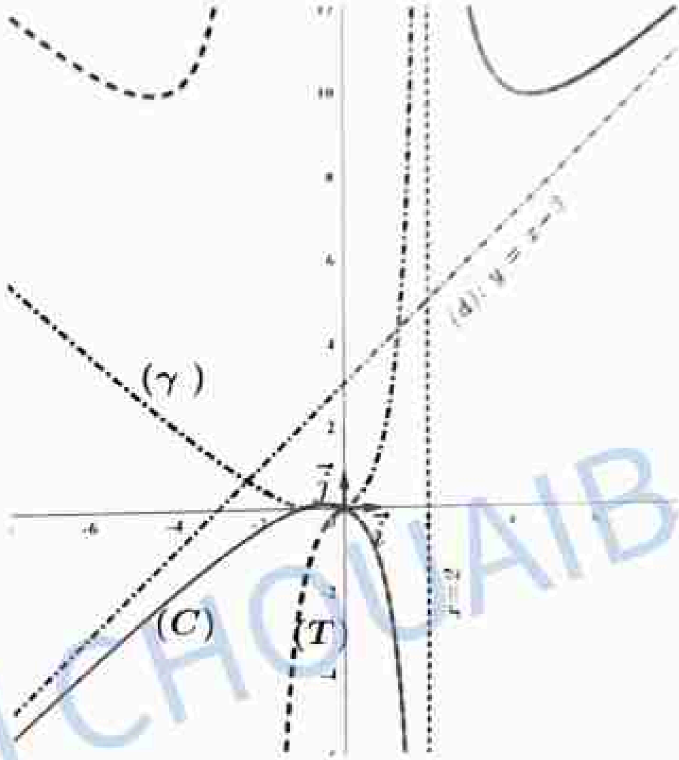
ومنه: $h(-x)=\frac{|x|(|x|+1)}{|x|-2}=h(x)$

ومنه الدالة h زوجية، ومنحناها متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

أي: $h(x)=\begin{cases}f(x); x\in[0;2[\cup]2;+\infty[\\ f(-x); x\in]-\infty;-2[\cup]-2;0]\end{cases}$

- المنحنى (T) ينطبق على المنحنى (C) في المجال $]0;2]\cup]2;+\infty[$
- المنحنى (T) يناظر المنحنى (C) بالنسبة لمحور التراتيب (yy') في المجال $]-\infty;-2[\cup]-2;0]$

ب- رسم (T) منحنى الدالة h اعتمادا على (C)

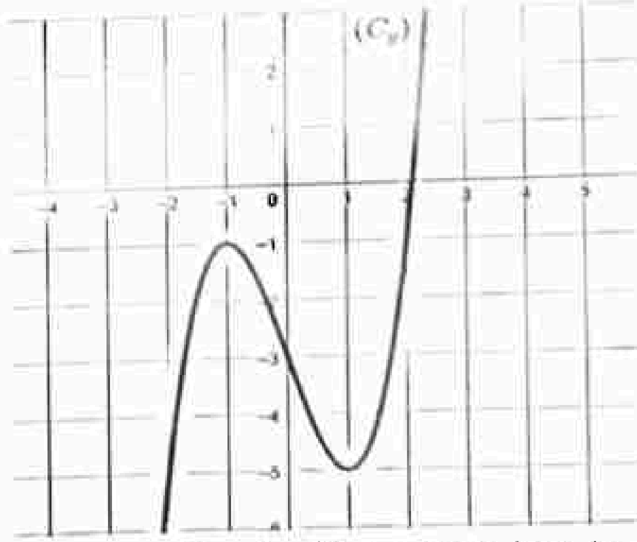


13. دالة تدريبية رقم 10

اليوتيوب: دالة عددية شاملة 2018 رقم 5

الجزء الأول:

(C_g) التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=ax^3+bx+c$ حيث $c;b;a$ أعداد حقيقية.



1- باستعمال (C_g) عين كلا من $c;b;a$

2- شكل جدول تغيرات الدالة g

3- بين أن المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلا واحدا α حيث: $\alpha\in]2;\frac{5}{2}[$

4- استنتج إشارة $g(x)$ لما يتغير x على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي: $f(x)=\frac{(2x^3+3)}{(x^2-1)}+1$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ أن: $f'(x)=\frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

2- عين دون حساب: $\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف

4- شكل جدول تغيرات الدالة f

5- بين أن: $f(\alpha)=3\alpha+1$، ثم استنتج حصر لـ $f(\alpha)$

6- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم ادرس الوضعية النسبية بين (Δ) و (C_f).

7- ارسم كلا من (Δ) و (C_f).

الحل

1- تعيين $c;b;a$ باستعمال (C_g):

من المنحنى نجد:

$$g(-1)=-1;\ g(0)=-3$$
$$g(1)=-5;\ g'(1)=0;\ g'(-1)=0$$

عبارة الدالة g: $g(x)=ax^3+bx+c$

$$g(0)=-3$$
$$a(0)^3+b(0)+c=-3$$
$$c=-3$$

ولدينا:

$$g(-1)=-1$$
$$-a-b-3=-1$$
$$a+b=-2$$
$$g'(x)=3ax^2+b$$

لدينا $g'(-1)=0$

$$g'(-1)=3a(-1)^2+b=0$$
$$3a+b=0$$
$$b=-3a$$

ولدينا:

$$a+b=-2$$
$$a-3a=-2$$
$$\boldsymbol{a=1}$$
و
$$b=-3a$$
$$\boldsymbol{b=-3}$$

فتصبح عبارة الدالة: $g(x)=x^3-3x-3$

2- جدول التغيرات للدالة g

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

3- بيان أن المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in\left[2;\frac{5}{2}\right]$.

نلاحظ أن $x^3-3x-3=g(x)$

حل المعادلة يكافئ حل $g(x)=0$

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ومنه فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left[2;\frac{5}{2}\right]$

و
$$\begin{cases} g\left(\frac{5}{2}\right)=5.125 \\ g(2)=-1 \end{cases}$$

وبما أن $g(2)\times g\left(\frac{5}{2}\right)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: المعادلة تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[2;\frac{5}{2}\right]$ أي: $2\le\alpha\le 2.5$.

4- استنتاج اشارة $g(x)$ حسب قيم x:

من خلال التمثيل البياني للدالة g و $g(\alpha)=0$ إذن

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني:

1- التحقق أن: $f'(x)=\frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$ **حيث x من** $\mathbb{R}-\{-1;1\}$

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ لأنها عبارة عن قسمة كثيري حدود قابلين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام ينعدم عند القيمتين -1 و 1 ومنه دالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{6x^2(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{6x^4-6x^2-4x^4-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$$

2- تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$:

لدينا:
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$$

ولدينا أيضا:
$$f'(\alpha)=\frac{2\alpha.g(\alpha)}{(\alpha^2-1)^2}$$

و $g(\alpha)=0$ إذن $f'(\alpha)=0$

ومنه:
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيما مماسا أفقيا أي معامل توجيهه 0 عند النقطة $(\alpha,f(\alpha))$ حيث معادلته $y=f(\alpha)$

3- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

بنفس الطريقة $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

نشكل جدول إشارة للمقام للمساعدة:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\lim_{\substack{x\to-1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\<}}\frac{(2x^3+3)}{(x^2-1)}+1$$
$$=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{(2x^3+3)}{(x^2-1)}+1$$
$$=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

المنحنى (C_f) يقبل م.م عمودي معادلته $x=-1$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{(2x^3+3)}{(x^2-1)}+1=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{(2x^3+3)}{(x^2-1)}+1=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

المنحنى (C_f) يقبل م.م عمودي معادلته $x=1$

4- تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

$$f'(x) = \frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$$

لدينا: $(x^2-1)^2 > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

إذن إشارتها من إشارة البسط $2x.g(x)$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$ $+$	0 $-$	$\|\|$ $-$	0	$+$

اتجاه التغير: الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1[\cup]-1; 0] \cup [\alpha; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[0; 1[\cup]1; \alpha]$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|\|$ $+$	0 $-$	$\|\|$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty \nearrow$	-2 $\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty \searrow$	$f(\alpha)$ $\nearrow$	$+\infty$

5- بيان أن: $f(\alpha) = 3\alpha + 1$

لدينا المعادلة: $x^3 - 3x - 3 = 0$ تقبل α حلا لها أي:

$$\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0$$
$$\alpha^3 - 3\alpha = 3$$

نعوض في عبارة الدالة f:

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3+\alpha^3-3\alpha}{\alpha^2-1} + 1$$
$$f(\alpha) = \frac{3\alpha^3 - 3\alpha}{\alpha^2-1} + 1$$
$$= \frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{(\alpha^2-1)} + 1 = 3\alpha + 1$$

ومنه $f(\alpha) = 3\alpha + 1$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا:
$$2 \leq \alpha \leq 2.5$$
$$7 \leq 3\alpha + 1 \leq 8.5$$

ومنه $7 \leq f(\alpha) \leq 8.5$

6- بيان أن (Δ) م م مائل (C_f) عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

بما أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

نحسب $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = [f(x) - y]$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 + 3 - 2x^3 + 2x}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

دراسة الوضعية النسبية بين (Δ) و (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

$$f(x) - y = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

الوضعية

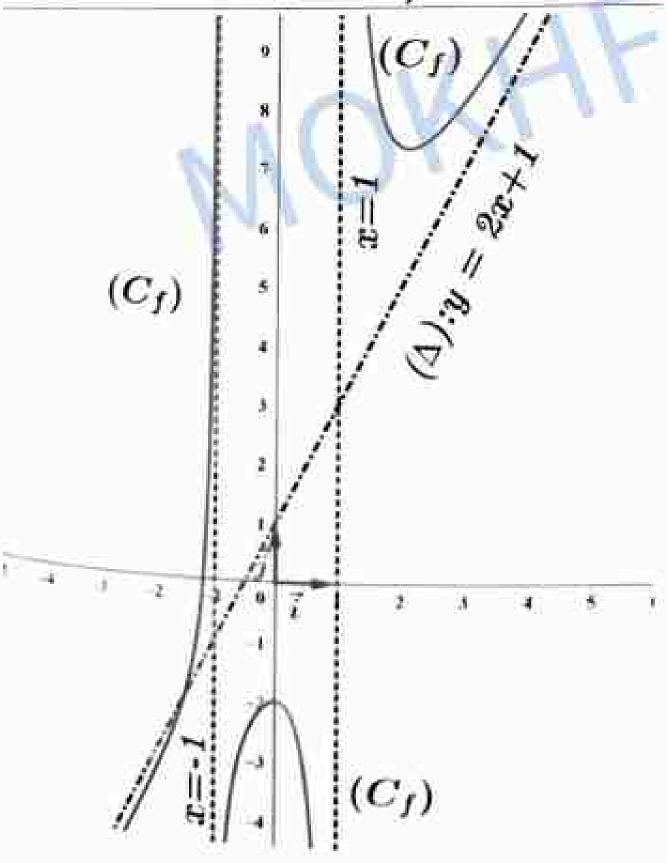
x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		1	$+\infty$
x^2-1	$+$		$+$	0 $-$		0	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$
الفرق	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]-\frac{3}{2}; -1[\cup]1; +\infty[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-1; 1[$

(C_f) يقطع (Δ) عند $x = -\frac{3}{2}$

7) رسم كل من (C_f) و (Δ)



14. المراجعة الشاملة في نهايات الدالة اللوغاريتمية

اليوتيوب: المراجعة النهائية في نهايات الدالة اللوغاريتمية

نتائج:

$$\frac{0}{\infty}=0 \ ، \ \frac{\text{عدد}}{0}=\infty \ ، \ \frac{\text{عدد}}{\infty}=0$$

$$، \ -\infty-\infty=-\infty \ ، \ \frac{\infty}{0}=\infty$$

$$(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

$$\text{عدد}+\infty=+\infty \ ، \ (-\infty)(-\infty)=+\infty$$

$$\text{عدد}\times(\infty)=\infty \ ، \ \text{عدد}-\infty=-\infty$$

$$\frac{0}{\text{عدد}}=0 \ ، \ +\infty+\infty=+\infty$$

حالات عدم التعيين:

$$\frac{0}{0} \ ، \ 0(\infty) \ ، \ \frac{\infty}{\infty} \ ، \ +\infty-\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[\ln x]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[\ln x]=+\infty$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[x^n\ln x]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x^n}\right]=0 \quad : \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=1 \quad : \quad n\in\mathbb{N}$$

الأسئلة

(1 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}[x-\ln x]$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-\ln x]$

(3 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}[x-x^2\ln x]$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln x]$

(5 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}[x^2-(x-1)\ln(x-1)]$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2-(x-1)\ln(x-1)]$

(7 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\frac{1}{x}+(\ln x)^2-\ln(x)+1\right]$

(8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln(x)+1\right]$

(09 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right]$

(10 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right]$

(11 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]$

(12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]$

(13 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\left[x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]$

(14 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}\right]$

(15 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

(16 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

(17 $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -2}}\left[-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

(18 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[-x+\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

(19 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

(20 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

(21 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

(22 $\lim\limits_{x\to -2}\left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

(23 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\frac{e\ln x}{x+1}\right]$

(24 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e\ln x}{x+1}\right]$

(25 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right]$

(26 $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 1}}\left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right]$

(27 $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}}\left[\frac{2x+4}{x+1}+\ln(x+1)\right]$

(28 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+4}{x+1}+\ln(x+1)\right]$

(29 $\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]$

(30 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]$

(31 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]$

(32 $\lim\limits_{x\to 1}\left[x-\frac{1}{\ln x}\right]$

(33 $\lim\limits_{x\to 1}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]$

(34 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]$

(35 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right]$

(36 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x^2}{\ln(x+1)}\right]$

(37 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[1 - \dfrac{1}{x \ln x}\right]$

(38 $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left[1 - \dfrac{1}{x \ln x}\right]$

(39 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left[1 - \dfrac{1}{x \ln x}\right]$

(40 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[1 - \dfrac{1}{x \ln x}\right]$

(41 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\dfrac{x+1}{x - x \ln x}\right]$

(42 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x+1}{x - x \ln x}\right]$

(43 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}\right]$

(44 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}\right]$

(45 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[x \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]$

(46 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)\right]$

(47 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\dfrac{(\ln x)^n}{x}\right] \quad : \quad n \in \mathbb{N}$

(48 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{(\ln x)^n}{x}\right]$

(49 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x^2 - kx \ln x] \quad : \quad k \in \mathbb{R}^*$

(50 $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^2 - kx \ln x]$

الحل

(1 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x - \ln x]$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} [x - \ln x] = 0 - \ln 0^+ = +\infty$$

(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - \ln x]$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right] = +\infty$$

(3 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x - x^2 \ln x]$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} [x - x^2 \ln x] = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [x^2 \ln x] = 0$

(4 $\lim\limits_{x \to +\infty} [x - x^2 \ln x]$

ط1 :

$$\lim_{x \to +\infty} [x - x^2 \ln x] = \lim_{x \to +\infty} [x(1 - x \ln x)]$$
$$= -\infty$$

ط2:

$$\lim_{x \to +\infty} [x - x^2 \ln x] = \lim_{x \to +\infty} \left[x^2\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)\right]$$
$$= -\infty$$

(5 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} [x^2 - (x-1)\ln(x-1)]$

نضع $t = x - 1$ أي $t + 1 = x$

فيكون $x \overset{>}{\to} 1$ أي $t \overset{>}{\to} 0$

$$= \lim_{t \overset{>}{\to} 0} [(t+1)^2 - t \ln t]$$
$$= 1$$

(6 $\lim\limits_{x \to +\infty} [x^2 - (x-1)\ln(x-1)]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[(x-1)^2\left(\frac{x^2}{(x-1)^2} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}\right)\right]$$

بوضع $x - 1 = t$ أي $x = t + 1$

أي $t \to +\infty$

إذن:

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t^2\left(\frac{(t+1)^2}{t^2} - \frac{\ln t}{t}\right)\right]$$

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t^2\left(\frac{(t^2 + 2t + 1)}{t^2} - \frac{\ln t}{t}\right)\right] = +\infty$$

لأن: $\lim\limits_{t \to +\infty} \left[\dfrac{(t^2+2t+1)}{t^2}\right] = \lim\limits_{t \to +\infty} \left[\dfrac{t^2}{t^2}\right] = 1$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\ln t}{t}\right] = 0$

(7 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{1}{x} + (\ln x)^2 - \ln(x) - 1\right]$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1\right] = +\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [(\ln x)^2] = (-\infty)^2 = +\infty$

(8 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} + (\ln x)^2 - \ln(x) - 1\right]$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln(x) - 1\right] = -\infty$$

(9 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right]$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right] = -\infty$$

(10 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right]$

ط1:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)}\right]$$
$$= 0$$

ط2:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{\ln x}\left(\frac{\frac{1}{\ln x}+1}{\frac{1}{\ln x}+x}\right)\right]$$
$$= 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

(11 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]$

نضع $t = x + 1$

$x \overset{>}{\to} -1$

ومنه $t \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{e}{t} + \frac{\ln(t)}{(t)^2}\right] = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{et + \ln t}{t^2}\right] = -\infty$$

(12 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]$

بوضع $t = x + 1$

$x \to +\infty$

$t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \left[\frac{e}{t} + \frac{\ln(t)}{(t)^2}\right] = 0$$

لأن $\lim\limits_{t \to +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{(t)^2}\right] = 0$

(13 $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}\right]$

نضع $t = x + 1$

$x = t - 1$

$x \overset{>}{\to} -1$

$t \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} \left[x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \left[t - 1 - \frac{1 - 2\ln t}{t}\right] = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{t \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{\ln t}{t}\right] = -\infty$

(14 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}\right]$

نضع $t = x + 1$

$x = t - 1$

$x \to +\infty$

$t \to +\infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t - 1 - \frac{1 - 2\ln t}{t}\right]$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \left[t - 1 - \frac{1}{t} + \frac{2\ln t}{t}\right]$$
$$= +\infty$$

(15 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \left[-x + \ln\left(\frac{x}{x}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

(16 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-x + \ln\left(\frac{x}{x}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

(17 $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

$$\lim_{x \to -2} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right] = 2 + \ln\left(\frac{-2-1}{0^-}\right)$$
$$= 2\ln\left(-\frac{3}{0^-}\right) = \ln(+\infty)$$
$$= +\infty$$

18) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right]$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left[-x + \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\right] = -1 + \ln\left(\frac{0^+}{3}\right)$$
$$= -\infty$$

19) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

$$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\ln\left|\frac{x}{x}\right|\right] = \ln(1)$$
$$= 0$$

20) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln\left|\frac{x}{x}\right|\right] = \ln(1)$$
$$= 0$$

21) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

- $$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right] = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left[\ln\left|\frac{0^-}{3}\right|\right]$$
$$= \ln|0^-|$$
$$= \ln(0^+)$$
$$= -\infty$$

- $$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right] = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \left[\ln\left|\frac{0^+}{3}\right|\right]$$
$$= \ln|0^+|$$
$$= \ln(0^+)$$
$$= -\infty$$

22) $\lim\limits_{x \to -2} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right]$

- $$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right] = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} \left[\ln\left|\frac{-3}{0^-}\right|\right]$$
$$= \ln|+\infty| = +\infty$$

- $$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \left[\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right] = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \left[\ln\left|\frac{-3}{0^+}\right|\right]$$
$$= \ln|-\infty| = +\infty$$

23) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{e\ln x}{x+1}\right]$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{e\ln x}{x+1}\right] = -\infty$$

24) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e\ln x}{x+1}\right]$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e\ln x}{x+1}\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{x}\left(\frac{\frac{e\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)\right] = \frac{0}{1}$$
$$= 0$$

لأن $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0}$

25) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right]$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right] = \frac{-\infty}{-1}$$
$$= +\infty$$

26) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right]$

$$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right] = \frac{1-2(1)}{0^-} = -\frac{1}{0^-}$$
$$= +\infty$$

27) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[\frac{2x+4}{x+1} + \ln(x+1)\right]$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[\frac{2x+4}{x+1} + \ln(x+1)\right]$$
$$= \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[\frac{2x+4+(x+1)\ln(x+1)}{x+1}\right]$$

نضع $t = x+1$

$$x \overset{>}{\to} -1$$
$$t \overset{>}{\to} 0$$

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} [(x+1)\ln(x+1)] = \lim\limits_{t \overset{>}{\to} 0} [t\ln t]$$
$$= 0$$

ومنه

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \left[\frac{2x+4}{x+1} + \ln(x+1)\right] = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

28) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x+4}{x+1} + \ln(x+1)\right]$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x}{x}\right] + \ln(x+1) = +\infty$$

29) $\lim\limits_{x \to 0} \left[2 - \frac{\ln x^2}{x}\right]$

-

$$\lim_{\substack{x\to 0\\<}}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]=2-\frac{\ln(0^-)^2}{0^-}$$
$$=-\infty$$

▪

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]=2-\frac{\ln(0^+)^2}{0^+}=2-\frac{-\infty}{0^+}$$
$$=+\infty$$

(30 $\lim_{x\to-\infty}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[2-\frac{2\ln|x|}{x}\right]$$
$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[2-\frac{2\ln(-x)}{x}\right]$$
$$t=-x$$
$$x=-t$$
$$x\to-\infty$$
$$t\to+\infty$$
$$\lim_{t\to+\infty}\left[2-\frac{2\ln t}{-t}\right]=2$$

(31 $\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{\ln x^2}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{2\ln|x|}{x}\right]$$
$$|x|=x\quad:\quad x\geq 0$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[2-\frac{2\ln x}{x}]=2$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right]=0$

(32 $\lim_{x\to 1}\left[x-\frac{1}{\ln x}\right]$

▪ $\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left[x-\frac{1}{\ln x}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left[x-\frac{1}{\ln x}\right]=1-\frac{1}{0^-}=+\infty$$

▪ $\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\left[x-\frac{1}{\ln x}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\left[x-\frac{1}{\ln x}\right]=1-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

(33 $\lim_{x\to 1}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]$

▪ $\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\<}}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]=2-\frac{1}{0^-}=+\infty$$

▪ $\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]=2-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

(34 $\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{x^2}{\ln x}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{x\times x}{\ln x}\right]$$

بوضع $t=\ln x$

$$e^t=e^{\ln x}$$
$$e^t=x$$
$$x\to+\infty$$
$$t\to+\infty$$

نعلم أن $\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^t}{t^n}\right]=+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[2-\frac{e^t\times e^t}{t}\right]=-\infty$$

(35 $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\times x}{\ln(x+1)}\right]$$

نعلم أن $\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(x+1)]}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\left[x\times\frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}}\right]=0(1)=0$$

(36 $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right]$

نضع $t=\ln(x+1)$

$$e^t=e^{\ln(x+1)}$$
$$e^t=x+1$$
$$x=e^t-1$$
$$x\to+\infty$$
$$t\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{(e^t-1)^2}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^{2t}}{t}-\frac{2e^t}{t}+\frac{1}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{e^t}{t}(e^t-2)+\frac{1}{t}\right]$$

نعلم أن $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\frac{e^t}{t^n}\right]=+\infty$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{\ln(x+1)}\right]=+\infty$$

(37 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]=1-\frac{1}{0^-}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}[x\ln x]=0$

(38 $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]=1-\frac{1}{0^-}=+\infty$$

(39 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]=1-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

(40 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{x\ln x}\right]=1-\frac{1}{+\infty}=1$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln x]=+\infty$

(41 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{x+1}{x-x\ln x}\right]$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{x+1}{x-x\ln x}\right]=\frac{0+1}{0-(0)}=\frac{1}{0^+}$$
$$=+\infty$$

(42 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x-\ln x}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{x-\ln x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{\ln x}{x}}\right)\right]$$
$$=1$$

(43 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln\left(x^2\left[1+\frac{1}{x^2}\right]\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\ln x^2}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$$
$$=0$$

(44 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(x^2\left[1+\frac{1}{x^2}\right]\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x^2}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln|x|}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right]$$
$$=0$$

(45 $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[x\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

نضع

$$x=\frac{1}{t}\ \Leftarrow\ t=\frac{1}{x}$$
$$t\to+\infty \qquad x\overset{>}{\to}0$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{t}\ln(1+t)\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln\left(t\left[\frac{1}{t}+1\right]\right)}{t}\right]$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{\ln t}{t}+\frac{\ln\left(\frac{1}{t}+1\right)}{t}\right]=0$$

46) $\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

نضع $t=\frac{1}{x}$

$$x=\frac{1}{t}$$
$$x\to+\infty$$
$$t\to 0$$
$$=\lim_{t\to0}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}\right]=1$$

47) $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[\frac{(\ln x)^n}{x}\right]$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}[(\ln x)^n]=(-\infty)^n$$

إذا كان n عدد زوجي

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}[(\ln x)^n]=+\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[\frac{(\ln x)^n}{x}\right]=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$$

إذا كان n عدد فردي

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[\frac{(\ln x)^n}{x}\right]=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

48) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^n}{x}\right]$

نضع $t=\ln x$ أي $e^t=e^{\ln x}$ أي $x=e^t$

$$x\to+\infty$$
$$t\to+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^n}{x}\right]=\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{e^t}\right]=0$$

49) $\lim_{\substack{x\to0\\>}}[x^2-kx\ln x]$ مع $k\in\mathbb{R}^*$

نعلم أن $\lim_{\substack{x\to0\\>}}[x\ln x]=0$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}[x^2-kx\ln x]=0$$

50) $\lim_{x\to+\infty}[x^2-kx\ln x]$

إذا كان $k<0$:

$$\lim_{x\to+\infty}[-kx\ln x]=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}[x^2-kx\ln x]=+\infty$$

- إذا كان $k>0$:

$$\lim_{x\to+\infty}[-kx\ln x]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x^2-kx\ln x]=\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(1-\frac{k\ln x}{x}\right)\right]=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{k\ln x}{x}\right|=0$

15. الدالّة اللوغاريتمية الشاملة الكبرى

الموضوع: الدالة اللوغاريتمية الشاملة

I) g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $g(x)=x^2+a+b\ln(x)$ ، a و b عددان من $\mathbb{R}$.

1- عين a و b علما أن المنحنى (C_g) منحنى الدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4

2- نضع $a=-2$ و $b=2$

* ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- برهن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α يحقق المعادلة $g(x)=0$ على المجال $]0;+\infty[$ ثم تأكد أن $1.2<\alpha<1.3$

5- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

6- باستعمال جواب السؤال -5- استنتج انه من اجل كل $x>\alpha$ فإن $\ln(x)>1-\frac{x^2}{2}$ ثم من أجل كل $x\leq\alpha$ فإن $x^2\leq e^{2-x^2}$

7- اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_g) عند $A(1;-1)$.

8- h دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة:

$$h(x)=x^2-4x+3+2\ln(x)$$

* ادرس اتجاه تغير الدالة h واحسب $h(1)$ ثم أعط إشارة $h(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

9- استنتج وضعية (C_g) بالنسبة إلى (T).

10- بين أن $\ln(\alpha)=\frac{2-\alpha^2}{2}$

II) f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-2-\frac{2\ln(x)}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب $\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ (وحدة الطول $2cm$).

2- تحقق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- استنتج أنه إذا كان $2020<2021$ فإن $f(2021)>f(2020)$.

4- بين أن $f(\alpha)=2\alpha-2-\frac{2}{\alpha}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5- دون حساب ، عين $\lim_{h\to0}\left(\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\right)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

6- احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ،يطلب تعيين معادلة له، ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

7- بين ان (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي المستقيم ذو المعادلة $2-x+y=0$ ثم جد معادلة له.

8- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما β و α ثم تحقق أن $0.6<\beta<0.7$ ، $2.7<\alpha<2.8$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$.

9- ارسم (Δ) و (T') ثم (C_f) .

10- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلات التالية:

أ- $-\frac{2\ln(x)}{x}-|m|=-x+1$ ،

ب- $f(x)=f(m)$ مع $m>0$.

ج- $(m+2)x+2\ln(x)=0$

III) لتكن الدوال التالية k_1 ، k_2 ، k_3 حيث $k_1(x)=-f(|x|)$ ، $k_2(x)=|f(-x)|$ ، $k_3=|f(|x|)|$

$D_{k_1}=D_{k_3}=\mathbb{R}^*$ ، $D_{k_2}=\mathbb{R}^*_-$

(C_{k_1}) ، (C_{k_2}) و (C_{k_3}) منحنيات الدوال السابقة.

* اشرح كيف يتم رسم المنحنيات (C_{k_1})، (C_{k_2}) و (C_{k_3}) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_{k_2}) ثم ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $k_3(x)=\ln(m)$ مع $m>0$.

IV) 1- φ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $\varphi(x)=[f(x)]^2$

* ادرس تغيرات الدالة φ وشكل جدول تغيراتها.

2- t دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $t(x)=f(x^2)$ ، (C_t) منحنى الدالة t .

أ- ادرس تغيرات الدالة t ثم شكل جدول تغيراتها

ب* (Γ) منحنى الدالة $x\longmapsto(x^2-2)$ احسب $\lim_{x\to+\infty}[t(x)-x^2+2]$ وفسر النتيجة بيانيا ، ادرس وضعية (C_t) بالنسبة لـ (Γ)

ج- ارسم المنحنى (Γ) ثم (C_t) في معلم جديد متعامد ومتجانس.

3- f_n دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-2-\frac{2(\ln x)^n}{x}$ ، (C_n) منحنيات f_n .

- بين أن جميع المنحنيات (C_n) تتقاطع في نقطتين يطلب تعيين احداثياتهما.

الحل

I) - تعيين a و b علما أن المنحنى (C_f) يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4 :

لدينا :

$$\begin{cases} g(1)=-1 \\ \text{و} \\ g'(1)=4 \end{cases}$$

وعبارة الدالة g :

$$g(x)=x^2+a+b\ln(x)$$

أي أن : $g(1)=1+a+b\ln 1=-1$

$$1+a+b(0)=-1$$

ومنه $a=-2$

وعبارة المشتقة g' هي :

$$g'(x)=2x+\frac{b}{x}$$

$$g'(1)=2(1)+\frac{b}{1}=4$$

$$2+b=4$$

ومنه $b=2$

ومنه عبارة الدالة g :

$$g(x)=x^2-2+2\ln(x)$$

2-دراسة تغيرات الدالة g:

النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} g(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}[x^2-2+2\ln(x)]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}[x^2-2+2\ln(x)]=+\infty$$

المشتقة :

الدالة g قابل للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة: $g'(x)=2x+\frac{2}{x}$

بما أن $0<x$ فإن $\frac{2}{x}>0$

ومنه $g'(x)>0$ وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3-البرهان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف :

حتى يقبل (C_g) نقطة إنعطاف معناه :
المشتقة الثانية تنعدم وتغير من اشارتها

$$g''(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة $g''(x)$ من إشارة $2x^2 - 2$ لان $x^2 > 0$

$$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 2$$
$$\Rightarrow x^2 = 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \text{ مرفوض} \end{cases}$$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$g''(x)$	$\|$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف إحداثياتها :

$$(1, g(1)) = (1, -1)$$

4-البرهان أنه يوجد عدد حقيقي α يحقق المعادلة $g(x) = 0$ على المجال $]0; +\infty[$

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$

أي أن : $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right) \times \left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $\alpha \in]0; +\infty[$

التحقق أن $1,2 < \alpha < 1,3$

بما أن : $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0; +\infty[$ و $g(1,2) = -0,195$

$$g(1,3) = 0,214$$
$$0 \in]-0,195; 0,214[$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

5-إستنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

x	0 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$\|$ $\qquad$ $-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

6-إستنتاج أن:

- من أجل كل $x > \alpha$ فإن $\ln(x) > 1 - \frac{x^2}{2}$

- من أجل $x \leq \alpha$ فإن $x^2 \leq e^{2-x^2}$

من أجل كل $x > 0$ فإن : $\ln x > 1 - \frac{x^2}{2}$

لدينا من اشارة $g(x)$:

لما $x > \alpha$ فإن $g(x) > 0$

$$x^2 - 2 + \ln x > 0$$
$$2\ln x > 2 - x^2$$
$$\ln x > \frac{2 - x^2}{2}$$

ومنه $\ln x > 1 - \frac{x^2}{2}$

لما $x \leq \alpha$ فإن :

$$g(x) \leq 0$$
$$x^2 - 2 + \ln x \leq 0$$
$$2\ln x \leq 2 - x^2$$
$$\ln x^2 \leq 2 - x^2$$

ومنه $x^2 \leq e^{2-x^2}$

7-كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_g) عند النقطة $A(1; -1)$

معادلة المماس الديكارتية :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$y = 4(x-1) - 1$$

ومنه $y = 4x - 5$

8-دراسة اتجاه تغير الدالة h :

عبارة الدالة h :

$$h(x) = x^2 - 4x + 3 + 2\ln x$$

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة

$$h'(x) = 2x - 4 + \frac{2}{x}$$
$$h'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2}{x}$$

إشارة h' من إشارة $2x^2 - 4x + 2$ لأن $x > 0$

ومنه $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(2)(2) = 0$$

للمعادلة حل وحيد مضاعف

$$x_0 = \frac{4}{4} = 1$$

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$h'(x)$	$\|$ $\qquad$ $+$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

- حساب $h(1)$:

$h(1) = 1^2 - 4(1) + 3 + 2\ln 1 = 0$

بما أن h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ وتنعدم عند 1 فإن إشارة $h(x)$ ممثلة في الجدول التالي :

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	‖	$+$	0	$+$	

9-استنتاج وضعية (C_g) بالنسبة لـ (T)

إشارة الفرق :

$g(x) - y = x^2 - 2 + 2\ln x - (4x - 5)$

$g(x) - y = x^2 + 3 + 2\ln x - 4x = h(x)$

ومنه منحنى (C_g) يقع فوق (T) على المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$

منحنى (C_g) يمس (T) في النقطة ذات الفاصلة 1

10-البرهان أن : $\ln a = \frac{2-a^2}{2}$

لدينا : $g(a) = a^2 - 2 + 2\ln a = 0$

$2\ln a = 2 - a^2$

ومنه $\ln a = \frac{2-a^2}{2}$

II) 1-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(x - 2 - \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$$

لأن $\left(\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{\ln x}{x} = -\infty\right)$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب عمودي له

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 2 - \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$$

لأن : $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$

2-التحقق أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

لدينا : $\forall x \in D_f : f'(x) = 1 - \frac{\frac{2}{x}x - 2\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 1 - \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x^2 > 0$

ومنه :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$

جدول التغيرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3-استنتاج أنه إذا كان $2021 > 2020$ فإن $f(2021) > f(2020)$

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ و $2021 > 2020$

فإن $f(2021) > f(2020)$

4-البرهان أن: $f(\alpha) = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$

لدينا $f(\alpha) = \alpha - 2 - \frac{2\ln\alpha}{\alpha}$

ولدينا من السؤال -10-

$$\ln\alpha = \frac{2-\alpha^2}{2}$$

أي أن : $f(\alpha) = \alpha - 2 + 2\frac{\frac{2-\alpha^2}{2}}{\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha - 2 - \frac{2-\alpha^2}{\alpha}$

$f(\alpha) = \alpha - 2 - \frac{2}{\alpha} - \alpha$

ومنه $f(\alpha) = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

$2{,}4 < 2\alpha < 2{,}6$

ومنه $0{,}4 < 2\alpha - 2 < 0{,}6$ ..... (1)

لدينا : $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

$\frac{1}{1{,}3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1{,}2}$

$-\frac{2}{1{,}2} < -\frac{2}{\alpha} < -\frac{2}{1{,}3}$

ومنه $-1{,}66 < -\frac{2}{\alpha} < -1{,}53$ .....(2)

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد :

$-1{,}26 < 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha} < -0{,}93$

$-1{,}26 < f(\alpha) < -0{,}93$

5-تعيين دون حساب $\lim\limits_{h\to0}\left[\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}\right]$

نعلم أن :

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=f'(\alpha)$$

ولدينا $f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{\alpha^2}$

ومنه $f'(\alpha)=\frac{0}{\alpha^2}=0$

التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيما مماسا أفقيا أي معامل توجيهه 0 عند النقطة $(\alpha;f(\alpha))$ حيث

$$y=f(\alpha)$$

6-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2-\frac{2\ln x}{x}-x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-2-\frac{2\ln x}{x}\right)=-2$$

استنتاج مستقيم مقارب مائل :

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-2$$

أي أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=0$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته من الشكل $y=x-2$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا : $f(x)-y=-\frac{2\ln x}{x}$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $-2\ln x$ لأن $x>0$

$$-2\ln x=0$$
$$\ln x=0$$
$$x=e^0=1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	‖ +	0	−
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

7-البرهان أن (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي المستقيم ذو المعادلة $2-x+y=0$

أي يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=x-2$

معناه : $f'(x_0)=1$

$$\frac{g(x_0)}{x_0^2}=1$$
$$x_0^2-2+2\ln x_0={x_0}^2$$
$$2\ln x_0=2$$
$$\ln x_0=1$$

ومنه $x_0=e^1$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T') يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=e$

معادلته من الشكل :

$$y=f'(e)(x-e)+f(e)$$
$$y=x-e+e-2-\frac{2}{e}$$
$$(T):\ y=x-2-\frac{2}{e}$$

8-البرهان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين $0,6<\beta<0,7$ و $2,7<\gamma<2,8$

معناه حل المعادلة $f(x)=0$

لدينا الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0,6;0,7[$

و $\begin{cases}f(0,6)=0,30\\f(0,7)=-0,28\end{cases}$

أي أن : $f(0,6)\times f(0,7)<0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ حل وحيد β حيث $0,6<\beta<0,7$

ولدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2,7;2,8[$ و $f(2,7)=-0,035$

$$f(2,8)=0,064$$

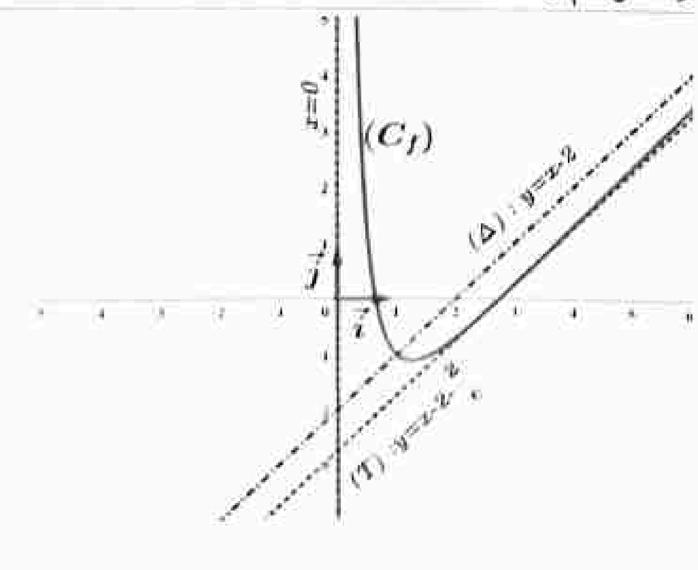
أي أن : $f(2,7)\times f(2,8)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد γ على المجال $]2,7;2,8[$

إشارة $f(x)$:

x	0	β		γ	$+\infty$
$f(x)$	‖ +	0	−	0	+

9- الرسم :



10 – المناقشة البيانية :

10-أ- $-\frac{2\ln x}{x} - |m| = -x + 1$

$$x - 1 - \frac{2\ln x}{x} = |m|$$

$$x - 2 - \frac{2\ln x}{x} = |m| - 1$$

ومنه $f(x) = |m| - 1$

مناقشة أفقية

$$|m| - 1 \in]f(\alpha); +\infty[$$

أي أن :

$$|m| \in]f(\alpha) + 1; +\infty[$$

$$|m| > f(\alpha) + 1$$

ومنه $|m| \geq 0$

$$m \in \mathbb{R}$$

يوجد حلان موجبان

10-ب - $f(x) = f(m)$ مع $m > 0$

لما $f(m) = f(\alpha) \Rightarrow m = \alpha$

يوجد حل وحيد

لما $f(m) \in]0; +\infty[$

فان : $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$

يوجد حلان

10-جـ $(m+2)x + 2\ln x = 0$

$$m + 2 = -\frac{2\ln x}{x}$$

$$m = -2 - \frac{2\ln x}{x}$$

$$x + m = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$$

ومنه $f(x) = x + m$

مناقشة مائلة :

لما $m \in]-\infty; -2 - \frac{2}{e}[$ لا يوجد حلول

لما $m = -2 - \frac{2}{e}$ يوجد حل وحيد

لما $m \in]-2 - \frac{2}{e}; -2[$ للمعادلة حلان

لما $m = -2$ يوجد حل وحيد

لما $m \in]-2; +\infty[$ يوجد حل وحيد

III- شرح كيف يتم رسم المنحنيات

لدينا : $K_1(x) = -f(|x|)$

نضع : $g_1(x) = f(|x|)$

أي أن $k_1(x) = -g_1(x)$

لما $x \geq 0$ فان منحنى (C_{g_1}) ينطبق على المنحنى (C_f) وبما ان g_1 دالة زوجية فان منحناها يتناظر بالنسبة لمحور التراتيب وبالتالي منحنى الدالة k_1 هو تناظر منحنى الدالة g_1 بالنسبة لمحور الفواصل

$$K_2(x) = |f(-x)|$$

نضع $g_2(x) = f(-x)$

$$K_2(x) = |g_2(x)|$$

منحنى (C_{g_2}) هو تناظر منحنى الدالة f (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب وبالتالي منحنى الدالة K_2 يتطابق مع منحنى الدالة g_2 في المجال :

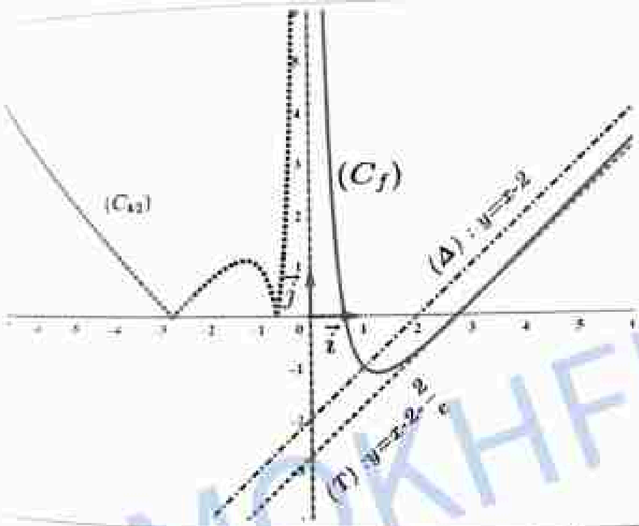
$$]-\infty; -\beta] \cup [-\gamma; 0[\cup]0; \gamma] \cup [\beta; +\infty[$$

ويتناظر مع منحنى الدالة g_2 بالنسبة لمحور الفواصل في المجال $[-\beta; -\gamma] \cup [\gamma; \beta]$

$$K_3(x) = |f(|x|)|$$

منحنى الدالة K_3 ينطبق كليا على المنحنى K_2

رسم (C_{k_2})



المناقشة البيانية :

$$K_2(x) = \ln(m) \quad , \quad m > 0$$

مناقشة أفقية :

لما $m \in]0; 1[$ أي $\ln(m) \in]-\infty; 0[$ لا يوجد حلول

لما $m = 1$ أي أن $\ln(m) = 0$ يوجد 04 حلول

لما $m \in]1; e^{f(\alpha)}[$ أي أن $\ln(m) \in]0; -f(\alpha)[$ يوجد 08 حلول

لما $m = e^{-f(\alpha)}$ أي أن $\ln(m) = -f(\alpha)$ يوجد 6 حلول

لما $m > e^{f(\alpha)}$ أي أن $\ln(m) \in]-f(\alpha); +\infty[$ يوجد 04 حلول

IV-1- دراسة تغيرات الدالة φ

$$\varphi(x) = (f(x))^2$$

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة

$$\varphi'(x) = 2 \times f'(x) \times f(x)$$

ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $f'(x)\times f(x)$

ومنه :

x	0		γ		α		β		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه الدالة φ متناقصة تماما على المجال $]0;\gamma]\cup[\alpha;\beta]$

الدالة φ متزايدة تماما على المجال $[\gamma;\alpha]\cup[\beta;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	0		γ		α		β		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$(f(\alpha))^2$	↘	0	↗	$+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\varphi=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(f(x)\right)^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^2=+\infty$$

2-أ-دراسة تغيرات الدالة t

$$t(x)=f(x^2)$$

المشتقة :

الدالة t قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة

$$t'(x)=2xf'(x^2)$$

إشارة : $f'(x^2)$

لما $f'(x^2)\le 0$ فإن : $0<x^2<\alpha$

أي أن
$$\begin{cases}x\neq 0\\ \text{و}\\ x^2\le\alpha\end{cases}\Rightarrow x\in[-\sqrt{\alpha};0[\cup]0;\sqrt{\alpha}]$$

لما $f'(x^2)\ge 0$; $x^2\ge\alpha$

أي أن $x\in]-\infty;-\sqrt{\alpha}\,]\cup[\sqrt{\alpha}\,;+\infty[$

جدول إشارة $t'(x)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x^2)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$t'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة t متزايدة تماما على المجال $[-\sqrt{\alpha};0[\cup[\sqrt{\alpha};+\infty[$ الدالة t متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-\sqrt{\alpha}]\cup]0;\sqrt{\alpha}]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$t(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}t(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x^2)$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}t(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x^2)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}t(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x^2)=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}x^2=0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=+\infty\end{cases}$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}t(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x^2)=+\infty$$

ب-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[t(x)-x^2+2\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[t(x)-x^2+2\right]=\lim_{x\to+\infty}-\frac{2\ln x^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4\ln x}{x^2}=0$$

التفسير الهندسي :

المنحنى (C_t) يقبل المنحنى (T) كمقارب له

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_t) بالنسبة لـ (T)

دراسة إشارة الفرق :

$$t(x)-x^2+2=-\frac{2\ln x^2}{x^2}$$

لأن $x^2>0$

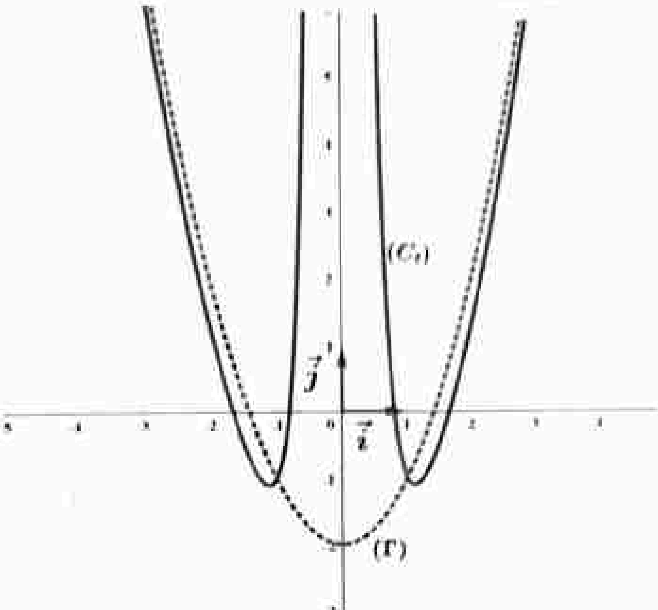
$$-2\ln x^2=0$$

$$\ln x^2=0\Rightarrow x^2=e^0=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ \text{أو}\\ x=1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$t(x)-T$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_t) تحت (T)	(C_t) يقطع (T)	(C_t) فوق (T)	‖	(C_t) فوق (T)	(C_t) يقطع (T)	(C_t) تحت (T)	

جـ رسم (Γ) و المنحنى (C_1) :



المنحنى (T) هو انسحاب بسيط لمنحنى الدالة مربع شعاعه $\vec{u}\binom{0}{-2}$

3- البرهان أن جميع المنحنيات (C_n) تتقاطع في نقطتين :

جميع المنحنيات (C_n) تتقاطع في نقطتين معناه :

$$f_{n+1}(x) = f_n(x)$$

$$x - 2 - \frac{2(\ln x)^{n+1}}{x} = x - 2 - \frac{2(\ln x)^n}{x}$$

$$\frac{2(\ln x)^{n+1} - 2(\ln x)^n}{x} = 0$$

$$2(\ln x)^n[\ln x - 1] = 0$$

اما $\ln x - 1 = 0$ أو $(\ln x)^n = 0$

$\ln x = 1$ أو $\ln x = 0$

$x = e$ أو $x = 1$

ومنه

$$(C_{n+1}) \cap (C_n) = \left\{(1; -1); \left(e; \frac{e^2-2e-2}{e}\right)\right\}$$

ملاحظة : منحنى الدالة K_2 يقطع محور الفواصل في اربع نقط فواصلها هي : $x_1 = \sqrt{\gamma}$ ، $x_2 = \sqrt{\beta}$ ، $x_4 = -\sqrt{\beta}$ ، $x_3 = -\sqrt{\gamma}$

16. المراجعة الشاملة في نهايات الدالة الأسية

اليوتيوب: المراجعة النهائية في نهايات الدالة الأسية

نهايات شهيرة:

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{nx}-1}{x} = n$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

نتائج:

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$(-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$\text{عدد} + \infty = +\infty$$

$$\text{عدد} - \infty = -\infty$$

$$\text{عدد} \times \infty = \infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$\frac{0}{\text{[illegible]}} = 0$$

...

حالات عدم التعيين:

$\frac{0}{0}$ ، $0(\infty)$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $+\infty - \infty$

تطبيق النهايات الشهيرة:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad ; \quad e^{-\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad e^{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$$

ومقلوبها: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{nx}-1}{x}=n$$

(باستعمال العدد المشتق)

مثال 01: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

مثال 02: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=3$

الأسئلة

1) $\lim_{x\to-\infty}[x+e^x]$

2) $\lim_{x\to+\infty} x+e^x$

3) $\lim_{x\to-\infty} x-e-xe^x$

4) $\lim_{x\to-\infty} e^x-ex^2$

5) $\lim_{x\to+\infty} e^x-ex^2$

6) $\lim_{x\to-\infty} 2+(x-1)e^{-x}$

7) $\lim_{x\to+\infty} 2+(x-1)^2e^{-x}$

8) $\lim_{x\to-\infty} 2-x^2e^{1-x}$

9) $\lim_{x\to+\infty} 2-x^2e^{1-x}$

10) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}-2-\frac{e}{x}$

11) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}-2-\frac{e}{x}$

12) $\lim_{x\to 0} e^{-x}-2+\frac{e}{x}$

13) $\lim_{x\to-\infty} 1+(x^2-x+1)e^{-x}$

14) $\lim_{x\to+\infty} 1+(x^2-x+1)e^{-x}$

15) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}$

16) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}$

17) $\lim_{x\to-\infty} xe^{2x+2}-x^2+1$

18) $\lim_{x\to+\infty} xe^{2x+2}-x^2+1$

19) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$

20) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$

21) $\lim_{x\to 0} x-\frac{1}{e^x-1}$

22) $\lim_{x\to-\infty} x-\frac{x}{e^x-1}$

23) $\lim_{x\to-\infty}(x+1)(e^x-1)$

24) $\lim_{x\to+\infty}(x+1)(e^x-1)$

25) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x+1}e^{-x}$

26) $\lim_{x\to-1}\frac{x}{x+1}e^{-x}$

27) $\lim_{x\to 1}\frac{-x^2e^{-x}}{(x-1)^2}$

28) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2e^{-x}}{(x-1)^2}$

29) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$

30) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{2x}$

31) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}$

32) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}$

33) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}-1}$

34) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}$

35) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x}$

36) $\lim_{x\to\ln 2} x+\frac{4}{e^x-2}$

37) $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{4}{e^x-2}$

38) $\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}$

39) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}$

40) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}$

41) $\lim_{\substack{<\\x\to 0}}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]$

42) $\lim_{\substack{>\\x\to 0}}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]$

43) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]$

44) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}$

45) $\lim_{\substack{<\\x\to 0}}-\frac{1}{x}-1+e^{\frac{1}{x}}$

46) $\lim_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}}-x$

47) $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}$

48) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}$

49) $(k\in\mathbb{R})$ $\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}$

50) $(k\in\mathbb{R})$ $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}$

(51 $\lim_{x\to-\infty}\frac{ke^x+k+1}{e^x+k}$ $(k\in\mathbb{R})$

(52 $\lim_{x\to+\infty}\frac{ke^x+k+1}{e^x+k}$ $(k\in\mathbb{R})$

(53 $\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^2+1)e^{2-x}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

الحل

(1

$$\lim_{x\to-\infty} x+e^x=-\infty$$

(2

$$\lim_{x\to+\infty} x+e^x=+\infty$$

(3

$$\lim_{x\to-\infty} x-e-xe^x=-\infty$$

(4

$$\lim_{x\to-\infty} e^x-ex^2=-\infty$$

(5

$$\lim_{x\to+\infty} e^x-ex^2=\lim_{x\to+\infty} e^x\left[1-\frac{ex^2}{e^x}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{ex^2}{e^x}=0$

(6

$$\lim_{x\to-\infty}[2+(x-1)e^{-x}]=-\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=e^{+\infty}=+\infty$

(7

$$\lim_{x\to+\infty}[2+(x-1)^2e^{-x}]$$

عند التعويض مباشرة نجد حالة عدم تعيين

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=e^{-\infty}=0$ و

$$\lim_{x\to+\infty} 2+(x-1)^2e^{-x}=0\times\infty$$

إزالتها:

نعلم أن $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$

بالتعويض يصبح شكل النهاية كالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}[2+(x-1)^2e^{-x}]=\lim_{x\to+\infty}\left[2+(x-1)^2\frac{1}{e^x}\right]$$

بعد نشر وتفكيك العبارة تصبح كالتالي:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[2+\frac{x^2-2x+1}{e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}$$
$$=2$$

(8

$$\lim_{x\to-\infty}[2-x^2e^{1-x}]=\lim_{x\to-\infty}[2-(-\infty)^2(+\infty)]$$
$$=-\infty$$

لأن

$$\lim_{x\to-\infty} e^{1-x}=\lim_{x\to-\infty} e\times e^{-x}=+\infty$$

(9

$$\lim_{x\to+\infty}[2-x^2e^{1-x}]=\lim_{x\to+\infty}[2-x^2ee^{-x}]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{x^2e}{e^x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2-\frac{x^2}{e^x}e\right]=2$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ (نهاية شهيرة)

($y=2$ مستقيم مقارب أفقي)

(10

$$\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{x}=0$

(11

$$\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x}-2-\frac{e}{x}\right]=-2$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{x}=0$

(12

$$\lim_{x\to0}\left[e^{-x}-2+\frac{e}{x}\right]$$

نحسب النهاية عند ال 0 بقيم كبرى وبقيم صغرى :

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left[e^{-x}-2+\frac{e}{x}\right]=-\infty$$

لأن: $e^{-(0)}=e^0=1$

و $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{e}{x}=\frac{e}{0^-}=-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[e^{-x}-2+\frac{e}{x}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e}{x}=\frac{e}{0^+}=+\infty$

($x=0$ مستقيم مقارب شاقولي)

(13

$$\lim_{x\to-\infty}[1+(x^2-x+1)e^{-x}]=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

و $\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$

(14

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x^2-x+1)e^{-x}\right]$$

باستعمال مقلوب e^{-x} نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1+(x^2-x+1)\frac{1}{e^x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right]=1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

($y=1$ مستقيم مقارب أفقي)

(15

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}=\frac{0}{-(-\infty)}=0$$

نهاية شهيرة: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$

(16

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2e^x}{e^x-x}\right]=\frac{\infty}{\infty}$$ ح.ع.ت

إزالتها: باستخراج e^x عامل مشترك

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2e^x}{e^x-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\left[\frac{x^2}{1-\frac{x}{e^x}}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

(17

$$\lim_{x\to-\infty}\left[xe^{2x+2}-x^2+1\right]=-\infty$$

(18

$$\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{2x+2}-x^2+1\right]=+\infty$$

(19

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}+e^{\frac{1}{x-1}}$$
$$=1+1=2$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=e^0=1$

$y=2$ مستقيم مقارب أفقي

(20

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+e^{\frac{1}{x-1}}$$
$$=1+1=2$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x-1}}=e^0=1$

نحسب النهاية في نفس المثال لكن عند الـ 1 بقيم صغرى وبقيم كبرى:

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}}\left[\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\right]=\frac{1}{0^-}+e^{\frac{1}{0^-}}$$
$$=-\infty+e^{-\infty}$$
$$=-\infty$$

لأن:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

و $e^{-\infty}=0$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{0^+}+e^{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

(21

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left[x-\frac{1}{e^x-1}\right]=0-\frac{1}{e^0-1}=-\frac{1}{0^-}$$
$$=+\infty$$

لأن

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[x-\frac{1}{e^x-1}\right]=0-\frac{1}{e^0-1}=-\frac{1}{0^+}$$
$$=-\infty$$

(22

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x-\frac{x}{e^x-1}\right]=-\infty-\frac{-\infty}{-1}$$
$$=-\infty-\infty=-\infty$$

نحسب النهاية لنفس العبارة عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}x-\frac{x}{e^x-1}=+\infty-\frac{+\infty}{+\infty}$$ ح ع ت

باستخراج e^x عامل مشترك:

$$\lim_{x\to+\infty}x-\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}x-\frac{e^x}{e^x}\,\frac{\frac{x}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$$
$$=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

(23

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(x+1)(e^x-1)\right]=(-\infty)(-1)$$
$$=+\infty$$

(24

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)(e^x-1)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

(25

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x+1}e^{-x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x}\left(e^{-x}\right)\right]=+\infty$$

(26

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1}\left[\frac{x}{x+1}e^{-x}\right]=\frac{-1}{0^-}e^{1}=+\infty$$

لأن

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1}\left[\frac{x}{x+1}e^{-x}\right]=\frac{-1}{0^+}e^{1}=-\infty$$

(27

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1}\left[\frac{-x^2e^{-x}}{(x-1)^2}\right]=\frac{-1e^{-1}}{0^+}=-\infty$$

لأن

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left[\frac{-x^2e^{-x}}{(x-1)^2}\right]=\frac{-1e^{-1}}{0^+}=-\infty$$

(28

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^2e^{-x}}{(x-1)^2}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^2}{x^2+2x+1}e^{-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x^2}{x^2}e^{-x}\right]$$

$$=-1(0)=0$$

(29

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{2x}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{2}\,\frac{e^x-1}{x}\right]=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

نهاية شهيرة: $\lim_{x\to0}\frac{e^{nx}-1}{x}=n$

(30

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{2}\right]=+\infty$$

نهاية شهيرة: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

(31

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{x^2}{e^x-1}\right]=\lim_{x\to0}\left[x\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[x\left(\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}x\left(\frac{1}{1}\right)=0$$

نهاية شهيرة: $\lim_{x\to0}\frac{e^{nx}-1}{x}=n$

(32

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{e^x}}\right]=0$$

نهاية شهيرة: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

(33

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{e^{-x}}}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2e^x\left[\frac{1}{1-e^x}\right]=0$$

نهاية شهيرة: $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

(34

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x-2}{e^x-2x}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}\left[\frac{2-\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}-2}\right]=-1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$

(35

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x-2}{e^x-2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x}\left(\frac{\frac{2x}{e^x}-\frac{2}{e^x}}{1-\frac{2x}{e^x}}\right)\right]$$

$$=1\left(\frac{0}{1}\right)=0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

(36

$$\lim_{x\to\ln2}\left[x+\frac{4}{e^x-2}\right]=\begin{cases}\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\ln2}=-\infty\\ \lim\limits_{x\overset{>}{\to}\ln2}=+\infty\end{cases}$$

(37

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{4}{e^x-2}\right]=+\infty$$

(38

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}\right]=\frac{0-0-4}{0^-}=-\frac{4}{0^-}$$

$$=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}\right]=\frac{0-0-4}{0^+}=-\frac{4}{0^+}$$

$$=-\infty$$

(39

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}=-\infty$$

نهايات شهيرة: $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

(40

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3xe^x-3x-4}{2(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\left[\frac{3x-\frac{3x}{e^x}-\frac{4}{e^x}}{2\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}\right]$$

$$=+\infty$$

(41

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{1}{0^-}+(1+0)e^{\frac{1}{0^-}}=$$

$$=-\infty$$

(42

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{1}{0^+}+(1+0)e^{\frac{1}{0^+}}$$

$$=+\infty+\infty=+\infty$$

(43

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]=-\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

(44

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]=+\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

(45

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[-\frac{1}{x}-1+e^{\frac{1}{x}}\right]=-\infty+\infty \quad \text{ح ع ت}$$

إزالتها:

نضع: $t=\frac{1}{x}$ لما $x\overset{>}{\to}0$ فإن $t\to+\infty$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[-t-1+e^t\right]=\lim_{t\to+\infty}e^t\left[-\frac{t}{e^t}-\frac{1}{e^t}+1\right]$$

$$=+\infty$$

لأن: $\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$ ، $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$

(46

$$\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-x\right]=+\infty.e^{\frac{1}{\infty}}-\infty \quad \text{ح ع ت}$$

إزالتها:

نضع $t=\frac{1}{x}$ لما $x\to+\infty$ فإن $t\to0$

ولدينا: $x=\frac{1}{t}$

$$\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}e^t-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\left[xe^{\frac{1}{x}}-x\right]=1$

(47

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)}\right]=\frac{0}{-1}$$

$$=0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0$ **و** $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

(48

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x}\left(\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right)\right]=1$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$ **و** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

(49

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}\qquad(k\in\mathbb{R})$$

الحالة الأولى $k=0$:

$$e^{-0}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2=+\infty$$

الحالة الثانية $k<0$:

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-kx}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2\frac{1}{e^{kx}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{kx}}+\frac{2x}{e^{kx}}+\frac{1}{e^{kx}}$$

$$=0$$

الحالة الثالثة $k>0$:

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-kx}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$$

(50

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}\qquad(k\in\mathbb{R})$$

الحالة الأولى: $k=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2=+\infty$$

الحالة الثانية: $k<0$: $\lim_{x\to+\infty}e^{-kx}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)^2e^{-kx}=+\infty$$

الحالة الثالثة $k>0$: $\lim_{x\to+\infty} e^{-kx}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+2x+1)\frac{1}{e^{kx}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{kx}}+\frac{2x}{e^{kx}}+\frac{1}{e^{kx}}$$
$$=0$$

(51

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ke^x+k+1}{e^x+k}\quad(k\in\mathbb{R})$$

الحالة الأولى $k=0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$$

الحالة الثانية $k<0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ke^x+k+1}{e^x+k}=\frac{k+1}{k}$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}ke^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

الحالة الثالثة $k>0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ke^x+k+1}{e^x+k}=\frac{k+1}{k}$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}ke^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$

(52 $\lim_{x\to+\infty}\frac{ke^x+k+1}{e^x+k}$ $(k\in\mathbb{R})$

الحالة الأولى $k=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

الحالة الثانية $k\neq0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\left[\frac{k+\frac{k}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{k}{e^x}}\right]=k$$

(53

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^2+1)e^{2-x}\quad(\alpha\in\mathbb{R})$$

الحالة الأولى $\alpha=0$

$$\lim_{x\to+\infty}e^{2-x}=\lim_{x\to+\infty}e^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^2}{e^x}$$
$$=0$$

الحالة الثانية $\alpha\neq0$

$$\lim_{x\to+\infty}(\alpha x^2+1)e^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\alpha x^2+1)e^2}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)e^2=0(e^2)$$
$$=0$$

17. الدالّة الأسية الشاملة الكبرى

التبويب: الدالة الأسية الشاملة

I- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x)=a+bxe^x$ مع a و b عددان من $\mathbb{R}$

1- عين قيمة كل من a و b حيث (C_g) منحنى الدالة g يقبل في النقطة $A(0;2)$ مماسا معامل توجيهه يساوي (-1) .

المنحنى (C_g) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2- نضع فيما يلي: $a=2$ و $b=-1$

- ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- برهن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

4- لتكن الدالة P المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $P(x)=(-x-1)e^x+1$

- احسب $P(0)$ ، ثم بين أن (C_g) يقبل مماسا (T) يعامد المستقيم (d) معادلته $y-x-2=0$ واكتب معادلة (T) ، حينئذ أدرس وضعية (C_g) مع كل من المماس (T) والمستقيم المقارب الأفقي.

5- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $0.8<\alpha<0.9$

6- استنتج أن (C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

7- أعط إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

8- بين أنه من أجل $x\geq\alpha$ فإن: $\ln\left(\frac{2}{x}\right)\leq x$ ومن أجل $x<\alpha$ فإن $2e^{-x}>x$.

9- بين أن معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الترتيبة المعدومة هي:

$$y=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)x+2\alpha+2$$

10- ارسم في المعلم السابق المماس (T) ثم المنحنى (C_g) .

11- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلات التالية:

أ) $g(x)=m$ ب) $g(x)=|m|-1$

ج) $x(1-e^x)=m-2$

د) $g(x)=-x+m^2$

هـ) $-x(e^x+m)=0$

12- اشرح كيف يتم رسم المنحنيات (C_{k_1}) ، (C_{k_2}) ، (C_{k_3}) ، (C_{k_4}) ، (C_{k_5}) انطلاقا من (C_g) حيث:

$k_1(x) = -g(x)$
$k_2(x) = -g(-x)$
$k_3(x) = |g(x)|$
$k_4(x) = |g(|x|)|$
$k_5(x) = -1 - g(x-1)$

مع العلم أن:

$$D_{k_1} = D_{k_2} = D_{k_3} = D_{k_4} = D_{k_5} = \mathbb{R}$$

II) ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_n(x) = 2 - nxe^x$
و (C_n) تمثيلها البياني في المعلم السابق:

1- أثبت أن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثياتها.

2- من أجل $n > 1$، أدرس وضعية (C_n) بالنسبة إلى (C_g).

3- بين أنه مهما كان n من $\mathbb{N}^*$، فإن (C_n) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا وحيدا.

4- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g_n، ثم شكل جدول تغيراتها.

III)- لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$، (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $(2cm)$

1- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$، ثم فسر النتيجة بيانيا، احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- دون حساب، عين قيمة $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4- بين أن $f(\alpha) = \alpha$

5- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - x]$، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ)

6- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ثم بالنسبة إلى (Δ') ذو المعادلة $y = x$.

7- عين نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

8- ليكن المنحنى (T) الذي معادلته: $y = e^{-x}$:
احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - e^{-x}$ وفسر النتيجة بيانيا.

9- لتكن الدالة P' المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$P'(x) = \frac{4-2xe^x}{(e^x+2)^2} - \frac{4}{9}$$

احسب $P'(0)$ ثم بين أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T') يوازي المستقيم ذو المعادلة $y - \frac{4}{9}x = 0$ ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

10- ارسم (Δ) و (T') ثم (C_f)

11- ناقش بيانيا، عدد حلول المعادلتين:
$f(x) = f(\lambda)$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$
$|f(x)| = \ln t$ مع $t \in \mathbb{R}_+^*$

IV) لتكن Φ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $\Phi(x) = [f(x)]^2$

- أعط جدول تغيرات الدالة Φ.

2- E دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$E(x) = \frac{1}{f(x)}$$

- أعط جدول تغيرات الدالة E

3- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x^2)$
-أعط جدول تغيرات الدالة h (عبارة h غير مطلوبة)

4- لتكن الدالة m المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$m(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

أعط جدول تغيرات الدالة m.

الحل

I) 1- تعيين قيمة كل من a و b حيث (C_g) يقبل في النقطة $A(0;2)$ مماسا معامل توجيهه يساوي (-1):

$A \in (C_g)$ معناه $g(0) = 2$
و (C_g) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي (-1) يعني $g'(0) = -1$

معامل التوجيه = المشتقة

$$g(0) = a + b(0)e^0 = 2$$
$$a = 2$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$(uv)' = u'v + v'u$$
$$(e^f)' = f'e^f$$
$$g'(x) = be^x + 1e^x(bx)$$
$$g'(x) = (b + bx)e^x$$

$g'(0) = -1$ يعني $(b + b(0))e^0 = -1$
ومنه: $b = -1$ لأن $b(0) = 0$

ومنه: $g(x) = 2 - xe^{x}$

2- نضع فيما يلي: $a = 2$ و $b = -1$

- دراسة تغيرات الدالة g

- النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} 2 - xe^{x} = 2$$

لأن: $\lim_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ (نهاية شهيرة)

التفسير الهندسي: (C_g) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 2$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2 - xe^{x} = -\infty$$

المشتقة:

من السؤال السابق: $g'(x) = (b + bx)e^{x}$

وأعطي لنا $a = 2$ و $b = -1$

بالتعويض نجد:

$$g'(x) = (-1 - x)e^{x}$$

$g'(x) = 0$ لما $-1 - x = 0$ لأن $e^{x} > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty; -1]$

ومتناقصة تماما على المجال $[-1; +\infty[$

- تشكيل جدول تغيرات الدالة g :

$$g(-1) = 2 + e^{-1}$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2 + e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

3- البرهان أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها:

المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف إذا كانت المشتقة الثانية $g''(x)$ تنعدم وتغير إشارتها.

الدالة $g'(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$$g''(x) = -1e^{x} + e^{x}(-x - 1)$$

$$g''(x) = (-x - 2)e^{x}$$

ومنه: $g''(x) = 0$ معناه $-x - 2 = 0$

أي $x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه (C_g) يقبل نقطة انعطاف $(-2; g(-2))$

أي $(-2; 2 + 2e^{-2})$ لأن $g(-2) = 2 + 2e^{-2}$

4-حساب $P(0)$ والبرهان أن (C_g) يقبل مماسا (T) يعامد المستقيم (d) معادلته $y - x - 2 = 0$:

- حساب $P(0)$:

$$P(0) = (-(0) - 1)e^{0} + 1 = 0$$

- البرهان ان (C_g) يقبل مماسا (T) يعامد المستقيم (d) معادلته $y - x - 2 = 0$:

$y - x - 2 = 0$ معناه $y = x + 2$

وجود مماس $(T) \perp (d)$ معناه:

$g'(x_0) \times$ معامل التوجيه $= -1$

$$(-x_0 - 1)e^{x_0} \times (1) = -1$$

$$(-x_0 - 1)e^{x_0} \times (1) + 1 = 0$$

فتصبح تكافئ عبارة $P(x) = 0$

أي $x_0 = 0$

ومنه: (C_g) يقبل مماسا (T) حيث $(T) \perp (d)$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$

-كتابة معادلة (T)

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

$$(T):\ \ y = -x + 2$$

- دراسة وضعية (C_g) مع كل من المماس (T) والمستقيم المقارب الأفقي:

- أولا بالنسبة إلى المماس (T) :

ندرس إشارة الفرق $g(x) - y$ على $\mathbb{R}$:

لدينا:

$g(x) = 2 - xe^{x}$ و $(T):\ \ y = -x + 2$

$$g(x) - y = 2 - xe^{x} + x - 2$$

$$= x(-e^{x} + 1)$$

ملاحظة هامة جدا:

إذا كانت العبارة من الشكل $ae^{ax} + b$ وتنعدم عند x_0 فإن إشارتها تكون كالتالي:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ae^{ax} + b$	عكس إشارة $a\alpha$	0	نفس إشارة $a\alpha$

$$g(x) - y = x(-e^{x} + 1)$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$-e^{x} + 1$		$+$	0	$-$	
$g(x) - y$		$-$	0	$-$	
الوضعية		(C_g) تحت (T)	(C_g) يمس (T)	(C_g) تحت (T)	

-وضعية (C_g) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي:

ندرس إشارة الفرق $g(x)-2$ على $\mathbb{R}$

$$g(x)-2=-xe^x-2=-xe^x$$

$e^x>0$ أي من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)-2$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_g) فوق المستقيم المقارب الأفقي	(C_g) يقطع المقارب الأفقي	(C_g) تحت المستقيم المقارب الأفقي

5- بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما (متناقصة تماما) على المجال $]-1;+\infty[$

و $g(-1)\times\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$ ومنه تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$.

-التحقق أن $0.8<\alpha<0.9$:

$\begin{cases} g(0.8)\approx 0.21 \\ g(0.9)\approx -0.21 \end{cases}$ أي $g(0.8)\times g(0.9)<0$

ومنه: $0.8<\alpha<0.9$

أي $g(\alpha)=0$

6- استنتاج أن (C_g) يقطع حامل محور الفواصل (xx') في نقطة وحيدة، فاصلتها α :

نحل المعادلة $g(x)=0$

ولدينا من قبل $g(\alpha)=0$

ومنه $(C_g)\cap(xx')=\{(\alpha;0)\}$

7- إعطاء إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

8- بيان أنه من أجل $x\geq\alpha$ فإن: $\ln\left(\frac{2}{x}\right)\leq x$

لدينا $x\geq\alpha$ فإن $g(x)\leq 0$

أي $2-xe^x\leq 0$

$$\frac{2}{x}\leq\frac{xe^x}{x}$$

$$\ln\left(\frac{2}{x}\right)\leq\ln e^x$$

ومنه: $\ln\left(\frac{2}{x}\right)\leq x$

البرهان أنه من أجل $x<\alpha$ فإن $2e^{-x}>x$

$x<\alpha$ فإن $g(x)>0$ أي $2-xe^x>0$

$$\frac{2}{e^x}>\frac{xe^x}{e^x}$$

$$2e^{-x}>x$$

9- البرهان أن معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الترتيبة المعدومة هي:

$$y=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)x+2\alpha+2$$

الترتيبة المعدومة معناه $g(x)=0$

و $g(x)=0$ أي $g(\alpha)=0$ ومنه $x=\alpha$

$$y=g'(\alpha)(x-\alpha)+g(\alpha)$$

$$g'(\alpha)=(-1-\alpha)e^{\alpha}$$

لكن $g(\alpha)=0$

ومنه $2-\alpha e^{\alpha}=0$

أي $\frac{2}{\alpha}=\frac{\alpha e^{\alpha}}{\alpha}$

$$g'(\alpha)=(-1-\alpha)\left(\frac{2}{\alpha}\right)=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$

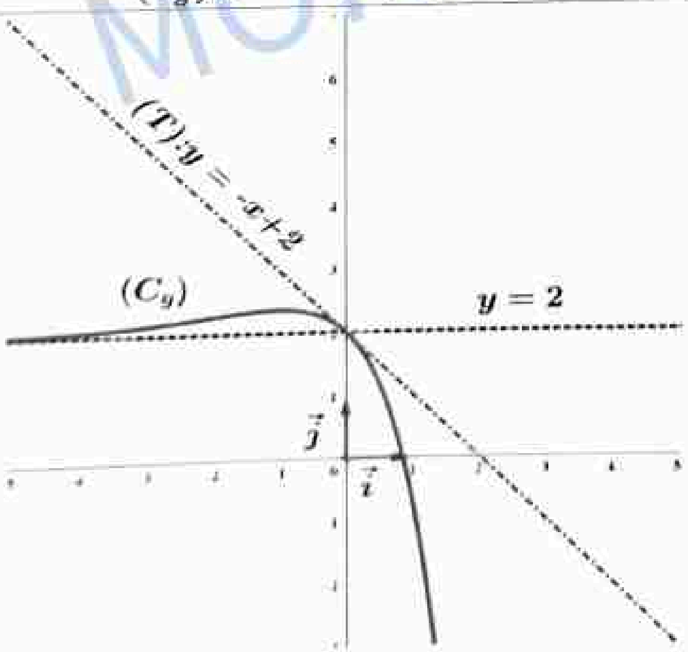
$$y=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)(x-\alpha)$$

$$=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)x-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)(-\alpha)$$

$$y=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)x+2(\alpha+1)$$

ومنه: $y=-2\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)x+2\alpha+2$

10- رسم المماس (T) ثم المنحنى (C_g)



11- المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلات التالية:

المناقشة البيانية:

هناك ثلاث حالات للمناقشة البيانية: حيث m وسيط حقيقي:

1- الأفقية: $g(x) = h(m)$

2- مائلة: $g(x) = ax + h(m)$ ، حيث a عدد حقيقي غير معدوم.

والمناقشة المائلة يكون لها علاقة مع المماس أو المستقيم المقارب المائل.

3- دورانية: $g(x) = h(m)x + b$

أ) $g(x) = m$:

الحلول البيانية للمعادلة $g(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة:

$$y = m$$

- $m \le 2$ للمعادلة حل وحيد
- $2 < m < 2e^{-1}$ للمعادلة حلان متمايزان.
- $m = 2 + e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف.
- $m > 2 + e^{-1}$ لا يوجد للمعادلة حلول.

ب) $g(x) = |m| - 1$

خواص مهمة جدا: $(b > 0 \ ; \ a > 0)$

$|m| = a$ أي $\begin{cases} m = a \\ m = -a \end{cases}$ ......(1)

$|m| < a$ أي $-a < m < a$ ......(2)

$|m| > a$ أي $\begin{cases} m > a \\ m < -a \end{cases}$ ......(3)

أي $a < |m| < b$

$\begin{cases} a < m < b \\ -b < m < -a \end{cases}$ ......(4)

المناقشة:

- $|m| - 1 \le 2$ أي $|m| \le 3$ أي $-3 < m < 3$ للمعادلة حل وحيد
- $2 < |m| - 1 < 2 + e^{-1}$

$$3 < |m| < 3 + e^{-1}$$
$$-3 - e^{-1} < m < 3 + e^{-1}$$

للمعادلة حلان متمايزان.

- $|m| - 1 = 2 + e^{-1}$ أي $|m| = 3 + e^{-1}$

$\begin{cases} m = 2 + e^{-1} \\ m = -3 - e^{-1} \end{cases}$ للمعادلة حل مضاعف

ج) $x(1 - e^x) = m - 2$

يجب أن نستخرج من هذه العبارة مساواة أحد أطرافها عبارة $g(x)$ والطرف الآخر عبارة فيها m

$$x(1 - e^x) = m - 2$$
$$x - xe^x = m - 2$$
$$2 - xe^x = -x + m$$
$$g(x) = -x + m$$

وهي مناقشة مائلة.

$$(T_m): \ y = -x + m$$
$$(T): \ y = -x + 2$$
$$(T) \parallel (T_m)$$

$m < 2$ حلان متمايزان.

$m = 2$ حل مضاعف.

$m > 2$ لايوجد حلول.

د) $g(x) = -x + m^2$ (مائلة ايضا)

خاصية: $\sqrt{m^2} = |m|$

- $\sqrt{m^2} < \sqrt{2}$

$|m| < \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ حلان متمايزان.

- $m^2 = 2$ أي $|m| = \sqrt{2}$ حل مضاعف

أي $\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases}$

- $m^2 > 2$ أي $|m| > \sqrt{2}$

$m < \sqrt{2}$ أو $m < -\sqrt{2}$ لا يوجد حلول.

هـ) $-x(e^x + m) = 0$

$$-x(e^x + m) = 0$$
$$-xe^x - mx = 0$$
$$-xe^x = mx$$
$$2 - xe^x = mx + 2$$
$$g(x) = mx + 2$$

وهي مناقشة دورانية.

$(T_m): \ y = mx + 2$

حيث $A(x_0; y_0) \in (T_m)$.

نعوض:

$$y_0 = mx_0 + 2$$
$$mx_0 + 2 - y_0 = 0$$

أي $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \text{و} \\ 2 - y_0 = 0 \ \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases}$

ومنه: جميع المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0; 2)$

- $m < -1$ للمعادلة حلان متمايزان
- $m = -1$ للمعادلة حل مضاعف
- $-1 < m < 0$ للمعادلة حلان متمايزان
- $m \ge 0$ للمعادلة حل وحيد.

12- شرح كيفية رسم المنحنيات انطلاقا من (C_g).

▪ $k_1(x) = -g(x)$: (C_{k_1}) يناظر (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل.

- $k_2(x) = -g(-x)$: (C_{k_2}) يناظر (C_g) بالنسبة إلى المبدأ O.
- $k_3(x) = |g(x)|$: (C_{k_3}) ينطبق على (C_g) في المجال $]-\infty;\alpha]$

(C_{k_3}) يناظر (C_g) بالنسبة إلى محور الفواصل في المجال $[\alpha;+\infty[$

- $k_4(x) = |g(|x|)|$: (C_{k_4}) ينطبق على (C_g) على المجال $]-\infty;\alpha]$ ويناظر (C_g) لكن الدالة k_4 دالة زوجية لأن من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$ حيث

$$k_{4(-x)} = |g(|-x|)| = |g(|x|)| = k_4(x)$$

$|-x| = |x|$:

أي نحتفظ بالجزء الواقع في المجال $[0;+\infty[$ والجزء الآخر نناظره بالنسبة إلى محور التراتيب لأنها زوجية.

- $k_5(x) = -1 - g(x-1)$

$$g(x+a)+b$$

انسحاب شعاعه $\vec{n}\binom{-a}{b}$

$$k_5(x) = -1 - g(x-1)$$
$$k_5(x) = -[1 + g(x-1)]$$

نسحب (C_g) بشعاع $\vec{n}\binom{1}{1}$ ثم الجزء المحصل عليه نناظره بالنسبة إلى محور الفواصل.

II) 1- إثبات أن جميع المنحنيات تشمل نقطة وحيدة : w

ليكن (C_n) و (C_{n+1}) حيث $g_n(x) = g(x)$ و $g_{n+1}(x) = 2-(n+1)xe^x$

(C_n) يقطع (C_{n+1}) معناه $g_n(x) = g_{n+1}(x)$

$$2-(n+1)xe^x = 2 - nxe^x$$

أي $-nxe^x = -(n+1)xe^x$

$$(-n+n-1)xe^x = 0$$
$$-xe^x = 0$$

نعلم ان $e^x > 0$ أي $-x = 0$

$$x = 0$$
$$g_n(0) = 2 - n \times 0 \times e^0 = 0$$

ومنه جميع المنحنيات (C_n) تشمل النقطة

$$w(0;2) = A$$

2- دراسة وضعية (C_n) بالنسبة إلى (C_g):

ندرس إشارة الفرق $g_n(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g_n(x) - g(x) &= 2 - nxe^x - (2 - xe^x) \\ &= 2 - nxe^x - 2 + xe^x \\ &= (-nx + x)e^x \\ &= (-n+1)xe^x \end{aligned}$$

إذا كان $(-n+1)xe^x = 0$ فإن

$(-n+1)x = 0$ لأن $e^x > 0$

ومنه $x = \frac{0}{-n+1}$ أي $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_n(x) - g(x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_n) فوق (C_g)	(C_n) يقطع (C_g)	(C_n) تحت (C_g)

3-البرهان أن (C_n) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا وحيدا

$$\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = \lim_{x\to-\infty} [2 - nxe^x] = 2$$

ومنه (C_n) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا وحيدا مهما كان $n \in \mathbb{N}^*$ معادلته $y = 2$ بجوار $-\infty$

4-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$ ودراسة اتجاه تغير الدالة g_n

$$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \lim_{x\to+\infty} [2 - nxe^x] = -\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} [xe^x] = -\infty$

الدالة g_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$g_n'(x) = -(ne^x + e^x nx) = (-n - nx)e^x$$

لما $g_n'(x) = 0$ $-nx - n = 0$

أي $x = \frac{n}{-n} = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة g_n متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$	0	$-$
$g_n(x)$	2 ↗	$2 + ne^{-1}$	↘ $-\infty$

III) 1- تبيان ان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(\frac{2x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

التفسير الهندسي

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل).

حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+2}{e^x+2}\right) = -\infty$$

2-البرهان أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'u}{v^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{2e^x+4-2xe^x-2e^x}{(e^x+2)^2}$$
$$=\frac{-2xe^x+4}{(e^x+2)^2}=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

- استنتاج اتجاه التغير

لدينا $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3- تعيين دون حساب قيمة العدد $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0$$

(C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 0 أو يقبل مماسا أفقيا معادلته

$$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$$
$$y=f(\alpha)$$

4- التبيان أن $f(\alpha)=\alpha$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}$$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ معناه $2-\alpha e^\alpha=0$

أي $e^\alpha=\frac{2}{\alpha}$

نعوض في $f(\alpha)$

$$f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2+2\alpha}{\alpha}}=\frac{\alpha(2\alpha+2)}{(2\alpha+2)}$$
$$=\alpha$$

5- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$ ثم استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+2}{e^x+2}-x\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2}\right]$$
$$=1$$

استنتاج مستقيم مقارب مائل (Δ) لـ (C_f) عند $-\infty$.

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=1$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x-1=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=0$$

ومنه (C_f) يقبل م.م مائلا (Δ) عند $-\infty$ معادلته $y=x+1$

6- دراسة الوضعية:

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$

$f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$ ، $(\Delta): y=x+1$

$$f(x)-y=\frac{2x+2}{e^x+2}-x-1$$
$$=\frac{2x+2-xe^x-2x-e^x-2}{e^x+2}$$
$$=\frac{(-x-1)e^x}{e^x+2}$$

إشارة $[f(x)-y]$ من إشارة $-x-1$ لأن $e^x>0$

ومنه $-x-1=0$

$x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

وضعية (C_f) مع (Δ')

$$f(x)-y=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}$$

إشارة الفرق من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ')	(C_f) يقطع (Δ')	(C_f) تحت (Δ')

7- تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$

يعني

$$\frac{2x+2}{e^x+2}=0$$
$$2x+2=0$$
$$x=-1$$
$$(C_f)\cap(xx')=\{(-1;0)\}$$

استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	0	$f(\alpha)$	0

8- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-e^{-x}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-e^{-x}]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x+2}{e^x+2}\right]-e^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(\frac{2x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}-e^{-x}\right]$$
$$=0$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل منحنى مقارب معادلته $y=e^{-x}$ عند $+\infty$

9- حساب $P'(0)$ و نبرهان ان (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T') حيث (T) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{4}{9}x$:

حساب $P'(0)$

$$P'(0)=\frac{4-2(0)e^0}{(e^0+2)^2}-\frac{4}{9}=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=0$$

والبرهان ان (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T') حيث (T') يوازي المستقيم ذو المعادلة $y=\frac{4}{9}x$:

نحل المعادلة

معامل التوجيه $=f'(x_0)$

$$f'(x_0)=\frac{4}{9}$$
$$\frac{2g(x_0)}{(e^{x_0}+2)^2}=\frac{4}{9}$$
$$\frac{4-2x_0e^{x_0}}{(e^{x_0}+2)^2}-\frac{4}{9}=0$$

أي $P'(x_0)=0$ يعني $x_0=0$

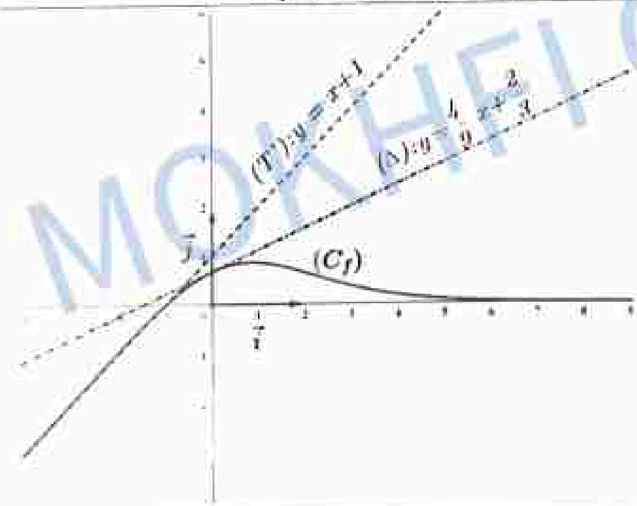
ومنه (C_f) يقبل مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة $y-\frac{4}{9}x=0$ عند النقطة ذات الفاصلة المعدومة أي $x_0=0$

المعادلة الديكارتية للمستقيم (T') :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$y=\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}$$

لأن $f'(0)=\frac{4}{9}$ و $f(0)=\frac{2}{3}$

10- رسم (Δ) و (T') ثم (C_f) :



11- المناقشة البيانية:

أ- $f(x)=f(\lambda)$ مناقشة أفقية عمودية

$(\lambda,f(\lambda))=(x,f(x))$ أفقية عمودية

(1) $f(\lambda)\le 0$: $\lambda\le -1$ للمعادلة حل وحيد.

(2) $\begin{cases}0<f(\lambda)<\alpha\\ \lambda\in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[\end{cases}$ حلان متمايزان

(3) $\begin{cases}f(\lambda)=\alpha\\ \lambda=\alpha\end{cases}$ حلا مضاعفا

ب- $|f(x)| = \ln(t)$

$t \in]0;+\infty[$

مناقشة أفقية يجب أن نرسم منحنى الدالة $|f|$

(1)

$$\ln(t) = 0$$
$$e^{\ln(t)} = e^0$$
$$t = 1$$

حلا وحيدا

(2)

$$0 < \ln(t) < \alpha$$
$$1 < t < e^{\alpha}$$

ثلاثة حلول

(3)

$$\ln(t) = \alpha$$
$$t = e^{\alpha}$$

حلان أحدهما مضاعف والاخر وحيد

(4)

$$\ln(t) > \alpha$$
$$t > e^{\alpha}$$

للمعادلة حل وحيد

IV) 1- جدول تغيرات الدالة φ :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} [f(x)]^2 = +\infty$$

المشتقة

$$[f^n]' = nf'f^{n-1}$$

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 2f'(x) \times f(x)$$

إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة الجداء $f'(x) \times f(x)$

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول تغيرات الدالة $\varphi(x)$:

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	α^2	$\searrow$	0

2- جدول تغيرات الدالة E :

$$\lim_{x\to-\infty} E(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} E(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} E(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} E(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

المشتقة

الدالة E قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة: $E'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	

الدالة E متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1[$ و $]-1;\alpha[$ ومتزايدة تماما على المجال $]\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$E'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$E(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

3- جدول تغيرات الدالة h :

$$h(x) = f(x^2)$$
$$u(x) = x^2$$

نلاحظ أن $h = f\, o\, u$

أ- النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x^2) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x^2) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{0}$$

المشتقة:

الدالة h تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$\boldsymbol{h(x) = f[u(x)]}$$
$$\boldsymbol{h'(x) = u'(x)f'[u(x)]}$$
$$h'(x) = 2xf'(x^2)$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة الجداء $2xf'(x^2)$

اشارة $f'(x^2)$:

لدينا $f'(x) \geq 0$ لما $x \leq \alpha$

ومنه $f'(x^2) \geq 0$ لما $x^2 \leq \alpha$

ومنه $\sqrt{x^2} \leq \sqrt{\alpha}$

$$|x| \leq \sqrt{\alpha}$$

أي $-\sqrt{\alpha} \leq x \leq \sqrt{\alpha}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x^2)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha}$		0		$\sqrt{\alpha}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↗	α	↘	$\frac{2}{3}$	↗	α	↘	0

4- إعطاء جدول تغيرات الدالة m :

نلاحظ أن $m = f \circ v$ حيث $v(x) = \frac{1}{x}$

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} m(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} m(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} m(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} m(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

المشتقة:

الدالة m قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$m'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

إشارة $m'(x)$ من إشارة الجداء $-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$

$$-\frac{1}{x^2} < 0$$

* لدينا $f'(x) \leq 0$ لما $x \geq \alpha$

ومنه $f'\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ لما $\frac{1}{x} \geq \alpha$ مع $x \neq 0$

ومنه $0 < x \leq \frac{1}{\alpha}$

* لدينا $f'(x) \geq 0$ لما $x \leq \alpha$

ومنه $f'\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ لما $\frac{1}{x} \leq \alpha$ مع $x \neq 0$

ومنه $\frac{1}{\alpha} < x \leq 0$

إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$-\frac{1}{x^2}$		$-$	‖	$-$	|	$-$	
$m'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0			$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$m'(x)$		$-$	‖		$+$	0	$-$	
$m(x)$	$\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$ ‖	0	↗	α	↘	$\frac{2}{3}$

جزء دوال شعبة العلوم التجريبية

18. بكالوريا 2021 العلوم التجريبية

الموضوع الأول

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f معرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = 2x - 1 + \ln\left[1 + \frac{1-x}{x^2}\right]$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- بين أن $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2 - x + 1)}$$

ب- استنتج أن f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]0,\alpha]$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل لـ (C) ثم ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

4) بين أن (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة 2 ثم اكتب معادلة له.

5) بين ان (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تحقق:
$$-0.5 < \beta < -0.4$$

6) ارسم (Δ) ، (T) والمنحنى (C).
(نأخذ $f(\alpha) \approx 0.87$)

الحل

I) 1- البرهان ان الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$:

مهما يكن $x\in D_g$ فان : $g'(x) = 6x^2 - 4x + 3$

اي: $6x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = -56$

اي $6x^2 - 4x + 3 > 0$ اي $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2-أ- البرهان ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $0.7 < \alpha < 0.8$:

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $]0.7,0.8[$

و $\begin{cases} g(0.7) = -0.194 \\ g(0.8) = 0.144 \end{cases}$

و $g(0.8) \times g(0.7) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$

ب- اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) 1- البرهان ان $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ مع تفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right) = +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to 0} \frac{1-x}{x^2} = +\infty$:

و $\lim_{x\to 0} ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right) = +\infty$

التفسير الهندسي :

$x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C)

ب-حساب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left[2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left[2x - 1 + \ln\left(1 + \frac{1-x}{x^2}\right)\right] = +\infty$$

2-أ- تبيان ان $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2-x+1)}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

مهما يكن $x \in D_f$ فان :

$$f'(x)=2+\frac{\frac{x-2}{x^3}}{1+\frac{1-x}{x^2}}$$
$$=2+\frac{x-2}{x^3}\times\frac{x^2}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{2(x^3-x^2+x)+x-2}{x(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{2x^3-2x^2+3x-2}{x(x^2-x+1)}$$
$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(x^2-x+1)}$$

2-ب-اشارة $f'(x)$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x^2-x+1)}$

$$x^2-x+1=0$$
$$\Delta=-3$$

ومنه $x^2-x+1>0$ على $\mathbb{R}^*$

وبالتالي اشارة $f'(x)$ من اشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
$g(x)$	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$+$		$+$
$\frac{g(x)}{x}$	$+$	‖	$-$	0	$+$

ومنه:

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]\alpha;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha[$

2-جـ-جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3-البرهان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل لـ (C) ودراسة وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)\right]$$
$$=\ln(1)=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (C)

الوضعية بالنسبة لـ (C) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\ln\left(1+\frac{1-x}{x^2}\right)$$
$$=\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$$

أي : $\ln\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)$ أي $\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$

أي $x^2-x+1=x^2$

$$-x+1=0$$

أي $x=1$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية	(C) فوق (Δ)	‖	(C) فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) تحت (Δ)	

4-البرهان أن (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة A ذات الفاصلة 2 مع كتابة المعادلة :

أي $f'(x)=2$ تكافئ

$$\frac{2x^3-2x^2+3x-2}{x^3-x^2+x}=2$$

يعني

$$2x^3-2x^2+3x-2=2x^3-2x^2+2x$$
$$3x-2=2x$$
$$x=2$$

ومنه (C) يقبل مماسا (T) عند النقطة $A\left(2;3+\ln\frac{3}{4}\right)$ حيث معادلته :

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)$$
$$=2(x-2)+3+\ln\frac{3}{4}$$
$$(T):\ y=2x-1+\ln\frac{3}{4}$$

5-البرهان أن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة :

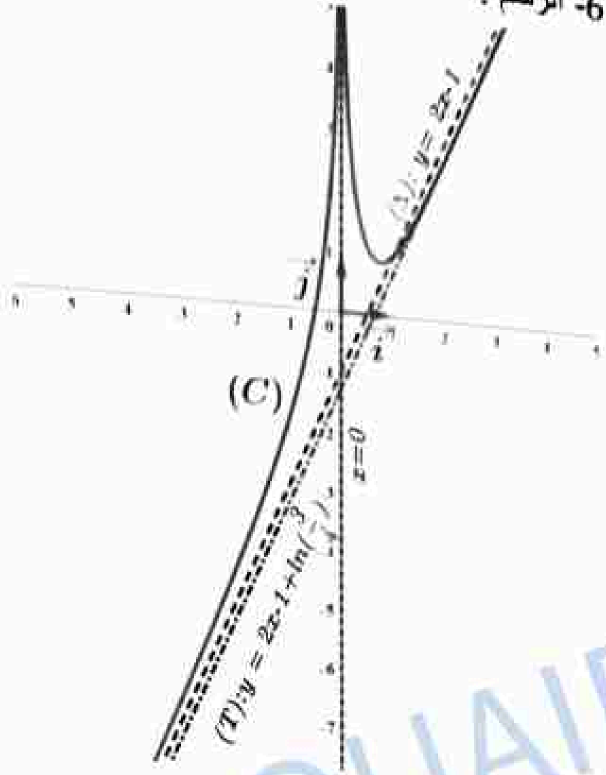
الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على$]-0,5;-0,4[$

و $\begin{cases} f(-0,5)=-0,054 \\ f(-0,4)=0,47 \end{cases}$

و $f(-0,5)\times f(-0,4)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-0,5<\beta<-0,4$

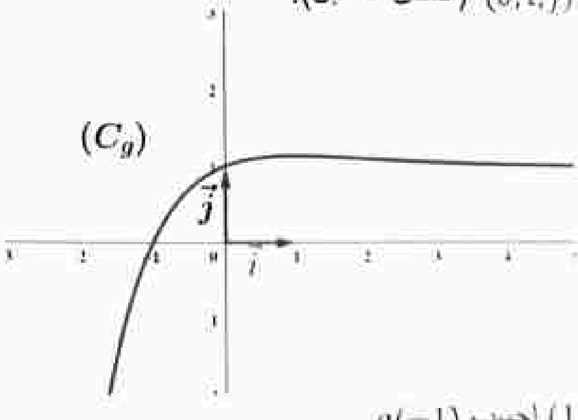
6- الرسم :



19. بكالوريا 2021 العلوم التجريبية

الموضوع الثاني

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$g(x) = 1 + xe^{-x-1}$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ (الشكل المقابل).



1) احسب $g(-1)$.
2) بقراءة بيانية، حدد حسب قيم x اشارة $g(x)$.
II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x-(x+1)e^{-x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.
1) تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم:
$$f(x) = x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$$

ثم احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2) أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x
$$f'(x) = g(x)$$
ب- استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1]$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3) أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.
ج- بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة له.
4) أ- بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β.
حيث $0.3 < \alpha < 0.4$ و $-1.9 < \beta < -1.8$
ب- ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم ارسم (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.
5) الدالة العددية h معرفة على المجال $[-2;2]$ -
$$h(x) = -|x| + (|x|-1)e^{|x|-1}$$
(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
أ- بين أن الدالة h زوجية.
ب- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x) = f(x)$.
ج- اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

الحل

I) 1 -حساب $g(-1)$:
$$g(-1) = 1-1 = 0$$

2-تحديد اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II-1- التحقق أن
$$f(x) = x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$$
$$f(x) = x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$$
$$= x - x\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}$$
$$= x-(x+1)e^{-x-1}$$

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x-1}\right]=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left[1-\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]=+\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left[e^{-x-1}\right]=-\infty$

2-أ-البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن $f'(x)=g(x)$

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x)&=1-\left[e^{-x-1}-e^{-x-1}(x+1)\right]\\ &=1-\left[(1-x-1)e^{-x-1}\right]\\ &=1+xe^{-x-1}=g(x)\end{aligned}$$

2-ب- استنتاج أن f متزايدة

إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ اذن:

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$.

الدالة f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

3-أ-حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ مع تفسير النتيجة هندسيا

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]&=\lim_{x\to+\infty}-(x+1)e^{-x-1}\\ &=\lim_{x\to+\infty}-xe^{-x-1}-e^{-x-1}\\ &=0\end{aligned}$$

ومنه المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

3-ب-الوضعية النسبية لـ (Δ) و (C_f) :

$$\begin{aligned} f(x)-y&=-(x+1)e^{-x-1}\\ &=(-x-1)e^{-x-1}\end{aligned}$$

اشارته من اشارة $-x-1$ لأن $e^{-x-1}>0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3-جـ-تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) مع تعيين معادلته :

اي $f'(x)=1$ أي $g(x)=1$

ومنه $1+xe^{-x-1}=1$ أي $xe^{-x-1}=0$ ومنه

$x=0$ أي (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته :

$$(T)\ :\ y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$(T)\ :\ y=x-\frac{1}{e}$$

4-أ-البرهان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β :

* الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $]0{,}3;0{,}4[$

و $\begin{cases} f(0{,}3)=-0{,}054\\ f(0{,}4)=0{,}055\end{cases}$

و $f(0{,}4)\times f(0{,}3)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}3<\alpha<0{,}4$

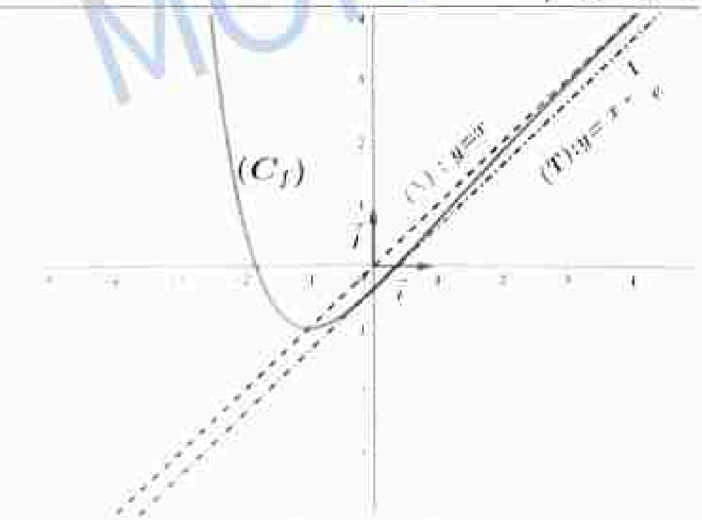
* الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-1{,}9;-1{,}8[$

و $\begin{cases} f(-1{,}9)=0{,}31\\ f(-1{,}8)=-0{,}019\end{cases}$

و $f(-1{,}8)\times f(-1{,}9)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1{,}9<\beta<-1{,}8$

4-ب-الرسم



5-أ-البرهان أن الدالة h زوجية :

من أجل $x\in D_h$ و $-x\in D_h$ فإن :

$$\begin{aligned} h(-x)&=-|-x|+(|-x|-1)e^{|-x|-1}\\ &=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}=h(x)\end{aligned}$$

ومنه h دالة زوجية

5-ب-تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2;0[$: $h(x) = f(x)$

x	-2	0	2
$\|x\|$	$-x$	0	x

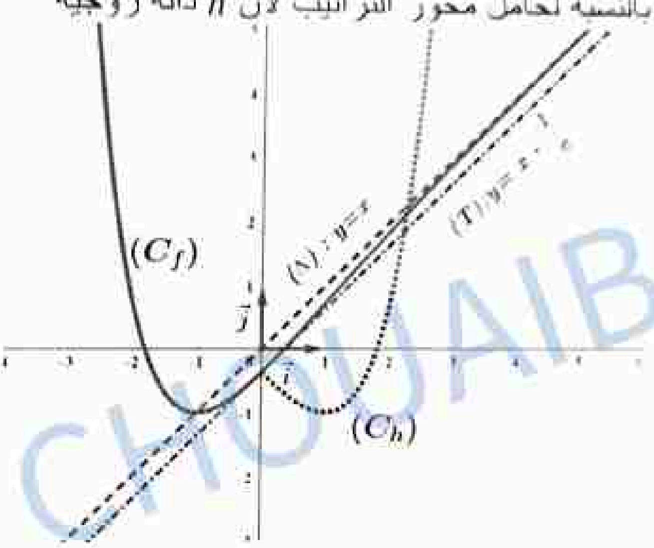
لدينا في المجال $]-2;0[$

$$h(x) = -(-x) + (-x-1)e^{-x-1}$$
$$= x - (x+1)e^{-x-1} = f(x)$$

5-جـ-شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

(C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-2;0[$

وفي المجال $[0;2]$ (C_h) نظير الجزء الاول المرسوم بالنسبة لحامل محور التراتيب لأن h دالة زوجية



.20 بكالوريا 2020 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2020 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

الدالة العددية f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في مستو منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(نوخذ وحدة الطول $2cm$)

1-أ- احسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم بيّن أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1-ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

1-جـ-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ).

2- الدالة العددية g معرفة على المجال $]0;+\infty[$:

$$g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$$

2-أ- بيّن أن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2-ب- احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

3-أ- بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

3-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغير اتها.

4- بيّن أنّ التمثيل البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ)، ويطلب تعيين معادلة له.

5- انشئ (T)، (Δ) و (C_f).

6- الدالة العددية h معرفة على المجال $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$$

6-أ- بيّن أنّ h دالة زوجية.

6-ب- اشرح كيف يتمّ انشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f). (لا يُطلب انشاء (C_h))

الحل

1-أ- حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \left[(x-1) - \frac{\ln x}{x^2}\right]$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 - 1 - \frac{\ln 0^+}{0^+} = +\infty$$

- (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = 0$ بجوار $+\infty$

- البرهان أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x-1) - \frac{(\ln x)}{x^2}\right] = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)}{x^2} = 0$

ب- البرهان أن (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - y| =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left|x - 1 - \frac{\ln x}{x^2} - x + 1\right| = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ج- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)-y=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$x^2>0$ على المجال $]0;+\infty[$

إذا كان $-\ln x=0$ فإن:

$$\ln x=0$$
$$e^{\ln x}=e^0$$
$$x=1$$

لأن $(e^{\ln x}=x)$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

2-أ- البرهان أن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$:

- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

$$g'(x)=3x^2-0+2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(\ln(u(x)))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$g'(x)=3x^2+\frac{2}{x}>0$$

أي $g'(x)>0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب- حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$:

$$g(1)=1^3-1+2\ln(1)=0$$

استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0 ↗	$+$

نلاحظ من الجدول أن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

3- أ البرهان أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ من أجل كل $x\in]0;+\infty[$:

f دالة قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}$$
$$=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}$$
$$=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

ومنه: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$

بما أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ و $x^3>0$ على المجال $]0;+\infty[$:

فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$,ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

4- البرهان أنه يوجد مماس (T) لـ (C_f) يوازي (Δ) :

نحل المعادلة: معامل التوجيه $=f'(x)$

$$(\Delta): y=x-1$$
$$f'(x)=1$$

أي

$$\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=1$$
$$\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}-1=0$$
$$\frac{x^3-1+2\ln x-x^3}{x^3}=0$$

$x^3>0$ إشارتها من إشارة $-1+2\ln x$

$$-1+\ln x=0$$
$$\ln x=\frac{1}{2}$$
$$e^{\ln x}=e^{\frac{1}{2}}$$
$$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) بحيث $(T) \parallel (\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$ يكافئ $f'(\sqrt{e}) = 1$

معادلة المماس (T) :

$$y = f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$

$$f'(\sqrt{e}) = 1$$

$$f(\sqrt{e}) = \sqrt{e} - 1 - \frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}^2} = \sqrt{e}-1-\frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e}$$

$$= \sqrt{e}-1-\frac{\frac{1}{2}\ln e}{e} = \sqrt{e}-1-\frac{1}{2e}$$

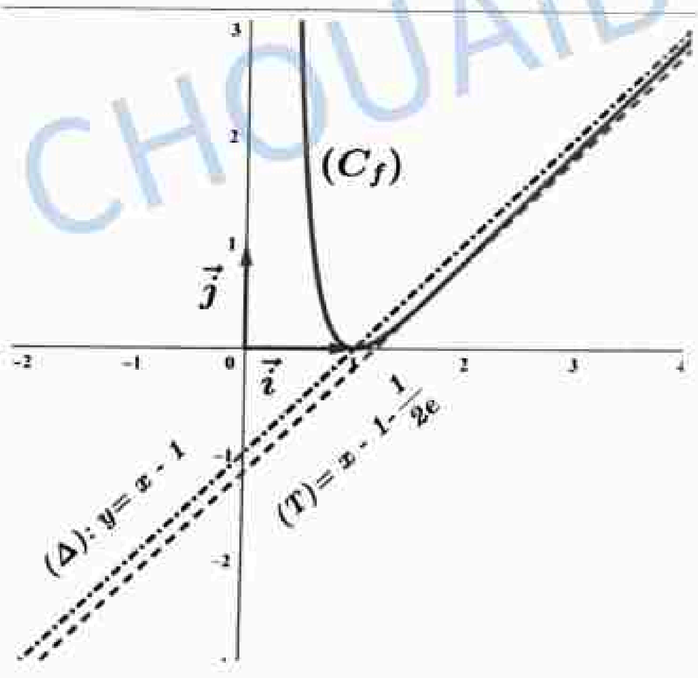
لأن $\ln e = 1$

بالتعويض نجد:

$$y = 1(x-\sqrt{e}) + \sqrt{e} - 1 - \frac{1}{2e}$$

$$(T): y = x - 1 - \frac{1}{2e}$$

5- رسم (C_f) ، (Δ) و (T) :



6-أ- البرهان أن الدالة h زوجية:

تكون h دالة زوجية إذا كان:

$$h(-x) = h(x) \; ; \; -x \in D_h \quad و \quad x \in D_h$$

$$h(-x) = -|-x| + 1 + \frac{\ln|-x|}{x^2} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية و (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

ب- شرح كيفية إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) :

لدينا:

$$h(x) = -|x| + 1 + \frac{\ln|x|}{x^2}$$

$$h(x) = -\left[|x| - 1 - \frac{\ln|x|}{x^2}\right]$$

$$h(x) = -f(|x|)$$

$$|x| = \begin{cases} -x, & x<0 \\ x, & x\ge 0\end{cases}$$

$$h(x) = -f(|x|): \begin{cases} -f(x) & ; x>0 \\ -f(-x) & ; x<0 \end{cases}$$

$h(x) = -f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ معناه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $]0;+\infty[$ ، والجزء من $]0;+\infty[$ نناظره بالنسبة لمحور التراتيب لأن h دالة زوجية.

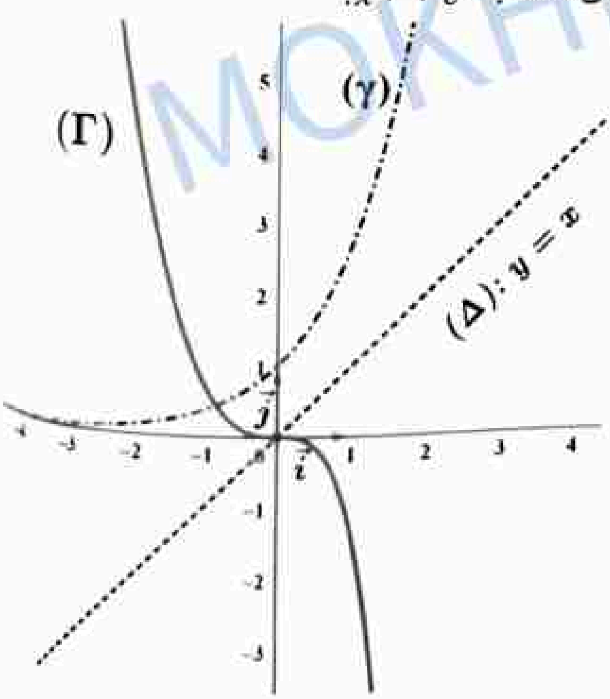
21. بكالوريا 2020 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة اسية شاملة باك 2020 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

1) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشكل المرفق (Γ) المنحني الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$: $g(x) = 2x^2 + 2x - 2xe^x$ ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = x$ و (γ) المنحني الممثل للدالة: $x \longmapsto e^x$.



بقراءة بيانية:

1) برّر أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $0 < e^x - x$

2) حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0) = 0$.

II) الدالّة العدديّة f معرّفة على $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x}$$

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسّر نتيجتي النهايتين هندسيًا.

2-أ) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون:

$$f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$$

2-ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالّة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3-أ) اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0.

3-ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون:

$$f(x) - (2x+1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$$

3-جـ) استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α في المجال $]-\infty;1]$، ثمّ تحقّق أنّ: $-0.6 < \alpha < -0.5$.

5) أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثمّ المنحنى (C_f).

الحل

1-التبرير أن $e^x - x > 0$:

نلاحظ أن (γ) يقع فوق (Δ) يعني: $e^x > x$ أي $e^x - x > 0$

2- تحديد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من البيان نجد:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

كل ما هو فوق محور الفواصل موجب وكل ما هو تحت محور الفواصل سالب والانقطاع يعني ينعدم

1-البرهان أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{2e^x}{e^x - x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{e^x}{e^x}\left(\frac{2}{1-\frac{x}{e^x}}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-1 + \frac{e^x}{e^x}\left(\frac{2}{1-\frac{x}{e^x}}\right)\right) = 1$$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-1 + \frac{2e^x}{e^x - x}\right)$$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

لأن

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$

2-أ- البرهان أن $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$

$$\left(\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}\right)$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - x) - (e^x - 1)2e^x}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - x - e^x + 1)}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)e^2}$$

ب- استنتناج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)e^2}$

$(e^x - x)^2 > 0$ (السؤال الأول الجزء الأول)

و $2e^x > 0$ $(e^x > 0)$

و $1 - x = 0$ أي $x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول التغيرات:

$$f(1) = -1 + \frac{2e^1}{e^1 - 1} = -1 + \frac{2e}{e-1}$$
$$= \frac{-e + 1 + 2e}{e - 1} = \frac{e+1}{e-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	-1 ↗	$\frac{e+1}{e-1}$	↘ 1

3-أ معادلة المماس (T) عند النقطة A .

لدينا: $x_0 = 0$ ونعلم أن:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$\Rightarrow f'(0) = \frac{2e^0(1-0)}{e^0 - 1} = 2$$
$$\Rightarrow f(0) = 1$$

ومنه $(T): y = 2x + 1$

ب- البرهان أن: $f(x) - (2x+1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$

$$f(x) - (2x+1) = -1 + \frac{2e^x}{e^x - x} - 2x - 1$$
$$= \frac{2e^x}{e^x - x} - 2x - 2$$
$$= \frac{2e^x - 2xe^x - 2e^x + 2x^2 + 2x}{e^x - x}$$
$$f(x) - (2x+1) = \frac{g(x)}{e^x - x}$$

ج- استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x) - y = \frac{g(x)}{e^x - x}$

$e^x - x > 0$ (السؤال 1 الجزء الأول)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (T)	(T) يخترق (C_f)	(C_f) يقع تحت (T)

ومنه النقطة A تمثل نقطة انعطاف لـ (C_f) لأن (T) يخترق (C_f) .

4- البرهان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]-\infty; 1]$:

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]-\infty; 1]$:

و
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1 \\ f(1) \approx 2.16 \end{cases}$$

ومنه $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times f(1) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-\infty; 1]$

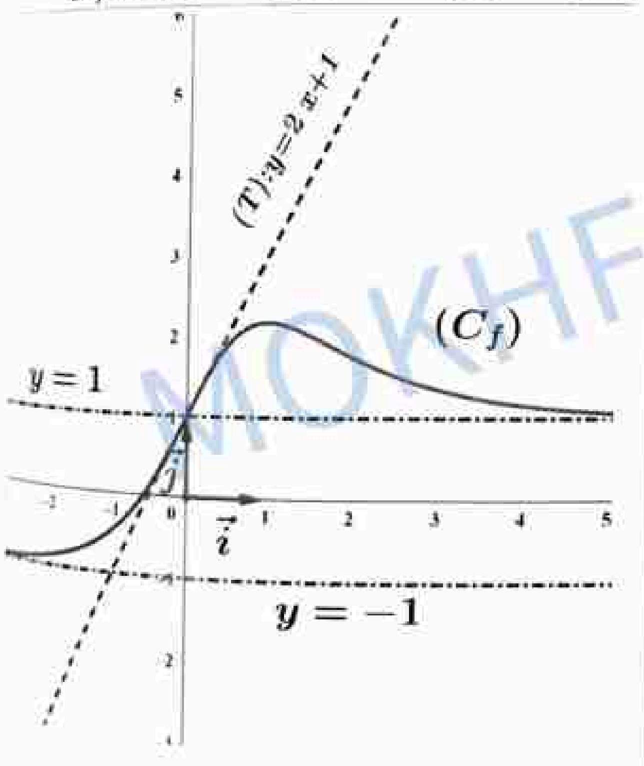
- التحقق أن: $-0.6 < \alpha < -0.5$

$$\begin{cases} f(-0.6) = -0.04 \\ f(-0.5) = 0.096 \end{cases}$$
$$f(-0.6) \times f(-0.5) < 0$$

ومنه $-0.6 < \alpha < -0.5$

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α .

5- إنشاء (T) ، المستقيمين المقاربين و (C_f)



.22 بكالوريا 2019 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية رائعة و شاملة باك 2019 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1}{x-2}+lnx$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)$ ثم فسر النتائج بيانيا

1-ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكل جدول تغيراتها

3- نسمي (Γ) المنحنى البياني للدالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" في المعلم السابق.

3-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-lnx)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

3-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ)

4- ارسم بعناية المنحنى (Γ) و (C_f)

5- H الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_3^x \ln(t)\,dt$ حيث t متغير حقيقي موجب تماما

5-أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين عبارة $H(x)$ بدلالة x

5-ب- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x=3$ و $x=4$

6- g الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ: $g(x)=f(-2x)$ دون حساب عبارة $g(x)$ حدد اتجاه تغير الدالة g على مجموعة تعريفها

الحل

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\>}}\left(\frac{1}{x-2}+lnx\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\<}}\left(\frac{1}{x-2}+lnx\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\>}}\left(\frac{1}{x-2}+lnx\right)=+\infty$$

-التفسير الهندسي

المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما $x=0$ و $x=2$

ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}+lnx\right)=+\infty$$

2-اتجاه تغير الدالة f:

f قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و $]0;2[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x}=\frac{-x+(x-2)^2}{(x-2)^2x}=\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2x}$$

لدينا $f'(x)=0$ يكافئ $x^2-5x+4=0$

للمعادلة جذران هما $x=4$ أو $x=1$

x	0	1		2		4	+∞
x^2-5x+4	+	0	−	−		0	+
$f'(x)$	‖ +	0	−	‖ −		0	+

ومنه f متزايدة تماما على المجالين $]0;1]$ و $[4;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجالين $[1;2[$ و $]2;4]$

-

جدول التغيرات

x	0		1		2		4		+∞
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(1)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(4)$	↗	$+\infty$

3-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-lnx)$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-lnx)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$$

التفسير البياني للنتيجة: (Γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

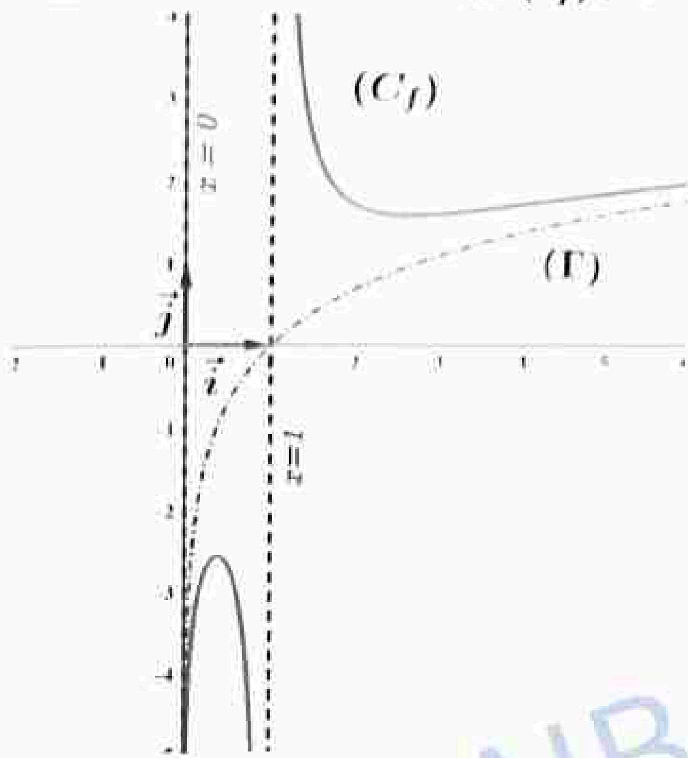
3-ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-lnx$ أي إشارة $\frac{1}{x-2}$ على المجالين $]0;2[$ و $]2;+\infty[$

لدينا $1>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة المقام $(x-2)$

x	0	2	+∞
$f(x)-lnx$	‖ −	‖ +	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Γ)	(C_f) فوق (Γ)	

4-رسم (C_f) و (Γ)



5-H الدالة المعرفة بـ: $H(x) = \int_3^x \ln(t)\,dt$

5-أ-تعيين عبارة $H(x)$

نستعمل المكاملة بالتجزئة: نعتبر الدالتين $u(x)$ و $v(x)$ حيث:

$u(x) = lnt$	$u'(x) = \frac{1}{t}$
$v(x) = t$	$v'(x) = 1$

ومنه:

$$H(x) = \int_3^x \ln(t)\,dt$$
$$H(x) = [tlnt]_3^x - \int_3^x 1\,dt$$
$$H(x) = xlnx - 3ln3 - (x-3)$$
$$H(x) = xlnx - x - 3ln3 + 3$$

5-ب- حساب A

لدينا:

$$A = \int_3^4 f(x)dx$$

ومنه:

$$A = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} + lnx\right) dx$$
$$A = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2}\right) dx + \int_3^4 lnx\,dx$$
$$A = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2}\right) dx + H(4)$$
$$A = [\ln(x-2)]_3^4 + H(4)$$
$$A = ln2 + 4ln4 - 3ln3 - 1$$
$$A = ln2 + 4ln2^2 - 3ln3 - 1$$
$$A = ln2 + 8ln2 - 3ln3 - 1$$

ومنه:

$$A = 9ln2 - 3ln3 - 1\ (u.a)$$

6- تحديد اتجاه تغير الدالة g

لدينا: $g'(x) = -2f'(-2x)$

ومنه $g'(x) = 0$ يكافئ $f'(-2x) = 0$

$\frac{4x^2+10x+4}{(-2x-2)^2(-2x)} = 0$

بحل المعادلة من الدرجة الثانية نجد: $x_1 = -\frac{1}{2}$ أو $x_2 = -2$

إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال

$]-\infty;-2] \cup [-\frac{1}{2};0[$

ومتزايدة تماما على المجال $[-2;-1[\cup]-1;-\frac{1}{2}]$

23. بكالوريا 2019 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة أسية باك 2019 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ توخذ وحدة الطول $2cm$.

(C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = e^x - ex$ ، $f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2$

1-أ-ادرس اتجاه تغير الدالة g.

1-ب-استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f

3-احسب كلا من $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4-ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $\mathbb{R}$

5-ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g) في نفس المعلم السابق. (يعطى: $e^2 - 2e = 2$)

6-احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g).

7-h الدالة المعرفة على المجال $[-2;2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ وليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق

7-أ-بين أن h زوجية

7-ب- من أجل $x \in [0;2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

الحل

1-أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة:

$g'(x) = e^x - e$

$g'(x) > 0$

$\Rightarrow e^x > e$

$\Rightarrow x > 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$
ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$

1-ب- استنتاج إشارة g

لدينا الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى عند 1 أي

$g(x) \geq g(1)$

مع $g(1) = 0$ ومنه $g(x) \geq 0$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$f'(x) = e^x - ex$

ومنه $f'(x) = g(x)$

إذن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي $f'(x) \geq 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

3- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - \frac{1}{2}ex^2\right) = +\infty$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e}{2}\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

-جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4- دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

لدينا: $f(x) - g(x) = e(-\frac{1}{2}x^2 + x)$

ندرس إشارة الفرق:

$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow e\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) = 0$ ومنه

$x_1 = 0$ أو $x_2 = 2$

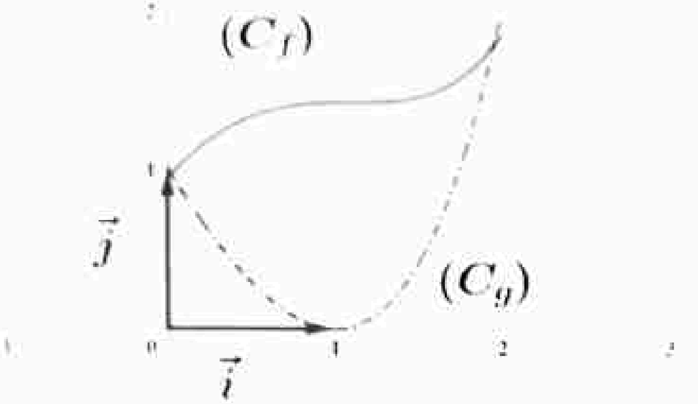
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f-g$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه تكون الوضعية: (C_f) فوق (C_g) في المجال $[0;2]$

(C_f) أسفل (C_g) في المجال $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$

ويتقاطعان في النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2

5-الرسم على المجال $[0,2]$ المنحنيين (C_f) و (C_g)



6-حساب مساحة الحيز المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g)

$A = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx$

$A = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}ex^2 + ex\right)dx$

$A = \left[-\frac{1}{6}ex^3 + \frac{1}{2}ex^2\right]_0^2$

$A = 2e - \frac{4}{3}e\ (u.a)$

$A = \frac{2e}{3}cm^2$

h دالة معرفة بـ: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$

7-أ-تبيان ان h زوجية

لدينا من أجل كل x من المجال $[-2;2]$ $|-x| = x$

$h(-x) = \frac{1}{2}e(-x)^2 - e^{|-x|} = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|} = h(x)$

ومنه h دالة زوجية.

7-ب-حساب $h(x) + f(x)$ من أجل $x \in [0;2]$

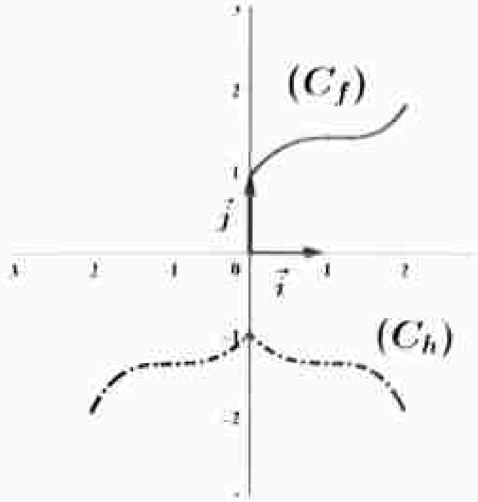
من أجل $x \in [0;2]$ فإن $|x| = x$ ومنه:

$f(x) + h(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 + \frac{1}{2}ex^2 - e^x$

ومنه: $f(x) + h(x) = 0$ أي: $f(x) = -h(x)$

وبالتالي (Γ) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما $x \in [0,.2]$ وبما أن h زوجية فإننا نناظر هذا الجزء بالنسبة لمحور التراتيب

-الرسم



24. بكالوريا 2018 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة اسية باك 2018 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I- g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$$

أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالّة g ثم شكّل جدول تغيّراتها

جـ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $-0{,}38 < \alpha < -0{,}37$

ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن f الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

1-ب-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (2x+1))$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيًا.

1-جـ- ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) حيث: $(\Delta): y = 2x + 1$

2-بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون:

$$f'(x) = g(x)$$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالّة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3-اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

4-ارسم (Δ) ،(T) والمنحنى (C_f) (نأخذ $f(\alpha) = 0.8$).

5-ناقش بيانيًا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x:

$$x = (1-m)e^{x}$$

6-أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالّة الأصلية للدالّة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$

6-ب- احسب العدد A مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 1$ ، $x = 3$ و $y = 2x + 1$.

الحل

I- g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g(x) = 2 + (x-1)e^{-x}$

أ- حساب النّهايات:

حساب النّهاية عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2 + (x-1)e^{-x}) = -\infty$$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

حساب النّهاية عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 + (x-1)e^{-x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= 2$$

ب -دراسة اتجاه تغير g:

الدالّة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = e^{-x} - e^{-x}(x-1)$$
$$= e^{-x} - xe^{-x} + e^{-x}$$
$$g'(x) = (2-x)e^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2-x)$ لأنّ $e^{-x} > 0$

-جدول الإشارة:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	−

الدالّة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$

-جدول تغيّرات الدالّة g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$2 + e^{-2}$	↘	2

$$g(2) = 2 + (2-1)e^{-2}$$
$$= 2 + e^{-2}$$

جـ- البرهان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0{,}38; -0{,}37[$ و

$$\begin{cases} g(-0{,}38) = -0{,}018 \\ g(-0{,}37) = 0{,}016 \end{cases}$$

$g(-0{,}38)\times g(-0{,}37)<0$

و

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلًا وحيدًا α

حيث $-0.38<\alpha<-0.37$

-استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+$

II- f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=2x+1-xe^{-x}$$

1-أ- حساب النّهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x+1-xe^{-x})$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\frac{x}{e^{x}}\right)$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x+1-xe^{-x})$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x(2+\frac{1}{x}-e^{-x})$$
$$=+\infty$$

لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$

1-ب-حساب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(2x+1))$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} 2x+1-xe^{-x}-(2x+1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^{x}}$$
$$=0$$

التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائل عند $+\infty$ معادلته $y=2x+1$

1-جـ دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$

$$f(x)-y=2x+1-xe^{-x}-2x-1$$
$$=-xe^{-x}$$

لدينا: $e^{-x}>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

2- البرهان أنّ $f'(x)=g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=2-(1e^{-x}-e^{-x}(x))$$
$$=2-e^{-x}+xe^{-x}$$
$$=2+(x-1)e^{-x}$$
$$f'(x)=g(x)$$

-استنتاج اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه نجد

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

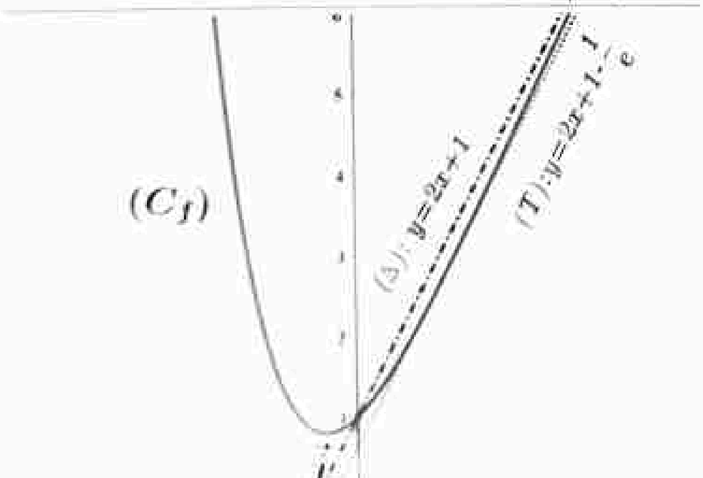
3- معادلة المماس (T) عند نقطة ذات الفاصلة 1

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$f'(1)=2$$
$$f(1)=3-e^{-1}$$

بالتعويض في معادلة المماس.

$$y=2(x-1)+3-e^{-1}$$
$$y=2x-2+3-e^{-1}$$
$$(T):\ y=2x+1-e^{-1}$$

4- الرسم:



5- المناقشة البيانيّة للمعادلة $x=(1-m)e^x$

$x=(1-m)e^x$

$xe^{-x}=1-m$

$-xe^{-x}+1=m$

$2x+1-xe^{-x}=2x+m$

$f(x)=2x+m$

حلول المعادلة $f(x)=2x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=2x+m$ (مناقشة مائلة)

$(T): y=2x+1-e^{-1}$

$(\Delta): y=2x+1$

معناه (Δ_m) يوازي (Δ) ويوازي (T)

1- $m<1-e^{-1}$ لا يوجد حلول للمعادلة

2- $m=1-e^{-1}$ للمعادلة حلّ مضاعف قيمته $x=1$

3- $1-e^{-1}<m<1$ للمعادلة حلاّن موجبان ومتمايزان

4- $m=1$ للمعادلة حلّ وحيد معدوم

5- $m>1$ للمعادلة حلّ وحيد سالب تماما

6-أ- تعيين دالّة أصليّة للدالّة $x\to xe^{-x}$

نستعمل التكامل بالتجزئة حيث نضع:

$u(t)=t$	$u'(t)=1$
$v(t)=-e^{-t}$	$v'(t)=e^{-t}$

$$\int_a^b u.v'=[u.v]_a^b-\int_a^b u'.v$$

$$\int_1^x(te^{-t})dt=[-te^{-t}]_1^x-\int_1^x(-e^{-t})dt$$
$$=-xe^{-x}+e^{-1}+\int_1^x(e^{-t})dt$$
$$=-xe^{-x}+e^{-1}-[e^{-t}]_1^{+x}$$
$$=-xe^{-x}+e^{-1}-e^{-x}+e^{-1}$$
$$\int_1^x(te^{-t})dt=(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$$

ومنه الدالّة الأصليّة لـ $x\to xe^{-x}$ هي الدالّة $x\to(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$

ب- حساب العدد A

$$A=\int_1^3(y-f(x))dx$$
$$=\int_1^3(2x+1-2x-1+xe^{-x})dx$$
$$=\int_1^3(xe^{-x})dx$$

لدينا الدالّة الأصليّة للدالّة $x\to xe^{-x}$ هي الدالّة $x\to(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}$

ومنه:
$$A=[(-x-1)e^{-x}+2e^{-1}]_1^3$$
$$A=-4e^{-3}+2e^{-1}-(-2e^{-1}+2e^{-1})$$
$$A=-4e^{-3}+2e^{-1}\ ua$$

السلسلة الفضية

25. بكالوريا 2018 العلوم التجريبية

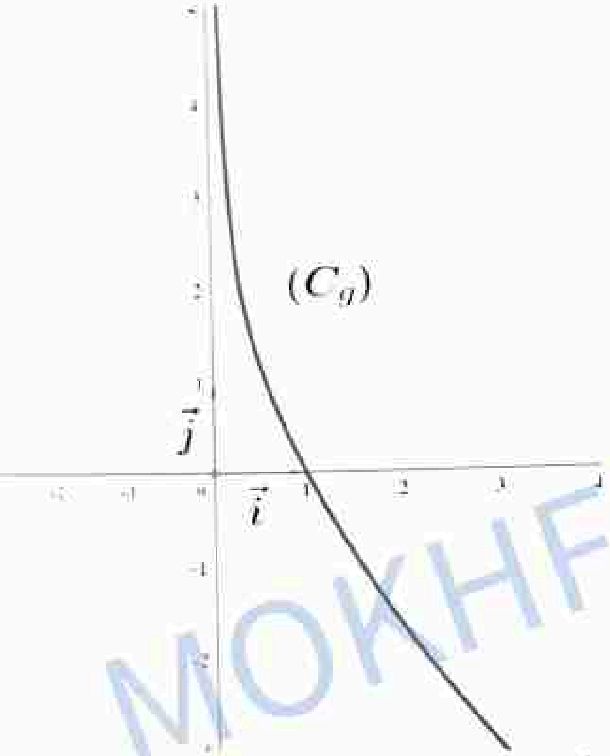
اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك2018 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

I- g الدالّة العدديّة ذات المتغير الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\frac{1}{x}-(\ln x)^2-\ln x-1$$

و (C_g) المنحنى البياني الممثل لها كما هو مبيّن في الشكل المقابل:



-احسب $g(1)$ ثم استنتج بيانيّا إشارة $g(x)$.

II- f الدالّة العدديّة ذات المتغير الحقيقي x المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$ و (C_f) تمثيله البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)$ وبيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ثم فسّر النتيجتين بيانيّا.

2-أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:
$$f'(x)=\frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}.$$

2-ب- استنتج اتجاه تغير الدالّة f وشكّل جدول تغيّراتها.

3- بيّن أنّ $y=\left(\frac{e^2}{e-1}\right)x-\frac{e}{e-1}$ هي معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل، ثم ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

4- عيّن بيانيّا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $(e-1)f(x) = e^2x - me$ حلّين متمايزين.

III- n عدد طبيعي حيث $n > 1$ ، I_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بحامل محور الفواصل والمنحنى (C_f) والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = n$.

1- بيّن أنّه من أجل كل عدد n طبيعي حيث $n > 1$: $I_n = \ln(1 + n\ln n)$.

2- ادرس اتجاه تغير المتتاليّة (I_n)

الحل

I- g دالّة معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$g(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1$$

حساب $g(1)$

$$g(1) = \frac{1}{1} - (\ln 1)^2 - \ln 1 - 1 = 1 - 1 = 0$$

استنتاج إشارة $g(x)$

نلخص ذلك في جدول

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ +	0	−

f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$

1-حساب النّهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1+\ln x}{1+x\ln x} = -\infty$$

لأنّ: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^n \ln x = 0$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيما مقارب شاقولي معادلته $x = 0$ بجوار $-\infty$

البرهان أنّ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ط1:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\ln x}{1+x\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} \frac{\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

لأنّ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

ط2:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} \frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

لأنّ $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

-التفسير البياني:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

2-أ-البرهان أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$

الدالّة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالّتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x\ln x) - \left(\ln x + \frac{1}{x}x\right)(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (1+\ln x)^2}{(1+x\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} + \ln x - (\ln x)^2 - 1 - 2\ln x}{(1+x\ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - (\ln x)^2 - \ln x - 1}{(1+x\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$$

2-ب-استنتاج تغيّرات الدالّة f

بما أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x\ln x)^2}$ والمقام موجب دوما فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه نجد أنّ الدالّة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

-جدول تغيّرات الدالّة f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	0	−
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗	1	↘ 0

3-البرهان أنّ معادلة (T) هي: $y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$

لإيجاد فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$

أي $\frac{1+\ln x}{1+x\ln x} = 0$

معناه أنّ $1 + \ln x = 0$

ومنه $\ln x = -1$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$
$$x = e^{-1}$$

ومنه فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (xx')

هي $x = e^{-1}$

معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x = e^{-1}$

$$y = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1})$$

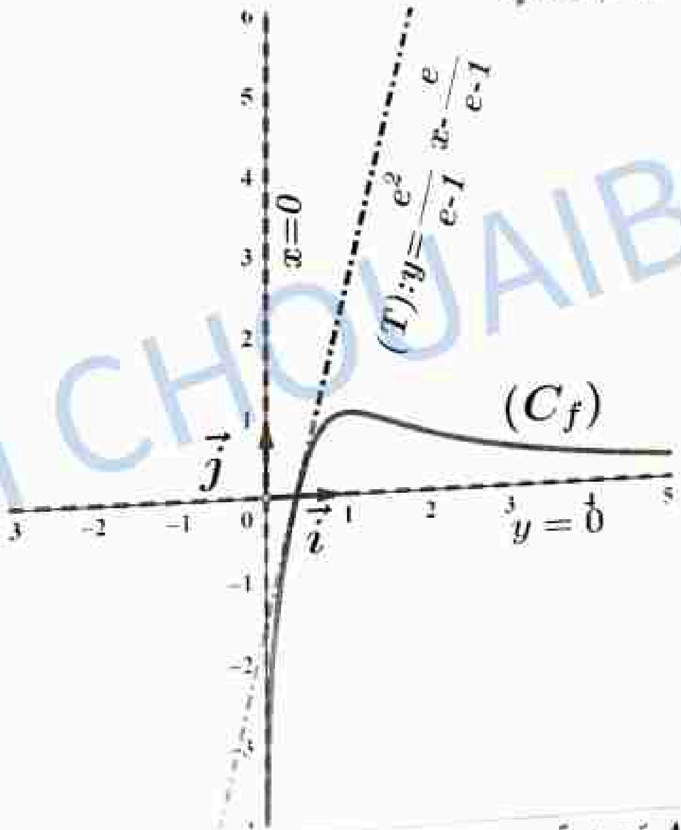
ومنه نجد

$$y = \frac{e^2}{e-1}(x - e^{-1})$$
$$y = \frac{e^2}{e-1}x - \frac{e}{e-1}$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$(T): y = \left(\frac{e^2}{e-1}\right)x - \frac{e}{e-1}$$

الرّسم البياني:



4-تعيين قيم m بحيث المعادلة تقبل حلّين متمايزين

لدينا

$$(e-1)f(x) = e^2x - me$$
$$f(x) = \frac{e^2}{(e-1)}x - \frac{e}{(e-1)}m$$

حلول المعادلة $f(x) = \frac{e^2}{(e-1)}x - \frac{e}{(e-1)}m$ هي

فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة: $y = \frac{e^2}{(e-1)}x - \frac{e}{(e-1)}m$

حيث (T) يوازي (T_m)

حتى يكون للمعادلة حلّان متمايزان يجب أن يكون

$$-\frac{e}{e-1}m < -\frac{e}{e-1}$$

$$\frac{e}{e-1}m > \frac{e}{e-1}$$
$$m > 1$$

أي $m \in]1; +\infty[$

1-البرهان أنّ $I_n = \ln(1 + n\ln n)$ مع $n > 1$

$I_n = \int_1^n \left(\frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\right) dx$

نلاحظ أنّ الدالّة f مكتوبة على الشكل $f(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ مع $h(x) = 1 + x\ln x$

ومنه الدالّة الأصليّة للدالّة h على المجال $]0;+\infty[$ هي:

$$H(x) = \ln(h(x)) = \ln(1 + x\ln x)$$

ومنه:

$$I_n = [\ln(1 + x\ln x)]_1^n$$
$$= \ln(1 + n\ln n) - \ln(1 + 1\ln 1)$$
$$= \ln(1 + n\ln n)$$

2- لدراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) ندرس اشارة الفرق $I_{n+1} - I_n$

> **إذا كان:**
>
> **$I_{n+1} - I_n < 0$ فهي متناقصة**
>
> **$I_{n+1} - I_n > 0$ فهي متزايدة**

$$I_{n+1} - I_n$$
$$= \ln(1 + (n+1)\ln(n+1)) - \ln(1 + n\ln n)$$
$$n + 1 > n > 1$$
$$\ln(n+1) > \ln n > \ln 1$$
$$(n+1)\ln(n+1) > n\ln n > 1\ln 1$$
$$1 + (n+1)\ln(n+1) > 1 + n\ln n > 1$$
$$\ln(1 + (n+1)\ln(n+1)) > \ln(1 + n\ln n) > 0$$
$$\ln(1 + (n+1)\ln(n+1)) - \ln(1 + n\ln n) > 0$$

ومنه $I_{n+1} - I_n > 0$

أي أنّ المتتالية (I_n) متزايدة تماما

26. بكالوريا 2017 العلوم التجريبية01

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2017 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

نعتبر الدالّة العدديّة f المعرّفة على D حيث $D =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- بيّن أنّ الدالة f فردية ثم فسّر ذلك بيانيًا.

2- احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\>}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازين لحامل محور التراتيب.

3-أ- بيّن أنه من أجل كل x من D ، $f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$.

3-ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها

4- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًا وحيدا α حيث $1,8<\alpha<1,9$.

5- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=\frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) ثم ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

6- أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

7- m وسيط حقيقي، ناقش بيانيًا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$(2-3|m|)x+3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 .$$

الحل

f دالة معرّفة على $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{2}{3}x+\ln\frac{x-1}{x+1}$

1- البرهان أنّ الدالة f فردية

بما أنّ D_f متناظرة بالنسبة 0

لأنّ $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

و $x\in D_f$ و $-x\in D_f$

ويجب أن يكون $f(-x)=-f(x)$

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$$
$$= -\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$
$$\left(\ln\frac{a}{b}=-\ln\frac{b}{a}\right)$$
$$=-\frac{2}{3}x-\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=-\left(\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$
$$f(-x)=-f(x)$$

ومنه $f(-x)=-f(x)$ أي الدالة f فردية

التفسير البياني: (C_f) متناظرة بالنسبة إلى مبدأ o "مركز تناظر لـ (C_f) "

2- حساب النّهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$

ط1: بما أنّ الدالة f فردية(متناظرة) فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}x+\ln\frac{x-1}{x+1}\right)=+\infty$$

ط2:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$

-حساب نهاية $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\<}}\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$\lim_{\substack{x\to -1\\<}}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=+\infty$$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=+\infty$

الاستنتاج:

بما أنّ الدالة f متناظرة (فردية) فإنّ :

$$\lim_{\substack{x\to 1\\>}}\left[\frac{2}{3}x+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيمين موازيين لـ(yy')

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\<}} f(x)=+\infty$ معناه : $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) عند $+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\>}} f(x)=-\infty$ معناه: $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) عند $-\infty$

3-أ- البرهان أنّه من أجل $x \in D_f$ فإنّ $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

الدالّة f قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ و $]-\infty,-1[$

ودالتها المشتقة: $f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}\right)}{\frac{x-1}{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x^2-2+6}{3(x^2-1)}$$
$$= \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)} = \frac{2}{3}\frac{(x^2+2)}{(x^2-1)}$$

3-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالّة f

بما أنّ $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$ موجبة تماما على D_f فإنّ الدالّة f متزايدة تماما على المجال :
$]-\infty\,;-1[\cup]1;+\infty[$

-جدول تغيرات الدالّة f

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

4-البرهان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1{,}8;\ 1{,}9[$

و
$$\begin{cases} f(1.8) = -0.05 \\ f(1.9) = 0.1 \end{cases}$$

و
$$f(1.8) \times f(1.9) < 0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث
$$1{,}8 < \alpha < 1{,}9$$

التفسير البياني: (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α.

5-البرهان أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - y$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{2}{3}x\right]$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم $(\Delta): y = \frac{2}{3}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$

دراسة وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ)

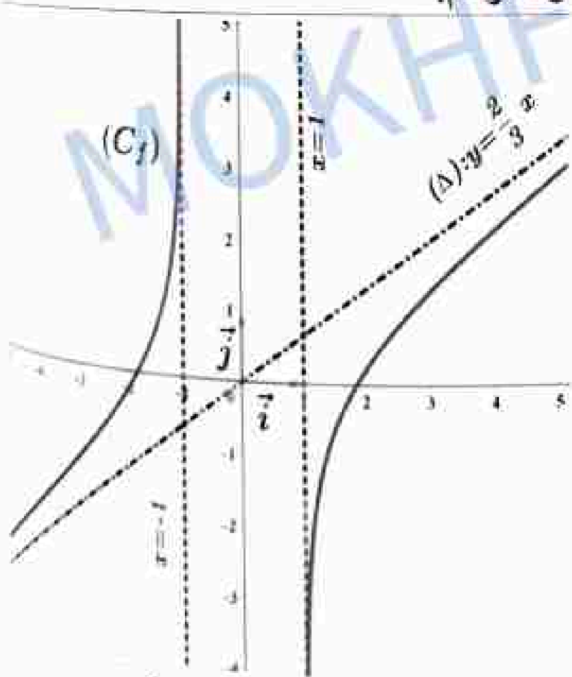
ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على
$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$$[f(x)-y] = \left[-\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{2}{3}x\right]$$
$$[f(x)-y] = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{x-1-x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} \neq 0$$

ومنه الإشارة من إشارة البسط على المقام

x	$-\infty$ -1	-1 1	1 $+\infty$
-2	−	−	−
$x+1$	− 0	+	+
$f(x)-y$	+		−
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

6- الرسم:



7- المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$
$$2x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 3|m|x$$
$$\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = |m|x$$

$f(x) = |m|x$

الحلول البيانيّة للمعادلة $f(x) = |m|x$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = |m|x$

1- الحالة الأولى:

$$|m| \geq 0$$

$$0 \leq |m| < \frac{2}{3}$$

$$|m| < \frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$$

للمعادلة حلّان متمايزان أحدهما موجب والأخر سالب

2- الحالة الثانية: $|m| > \frac{2}{3}$

$m \in]-\infty ; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3} ; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

27. بكالوريا 2017 العلوم التجريبية01

اليوتيوب: دالة اسية باك 2017 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

I-نعتبر الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-I بيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة،ثمّ احسب النّهاية $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2-I-أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$.

2-ب-ادرس اتجاه تغيّر الدالّة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3-اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f)عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II-نعتبر الدالّة العدديّة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = 1 - xe^{1-x}$.

1-بيّن انّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ: $h(x) \geq 0$ ، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T).

2- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$.

3- أنشئ المماس (T) والمنحى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

4- F الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$.

تحقّق أنّ F دالّة أصليّة للدالّة f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

الحل

I- f دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

1-البيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

لدينا
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
ومنه
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2 - x^2e^{-x}e^1)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{x^2}{e^x}e^1\right) = 2$$

-التفسير الهندسي:

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالّة f بجوار $+\infty$

حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2 - x^2e^{1-x})$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (2 - x^2e^{-x}e^1)$$
$$= -\infty$$

2- أ- البيان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة.

$$f'(x) = 0 - (2xe^{1-x} - e^{1-x}x^2)$$
$$= -(2x - x^2)e^{1-x}$$
$$= (x^2 - 2x)e^{1-x}$$
$$= (-2x + x^2)e^{1-x}$$
$$f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$$

2-ب -دراسة اتجاه تغير الدالّة f

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 0$$
$$\Rightarrow x(x-2)e^{1-x} = 0$$

نعلم أنّ $x \in \mathbb{R}$

$$e^{1-x} > 0$$
$$x(x-2) = 0$$

إمّا $x = 0$ أو $x - 2 = 0$

أي $x = 0$ أو $x = 2$

-جدول الإشارة

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالّة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;2]$

جدول التغيّرات

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2-\frac{4}{e}$	$\nearrow$	2

3- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

بالتعويض نجد

$$y = -1(x-1) + 1$$
$$y = -x + 1 + 1$$
$$(T): y = -x + 2$$

إذن معادلة المماس (T) هي $(T): y = -x + 2$

II- الدالّة العدديّة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي
$$h(x) = 1 - xe^{1-x}$$

1- البرهان أنّ $h(x) \geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

نقوم بدراسة تغيّرات الدالّة h على $\mathbb{R}$

-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 - xe^{1-x})$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (1 - xe^{-x}e^1)$$
$$= +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - xe^{1-x})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{e^x}e^1\right)$$
$$= 1$$

حساب المشتقة: الدالّة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$h'(x) = -(1e^{1-x} - e^{1-x}x)$$
$$= -e^{1-x} + xe^{1-x}$$
$$h'(x) = (x-1)e^{1-x}$$

-دراسة إشارة $h'(x)$

$$h'(x) = 0$$

يكافئ

$$(x-1)e^{1-x} = 0$$

مهما يكن $x \in \mathbb{R}$ فإن $e^{1-x} > 0$

$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

-جدول الإشارة:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

الدالّة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty,1]$
ومتزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$

-جدول التغيرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

من جدول التغيرات نستنتج أنّ $h(x) \geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

-دراسة الوضع النسبي للمنحنى (c_f) والمماس (T)

ندرس إشارة الفرق بين $f(x)-y$

$$f(x)-y = 2-x^2e^{1-x}+x-2$$
$$= -x^2e^{1-x}+x$$
$$= x(1-xe^{1-x})$$
$$f(x)-y = xh(x)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	(C_f) يمس (T)	(C_f) فوق (T)	

2-البرهان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α

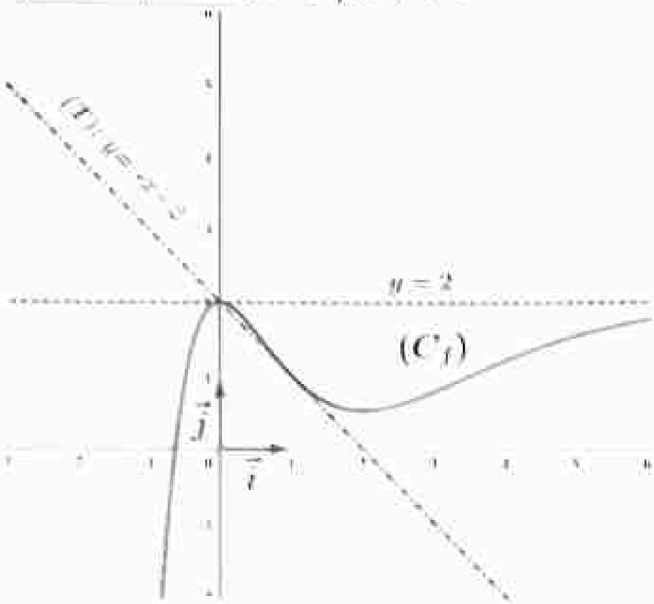
بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.7;-0.6[$ ولدينا:

و $\begin{cases} f(-0.7) = -0.7 \\ f(-0.6) = 0.2 \end{cases}$

و $f(-0.7)\times f(-0.6) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فانّ:
المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α
حيث $-0.7 < \alpha < -0.6$

3-إنشاء المماس (T) و (C_f) على المجال $]-1;+\infty[$



I4- التحقق أنّ F دالّة أصليّة لـ f على $\mathbb{R}$

تكون F دالّة أصليّة لـ f إذا تحقّق $F'(x)=f(x)$
الدالّة F قابلة للاشتقاق على R

$$F'(x) = 2+(2x+2)e^{1-x}-e^{1-x}(x^2+2x+2)$$
$$= 2+(2x+2-x^2-2x-2)e^{1-x}$$
$$= 2-x^2e^{1-x}$$
$$= f(x)$$

ومنه $F'(x)=f(x)$
إذن F دالّة أصليّة لـ f على $\mathbb{R}$

-حساب مساحة الحيز (A)

$$(A) = \int_0^1 (f(x)-y)\,dx$$

إذا كانت المساحة أسفل المنحنى نقول أن
$$\int_1^n (f(x)-y)\,dx$$
وإذا كانت فوق المنحنى نقول $\int_1^n (y-f(x))\,dx$

$$(A) = \int_0^1 (f(x)-0)\,dx$$
$$= [F(x)]_0^1$$
$$= [2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}]_0^1$$
$$= (2+(1^2+2+2)e^0)-(0+(0+0+2)e$$
$$(A) = 7-2e\ (ua)$$

28. بكالوريا 2017 العلوم التجريبية 02

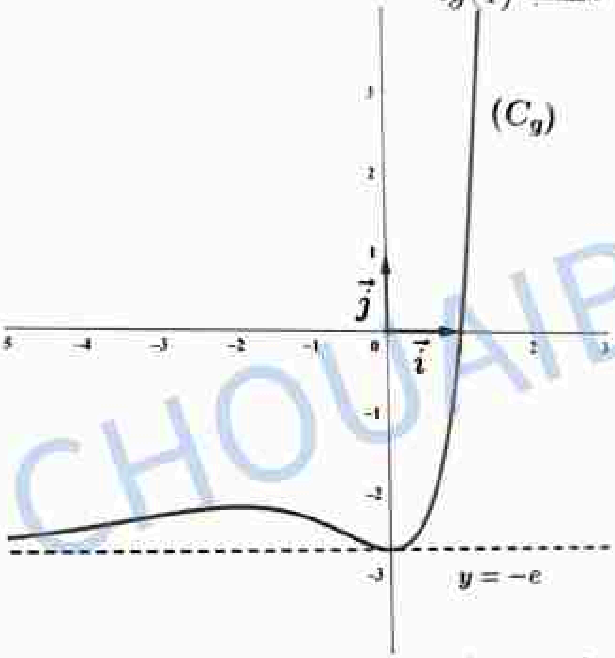
الموضوع: دالة اسية باك 2017 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I- نعتبر الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2e^x - e$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$ (كما هو في الشكل المقابل).

- احسب $g(1)$.



- بقراءة بيانيّة عيّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي.

II- نعتبر الدالّة f المعرّفة على المجموعة $\mathbb{R}^*$ كما يلي:
$$f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$$

(C_f) التّمثيل البياني للدالّة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب النّهايات الآتية:
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- بيّن أنّ المنحنى (γ) الذي معادلته: $y = e^{-x} - 2$ والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$ ثم ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى (γ).

3- بيّن انّه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$

4- استنتج أنّ الدالّة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1[$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f

5- بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة: $x \to e^x$ ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين (γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق.

6- ليكن n عددا طبيعيا و $A(n)$ مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (γ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -e^n$ و $x = -e^{n+1}$.
احسب العدد الحقيقي l حيث
$$l = A(0) + A(1) + \dots + A(2016)$$

الحل

I- g دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2e^x - e$

حساب $g(1)$

$g(1) = 1^2e^1 - e = e - e = 0$

تعيين إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

استنتاج إشارة $g(-x)$

منحنى الدالّة g و g' حيث $g'(x) = g(-x)$ متناظران بالنّسبة إلى محور التراتيب فإنّ إشارتهم واشارة الحل تعكس

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(-x)$	$+$	0	$-$

II- f معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$

1- حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}\right) = -2$$

$y = -2$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\<}}\left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}\right) = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) عند $+\infty$

2- البرهان أنّ المنحنى (γ) والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $-\infty$

$$f(x) - y = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x} - (e^{-x} - 2) = -\frac{e}{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{e}{x}\right) = 0$$

ومنه (γ) والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $\pm\infty$

دراسة وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (γ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على $\mathbb{R}^*$

$$f(x)-y=-\frac{e}{x}=e\left(\frac{1}{-x}\right)$$

و $e>0$ أي إشارة الفرق من إشارة $\left(-\frac{1}{x}\right)$ أي من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	‖	$-$	
الوضعية		(γ) فوق (C_f)	‖	(γ) تحت (C_f)	

3-البرهان أنّ $f'(x)=\left(-\frac{g(-x)}{x^2}\right)$

$$\begin{aligned}g(-x)&=(-x)^2e^{-x}-e\\&=x^2e^{-x}-e\end{aligned}$$

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي:

$$\begin{aligned}f'(x)&=-e^{-x}+\frac{e}{x^2}=\frac{-x^2e^{-x}+e}{x^2}\\&=-\frac{x^2e^{-x}-e}{x^2}=-\frac{g(-x)}{x^2}\end{aligned}$$

4-الاستنتاج اتجاه تغير $f(x)$

لدينا $f'(x)=\left(-\frac{g(-x)}{x^2}\right)$ ونعلم أنّ $x^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(-x)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	

ومنه الدالةf متزايدة تماما على المجالين $]-1;0[$ و $]0;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

-جدول تغيرات الدالّة f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$2e-2$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-2

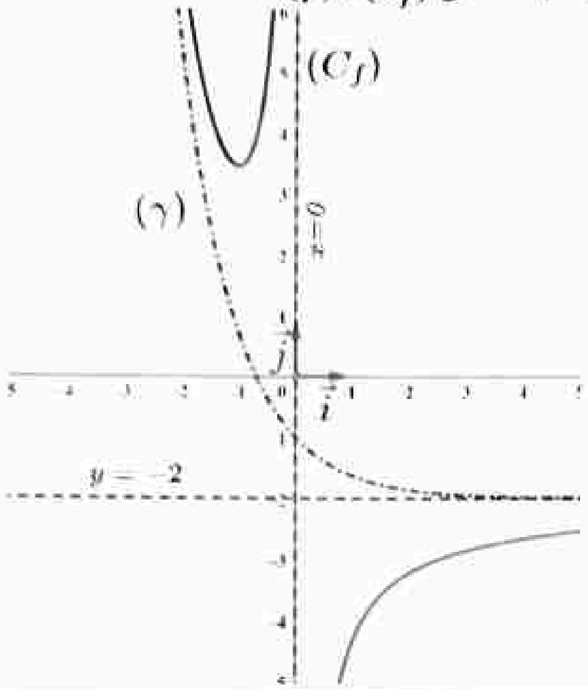
5- بيان كيف يمكن إنشاء (γ) انطلاقا من منحنى الدالة $x\mapsto e^x$

أولا: منحنى الدالّة $x\to e^{-x}$ هو نظير منحنى الدالّة $x\to e^x$ بالنّسبة إلى محور التراتيب

ثانيا: منحنى (γ) هو صورة منحنى الدالّة $x\to e^{-x}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{0}{-2}$

ملاحظة: $e^x \xrightarrow[\text{تناظر بالنسبة}(yy')]{} e^{-x} \xrightarrow[\text{الانسحاب}]{} \gamma$

-رسم المنحنى (C_f) و(γ)



6-حساب $A(n)$

$-e^n>-e^{n+1}$

ومنه

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}(f(x)-y)\,dx$$

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(e^{-x}-2-\frac{e}{x}-\left(e^{-x}-2\right)\right)dx$$

$$A(n)=\int_{-e^{n+1}}^{-e^n}\left(-e\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx$$

$$A(n)=\left[-e\ln|x|\right]_{-e^{n+1}}^{-e^n}$$

$$A(n)=-e\left(\ln|-e^n|-\ln|-e^{n+1}|\right)$$

$$A(n)=-e\left(n\ln|-e|-(n+1)\ln|-e|\right)$$

$$A(n)=-e(-1)$$

$$\boldsymbol{A(n)=e\quad(u.a)}$$

حساب العدد الحقيقي l

$$A(n)=e$$

الجمع طرفا إلى طرف نجد

$A(0)=e$
$+$
$A(1)=e$
$+$
$A(2)=e$
$+$
$\vdots$
$A(2016)=e$

$l=e+e+e+\cdots e$

$(2016-0+1)$ مرة

$l = e(2017)$

ومنه

$$l = 2017e\ (ua)$$

29. بكالوريا 2017
العلوم التجريبية 02

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2017 شعبة علوم تجريبية للمقصيين

الموضوع الثاني

I- نعتبر f الدالّة العدديّة المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

كما يلي: $f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- احسب النهايتين: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} f(x)$

ثم فسّر النتيجتين بيانيا.

2-أ- بيّن أنّه: من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ ،

$$f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالّة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3- حل في المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ المعادلة $f(x) = 0$ ،

ثم استنتج إشارة $f(x)$.

4- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثييها، ثم أنشئ (C_f) .

II- لتكن الدالّة g المعرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي:

$$g(x) = 2[-x + \ln(2x+1)]$$

1-أ- ادرس اتجاه تغير الدالّة g.

1-ب- بيّن أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلّين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $1{,}2 < \alpha < 1{,}3$

1-جـ- استنتج إشارة $g(x)$.

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1:

$I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx.$

- أثبت أنه: من أجل كل $x \geq \frac{3}{2}$ ،

$$0 < f(x) < \frac{1}{2x+1}$$

ثم استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

✍ الحل

I- f معرّفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$f(x) = \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$

1-حساب النهايتين :

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

نضع $t = 2x+1$ لمّا $x \xrightarrow{>} -\frac{1}{2}$ فإنّ $t \xrightarrow{>} 0$

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{1+2\ln t}{(t)^2}$$

$$= -\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x = -\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}$$

نضع $t = 2x+1$

لمّا $x \to +\infty$ فإنّ $t \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1+2\ln t}{(t)^2}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t^2} + \frac{2\ln t}{t^2}$$

$$= 0$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي لـ C_f بجوار $+\infty$

2-ب- البرهان أنّ $f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$ **من أجل** $x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

الدالّة f قابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{\frac{2(2)}{2x+1}(2x+1)^2 - 4(2x+1)(1+2\ln(2x+1))}{(2x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(4-4-8\ln(2x+1))}{(2x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-8\ln(2x+1)}{(2x+1)^3}$$

2-جـ-دراسة اتجاه تغير الدالّة f

لدراسة اتجاه تغير $f(x)$ ندرس إشارة $f'(x)$

$(2x+1)^3 > 0$ على المجال $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-8\ln(2x+1)$

$-8\ln(2x+1) > 0$

$\Rightarrow \ln(2x+1) < 0$

$\Rightarrow 2x+1<1$

$\Rightarrow x<0$

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه الدالّة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;0\right]$

ومتناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

3-حل المعادلة $f(x)=0$ في المجال: $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$f(x)=0$

$\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}=0$

$1+2\ln(2x+1)=0$

$\ln(2x+1)=-\frac{1}{2}$

$2x+1=e^{-\frac{1}{2}}$

$x=\frac{e^{-\frac{1}{2}}-1}{2}$

ولدينا $\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}-1}{2}\in\left]-\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$

ومنه $S=\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}}-1}{2}\right\}$

-استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{e^{-\frac{1}{2}}-1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4- برهان أنّ (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω وإنشاء (C_f)

حتى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يجب أن تنعدم المشتقة الثانية $f''(x)$ وتغير اشارتها

$f'(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

$f''(x)=\frac{-\frac{8(2)}{2x+1}(2x+1)^3-3(2)(2x+1)^2(-8\ln(2x+1))}{(2x+1)^6}$

$f''(x)=16\frac{(-1+3\ln(2x+1))}{(2x+1)^4}$

أي $f''(x)=0$

$16\frac{(-1+3\ln(2x+1))}{(2x+1)^4}=0$

$(-1+3\ln(2x+1))=0$

$3\ln(2x+1)=1$

$x=\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2}$

-جدول الإشارة لـ $f''(x)$

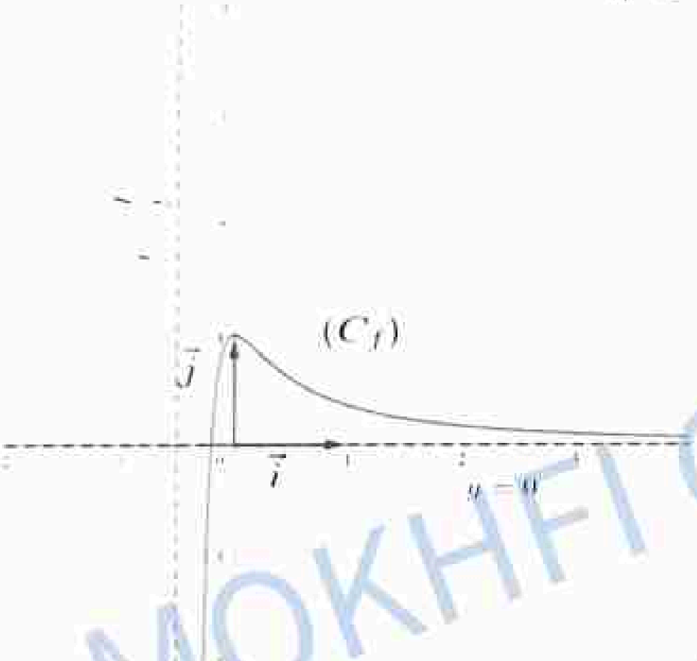
x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند

$A\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2};f\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2}\right)\right)$

ومنه $A\left(\frac{e^{\frac{1}{3}}-1}{2}\,,\frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}\right)$

الرسم:



II- g معرّفة على المجال $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ بـ:

$g(x)=2(-x+\ln(2x+1))$

1-أ- دراسة اتجاه تغير الدالّة g

الدالّة g قابلة للاشتقاق على $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ ودالتها المشتقة $g'(x)=2\left(-1+\frac{2}{2x+1}\right)$

$g(x)=2\left(\frac{-2x+1}{2x+1}\right)$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x+1$ لأنّ $2x+1>0$ على $\left]-\frac{1}{2}\,,+\infty\right[$

جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

الدالّة g متزايدة تماما على المجال $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

1-ب- البرهان أنه للمعادلة $g(x)=0$ حلّين

$$g(0) = 2(-0+2\ln(2(0)+1)) = 0$$

ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$

بما أن الدالّة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإنها مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1.2\,;1.3[$

و $\begin{cases} g(1.2)\simeq 0.5 \\ g(1.3)\simeq -0.04 \end{cases}$

و $g(1.2)\times g(1.3)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا α حيث: $1.2<\alpha<1.3$

1-جـ-استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\frac{1}{2}$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2- إثبات أنّه من أجل $x\geq\frac{3}{2}$ فإن : $0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$

يكفي أن نبرهن أنّ $f(x)<\frac{1}{2x+1}$ و $0<f(x)$

نعلم أنه من أجل $x\geq\frac{3}{2}$ فإن $0<f(x)$ (محققة)

$f(x)<\frac{1}{2x+1}$ يعني أنّ $f(x)-\frac{1}{2x+1}<0$

$$f(x)-\frac{1}{2x+1}=\frac{1+2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}-\frac{1}{2x+1} = \frac{2\ln(2x+1)-2x}{(2x+1)^2}$$

$$f(x)-\frac{1}{2x+1} = \frac{g(x)}{(2x+1)^2}$$

لدينا $g(x)<0$ في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

و $(2x+1)^2>0$ في المجال $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

ومنه $f(x)-\frac{1}{2x+1}<0$ لمّا $x\geq\frac{3}{2}$

$$0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$$

-استنتاج ان: $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

$$0<f(x)<\frac{1}{2x+1}$$

لدينا

$$0<\int_n^{n+1} f(x)dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$$

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_n^{n+1}\frac{2}{2x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}[\ln(2x+1)]_n^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2n+3}{2n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2n}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln 1) = 0$$

ومنه حسب خواص الحصر $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$

لأن $0<I_n<\int_n^{n+1}\frac{1}{2x+1}dx$

30. بكالوريا 2016 العلوم التجريبية 01

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2016 علوم تجريبية

الموضوع الأول

I-g الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1-ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2-احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)>0$

II-f الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+x-1$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2-أ-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

2-ب- شكل جدول تغيّرات الدالّة f .

3-اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها $x=1$

4-أ-بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث: $y=x-1$ معادلة له.

4-ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ).

5-ارسم المستقيمين (T) و (Δ) ثم المنحنى (C_f).

6-m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم ذو المعادلة: $y=mx-m$

6-أ-تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي m النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m).

6-ب-ناقش بيانيًا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx - m$

7-أ- جد دالة أصليّة للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على $]0;+\infty[$.

7-ب- احسب I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = n$ حيث n عدد طبيعي $(n > 1)$.

7-جـ- عيّن أصغر عدد طبيعي n_0 بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ $I_n > 2$

الحل

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ:

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x$$

1-دراسة اتجاه تغير الدالّة g على $]0;+\infty[$

الدالّة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$

نعلم أنّ $x > 0$ في $]0;+\infty[$

ومنه إشارة المشتقة من إشارة $2x^2 - 1$

$$2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مرفوض لأن $-\frac{\sqrt{2}}{2} \notin D_g$

الدالّة g متناقصة تماما على المجال $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[$

ومتزايدة تماما على المجال $]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$

2- حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3+\ln 2}{2}$$

لأنّ $\frac{3+\ln 2}{2} > 0$

البرهان أنه إذا كان $x \in]0;+\infty[$ فإنّ $g(x) > 0$

ط1-

من جدول التغيّرات نجد أنّ $g(x) > \frac{3+\ln 2}{2}$ و $\frac{3+\ln 2}{2} > 0$ أي أنّ $g(x) > 0$

ط2-

لدينا الدالة g متناقصة تماما على $]0;\frac{\sqrt{2}}{2}[$ ومتزايدة تماما على $]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$ و $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

أي $\frac{3+\ln 2}{2}$ قيمة حدية صغرى للدالّة g لكنها موجبة تماما أي $g(x) > 0$

II- f دالّة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$$

1-حساب النهايات

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} + x - 1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} + x - 1 = +\infty$$

2-أ- البرهان أنّ من أجل $x \in]0;+\infty[$ فإنّ

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1\ln x}{x^2} + 1 = \frac{1 - \ln x + x^2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ $x^2 > 0$ على $]0;+\infty[$

نعلم أنّ $g(x) > 0$

ومنه الدالّة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2-ب- جدول تغيّرات الدالة f على $]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3-معادلة المماس (T) عند $x_0 = 1$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = 2(x-1) + 0$

$y = 2x - 2$

4-أ- البرهان أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$

حتى يكون (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$ يجب أن يكون $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-y = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+x-1-x+1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4-ب- دراسة الوضعيّة النسبية لـ (Δ) و (C_f)

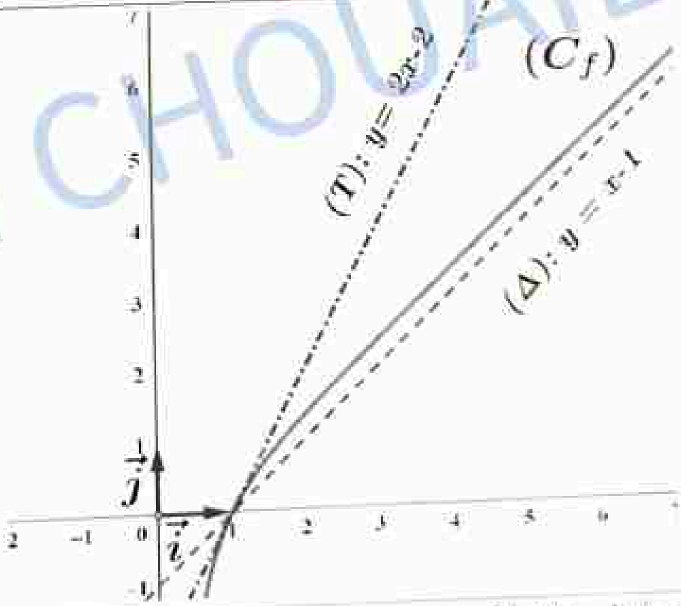
ندرس إشارة الفرق بين $f(x)-y$ على $]0\,;+\infty[$

$$f(x)-y=\frac{\ln x}{x}$$

لدينا $x>0$ على $]0\,;+\infty[$ فإنّ إشارة الكسر من إشارة البسط $\ln x>0 \Rightarrow x>1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

5-رسم (T) و (Δ) ثم المنحنى (C_f)



6-أ-البرهان أنّ $A\in\Delta_m$

$y=mx-m$
$0=m(1)-m$
$0=m-m$
$0=0$

محققة ومنه $A\in\Delta_m$

6-ب-المناقشة البيانية $f(x)=mx-m$

$f(x)=m(x-1)$

حلول المعادلة $f(x)=m(x-1)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=mx-m$

(مناقشة دورانية):

-1 $m\in]-\infty;1[$ للمعادلة حلّ وحيد $x=1$

-2 $m\in]1;2[$ للمعادلة حلّان متمايزان $x_1=1$ و $2<x_2<1$

-3 $m=2$ للمعادلة حلّ وحيد $x=1$

-4 $m\in]2;+\infty[$ للمعادلة حلّان متمايزان $x_1=1$ والآخر $x<1$

7-أ- إيجاد دالّة أصليّة لدالّة $x\to\frac{\ln x}{x}$ على $]0\,;+\infty[$

$$\frac{1}{x}(\ln x)\xrightarrow{\text{دالتها الأصلية}}\frac{(\ln x)^2}{2}$$

7-ب- حساب I_n

$$I_n=\int_1^n (f(x)-y)\,dx$$

إذا كانت المساحة أسفل المنحنى نضع
$$\int_1^n (f(x)-y)\,dx$$
وإذا كانت فوق المنحنى نضع $\int_1^n (y-f(x))\,dx$

$$I_n=\int_1^n\left(\frac{\ln x}{x}+x-1-x+1\right)dx$$
$$I_n=\int_1^n\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^n$$
$$I_n=\frac{(\ln n)^2}{2}\ ua$$

7-ج- تعيين n_0

$I_n>2$
$\frac{(\ln n)^2}{2}>2$
$(\ln n)^2>4$
$(\ln n)^2-4>0$

تبديل المتغير : نضع $t=\ln n$

جذرا العبارة t^2-4 هما $t_2=-2$ و $t_1=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
t^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

$t_1>2\Rightarrow \ln n>2$
$n>e^2$
$n>7.3$

ومنه $n_0=8$

31. بكالوريا 2016 العلوم التجريبية 01

الموضوع : دالة أسية شاملة باك 2016 علوم تجريبية

الموضوع الثاني

I- g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$.

1-أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالّة g ،ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ- بيّن أنه للمعادلة $g(x) = 0$ حلّين في $\mathbb{R}$ ،احدهما معدوم و الاخر α حيث: $-1,52 < \alpha < -1.51$.

2-ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ،(وحدة الطول $1cm$).

1-أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

1-ب- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$. (حيث f' هي الدالّة المشتقة للدالّة f)

1-جـ شكّل جدول تغيّرات الدالّة f على $\mathbb{R}$ ، (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,38$).

1-د- عيّن دون حساب: $\lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2-أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

2-ب- ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة للمستقيم (Δ).

2-جـ بيّن أنّه للمنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثييهما.

2-د- ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

2-هـ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$(m - x)e^{x} + (x^2 + 3x + 2) = 0$

على المجال $]-2;+\infty[$.

III- h و H الدالّتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$h(x) = x + f(x)$ و

$H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

1- عيّن الأعداد الحقيقية a،b و c حتّى تكون الدالّة H دالّة أصلية للدالّة h على $\mathbb{R}$

2-أ- احسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^{\lambda} h(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا.

2-ب- احسب $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

الحل

1- g دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$$

1-أ-حساب النّهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x} = +\infty$$

لأنّ: $\lim_{x\to-\infty} (x^2 + x - 1) = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = 1$$

1-ب-دراسة اتجاه تغير الدالّة g على $\mathbb{R}$

بما أنّ الدالّة g هي جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإنّ دالتّها المشتقة هي

$$g'(x) = (2x + 1)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + x - 1) = (2x + 1 - x^2 - x + 1)e^{-x} = (-x^2 + x + 2)e^{-x}$$

لدينا $e^{-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x^2 + x + 2$

$-x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \Delta = 9$

$x_1 = 2$

$x_2 = -1$

-جدول إشارة المشتقة

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالّة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1] \cup [2;+\infty[$

ومتزايدة تماما على المجال $[-1;2]$

-جدول التغيّرات الدالّة g

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$1-e^{1}$	↗	$1+5e^{2}$	↘	1

2-أ- البرهان أنّه للمعادلة $g(x)=0$ حلّان

$g(0)=1+(0^2+0-1)=0$

أي أنّ 0 حلّا للمعادلة $g(x)=0$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال$]-\infty;-1[$ فإنها مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1.52,-1.51[$

و
$$\begin{cases} g(-1.52)=0.05 \\ g(-1.51)=-0.02 \end{cases}$$

و $g(-1.52)\times g(-1.51)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث

$-1.52<\alpha<-1.51$

2-ب-استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من جدول التغيّرات نستنتج

-جدول الإشارة

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II- f الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=-x+(x^2+3x+2)e^{-x}$$

1-أ- حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{x^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}+\frac{3x}{e^x}\right)=-\infty$$

1-ب- البرهان أنّ $f'(x)=-g(x)$

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على R

$f'(x)=-1+(2x+3-x^2-3x-2)e^{-x}$

$=-(1+(x^2+x-1)e^{-x})$

$f'(x)=-g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالّة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;0]$

1-ج-جدول تغيّرات الدالّة f

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0.38	↗	2	↘	$-\infty$

1-د-تعيين دون حساب $\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$
$$=f'(\alpha)$$
$$=-g(\alpha)$$
$$=0$$

ومنه: الدالّة f قابلة للاشتقاق و (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $(\alpha;0.38)$ معامل توجيهه يساوي 0 أي مماسا أفقيا معادلته $y=0.38$

2-أ- البرهان أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}(x^2+3x+2)e^{-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{3x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$$
$$=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

2-ب-دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على R

$f(x)-y=(x^2+3x+2)e^{-x}$

$e^{-x}>0$ أي الإشارة من إشارة x^2+3x+2

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)	

2-جـ- البرهان أنّ (C_f) يقبل نقطتي انعطاف

نقطة الانعطاف: يجب أن تنعدم المشتقة الثانية وتغير إشارتها

$f'(x)=-g(x)$

$f''(x)=-g'(x)$

$=(x^2-x-2)e^{-x}$

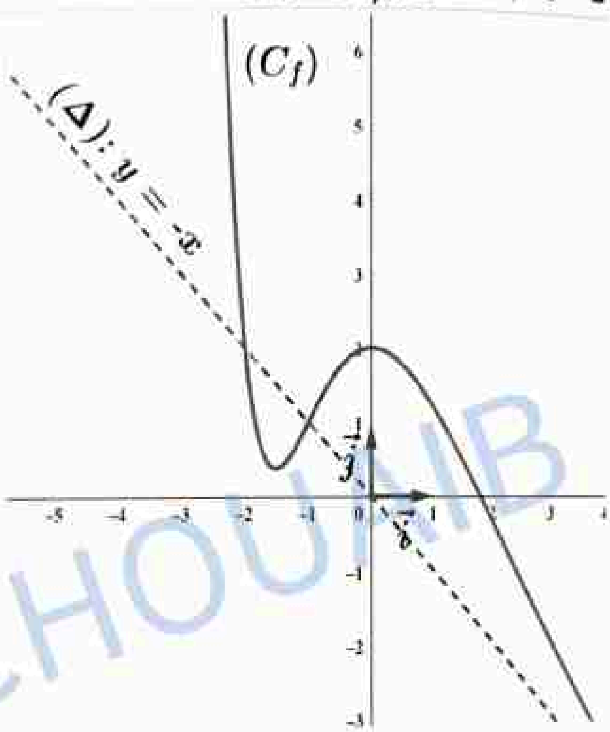
جدول الإشارة

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه (C_f) له نقطتي انعطاف $A(-1, f(-1))$, $B(2, f(2))$

إذن $A(-1,1)$ و $B(2,-2+12e^{-2})$

2-د-رسم المنحنى (C_f) و (Δ)



2-هـ المناقشة البيانيّة

$$(x^2+3x+2) = -(m-x)e^x$$
$$\frac{x^2+3x+2}{e^x} = -(m-x)$$
$$\frac{x^2+3x+2}{e^x} = -m+x$$
$$-x+(x^2+3x+2)e^{-x} = -m$$
$$f(x) = -m$$

حلول المعادلة $f(x) = -m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ ومنه $m = -y$

-1 $m \in]-0.38;+\infty[$ فإنّ $y \in]-\infty; 0.38[$ للمعادلة حلّ موجب

-2 $m = -0.38$ فإنّ $y = 0.38$ للمعادلة حلان احدهما موجب والاخر مضاعف

-3 $m \in]-2;-0.38[$ فإنّ $y \in]0.38; 2[$ للمعادلة ثلاثة حلول حلّان سالبين وحل موجب

-4 $m = -2$ فإنّ $y = 2$ للمعادلة حلان أحدهما معدوم والآخر سالب

-5 $m \in]-\infty;-2[$ فإنّ $y \in]2;+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

1-تعيين a و b و c حتى تكون $H'(x) = h(x)$

$$H'(x) = (a2x+b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c)$$
$$= (a2x+b-ax^2-bx-c)e^{-x}$$
$$= (-ax^2+(2a-b)x+b-c)e^{-x}$$

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a-b = 3 \\ b-c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -2-b = 3 \\ b-c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = -7 \end{cases}$$

ومنه $a = -1$ و $b = -5$ و $c = -7$

$$H(x) = (-x^2-5x-7)e^{-x}$$

2-أ-حساب $A(\gamma)$

$$A(\gamma) = \int_0^{\gamma} (x^2+3x+2)e^{-x}\,dx$$

لكن لدينا الدالّة الأصليّة لـ h هي H

$$A(\gamma) = [(-x^2-5x-7)e^{-x}]_0^{\gamma}$$
$$A(\gamma) = [(-\gamma^2-5\gamma-7)e^{-x}+7]\ (cm^2)$$

التفسير البياني: $A(\gamma)$ هو مساحة الحيز المحصورة بين (C_f) والمستقيمات $x = 0$ و $x = \gamma$ حيث $\gamma = 0$

2-ب- حساب $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} A(\gamma)$

$$\lim_{\gamma\to+\infty} A(\gamma) = \lim_{\gamma\to+\infty} (-\gamma^2-5\gamma-7)e^{-x}+7$$
$$= \lim_{\gamma\to+\infty} \left(-\frac{\gamma^2}{e^x}-\frac{5\gamma}{e^x}-\frac{7}{e^x}+7\right)$$
$$\lim_{\gamma\to+\infty} A(\gamma) = 7$$

.32 بكالوريا 2016
العلوم التجريبية 02

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2016 علوم تجريبية الدورة الاستثنائية 2

الموضوع الأول

I-لتكن الدالّة العدديّة g المعرّفة على$]-1;+\infty[$ بـ:
$$g(x) = -1+(x+1)e+2\ln(x+1)$$
(حيث العدد e هو اساس اللوغاريتم النيبيري).

1-ادرس تغيّرات الدالّة g، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-بيّن أنّه للمعادلة $g(x) = 0$ حلّا وحيدا α حيث : $-0{,}34 < \alpha < -0{,}33$.

3-استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$.

II- لتكن الدالّة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- بيّن أنّ $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$ واحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$، ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

1-ب- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

1-جـ- ادرس اتجاه تغير الدالّة f على المجال $]-1;+\infty[$، ثم شكل جدول تغيّراتها.

1-د- ارسم المنحنى (C_f). (نقبل أنّ: $f(\alpha)=3,16$)

2-أ- بيّن أنّ الدالّة: $x\mapsto\frac{-1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالّة أصليّة للدالّة $x\mapsto\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على $]-1;+\infty[$.

2-ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي: $x=0$ و $x=1$.

3- نعتبر الدالّة العددية k المعرّفة على $]-1;1[$ بـ: $k(x)=f(-|x|)$ و (C_k) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

3-أ- بيّن أنّ الدالّة k زوجية.

3-ب- بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدالّة k).

3-جـ- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $k(x)=m$

الحل

I- g دالّة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=-1+(x+1)e+2\ln(x+1)$

1- دراسة تغيّرات الدالّة g على $]-1;+\infty[$

حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-1} g(x)=\lim_{x\to-1}(-1+(x+1)e+2\ln(x+1))$$
$$=\lim_{x\to-1}(-1+(x+1)e)+2\ln(x+1)$$

نقوم بتغيير المتغير: نضع $t=x+1$

لما $x\to-1$ فإن $t\to0$

ومنه: $\lim_{x\to-1} 2\ln(x+1)=\lim_{t\to0}2\ln(t)=-\infty$

$$\lim_{x\to-1}[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

$g(x)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$g'(x)=e+\frac{2}{x+1}>0$$

جدول التغيرات

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2- البرهان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.34;-0.33[$

و $\begin{cases} g(-0.34)=-0.042 \\ g(-0.33)=0.147 \end{cases}$

و $g(-0.34)\times g(-0.33)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

حيث $-0.34<\alpha<-0.33$

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

من جدول التغيّرات نجد:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II- f معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{e}{x+1}+\frac{\ln x+1}{(x+1)^2}$$

1-أ- البرهان أنّ $\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$

$$\lim f(x)=\lim_{x\to-1}\left[\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{e(x+1)+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)^2}e(x+1)+\ln(x+1)$$
$$\lim_{x\to-1} f(x)=-\infty$$

التفسير البياني هو: $x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

التفسير البياني: $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$

1-ب- البرهان مهما يكن $x\in D_f$ فإن

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-e}{(x+1)^2}+\frac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-e(x+1)+1-2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{-[-1+(x+1)e+2\ln(x+1)]}{(x+1)^3}$$

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

1-جـ دراسة اتجاه تغير الدالّة f على $]-1\,;+\infty[$

بما أنّ $f'(x)=-\frac{g(x)}{(x+1)^3}$ و $(x+1)>0$ على $]-1\,;+\infty[$

فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ ومنه

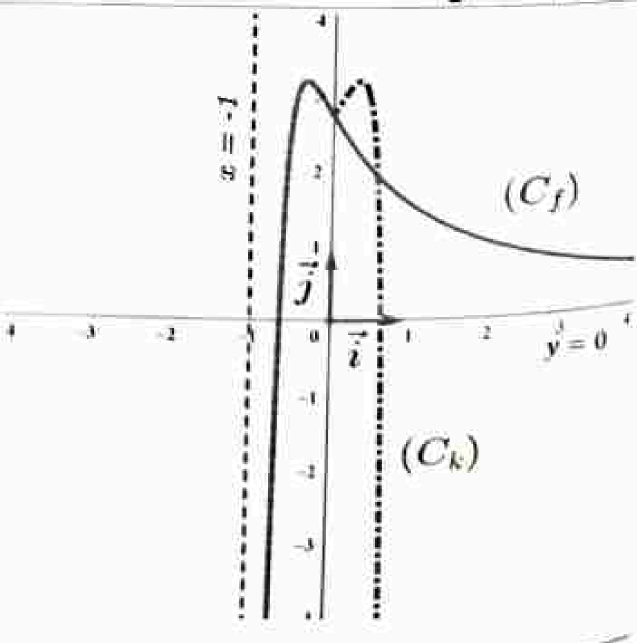
x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالّة f متزايدة تماما على المجال $]-1;\alpha]$
ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالّة f

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)=3.16$	↘ 0

1-د-رسم المنحنى:



2-أ-البرهان أنّ H هي الدالّة الأصليّة لـ h على $]-1\,;+\infty[$

بما أنّ الدالّة $H(x)$ قابلة للاشتقاق على $]-1\,;+\infty[$ فإنّ دالّتها المشتقة هي

$$H'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}(1+\ln(x+1))+\frac{1}{x+1}\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$H'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}(1+\ln(x+1))-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$H'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$H'(x)=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\mathbf{H}'(x)=h(x)$$

2-ب-حساب A مساحة الحيز المطلوب

$$A=\int_0^1 (f(x)-y)\,dx$$

$$A=\int_0^1 \left(\frac{e}{x+1}+\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$A=\int_0^1 \left(\frac{e}{x+1}\right)dx+\int_0^1\left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right)dx$$

نعلم أنّ $x\to-\frac{1}{(x+1)}(1+\ln(x+1))$ هي الدالّة الأصليّة للدالّة $x\to\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

$$\frac{e}{x+1}=e\frac{1}{x+1}\xrightarrow{\text{دالته الأصلية}} e\ln(x+1)$$

نقوم بالتعويض

$$A=[e\ln(x+1)]_0^1+\left[-\frac{1}{(x+1)}(1+\ln(x+1))\right]_0^1$$

$$A=e\ln 2+\left(-\frac{1}{2}(1+\ln 2)+1\right)$$

$$A=e\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}+1$$

$$A=\frac{2e\ln 2-\ln 2+1}{2}$$

$$A=\frac{\ln 2\ (2e-1)+1}{2}$$

$$A=2.03\ u.a$$

II-3-الدالّة العدديّة K المعرّفة على $]-1\,;1[$ بـ $K(x)=f(-|x|)$

3-أ- البرهان أنّ K دالّة زوجية

$$K(-x)=f(-|-x|)$$
$$K(-x)=f(-|x|)=K(x)$$

لأنّ: $|-x|=|x|$

ومنه الدالّة K دالّة زوجية و منحناها البياني (C_K) يكون متناظر بالنّسبة إلى محور التراتيب (yy')

3-ب- بيان كيفية استنتاج (C_K) انطلاقا من (C_f)

$$K(x)=\begin{cases} f(-x), & x\in[0;1[\\ f(-(-x))=f(x), & x\in]-1;0] \end{cases}$$

(C_K) ينطبق على (C_f) في المجال $]-1;0]$ ويرسم الجزء الآخر على المجال $[0;1[$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ الدالة k دالة زوجية

3-جـ المناقشة البيانية لحلول المعادلة $K(x)=m$

حلول المعادلة $K(x)=m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_K) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=m$

1- $m\in]-\infty;e[$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

2- $m=e$ للمعادلة ثلاثة حلول حلان مختلفان في الإشارة والآخر معدوم

3- $m\in]e;K(\alpha)[$ للمعادلة أربعة حلول حلان موجبان وحلان سالبان

4- $m=K(\alpha)$ للمعادلة حلان مضاعفان مختلفان في الإشارة

5- $m\in]K(\alpha);+\infty[$ ليس للمعادلة حلول

.33 بكالوريا 2016
العلوم التجريبية 02

اليوتيوب: دالة أسية باك 2016 علوم تجريبية الدورة 2

الموضوع الثاني

I- لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=2e^x-x^2-x$$

1-أ- احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

1-ب- بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$

1-جـ -احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.38<\alpha<-1.37$.

3-استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي.

II- لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2e^x}{e^x-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

1-ب- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$f'(x)=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$$

(حيث f' هي مشتقة الدالة f).

السلسلة الفضية

1-جـ- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-أ- بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

2-ب- احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$ ، ثم فسّر النتيجة بيانيا.

2-جـ- أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0.29$)

الحل

I- g دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x)=2e^x-x^2-x$$

1-أ-حساب $g'(x)$

الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي

$g'(x)=2e^x-2x-1$

-دراسة اتجاه تغير $g'(x)$ على $\mathbb{R}$

نحسب المشتقة الثانية

$g''(x)=2e^x-2$

إشارة g''

$2e^x-2>0\Leftrightarrow 2e^x>2$

$\Leftrightarrow e^x>1$

$\Leftrightarrow x>0$

جدول الإشارة:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g' متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

-جدول تغيّرات الدالة g'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

1-ب- البرهان أنّ $g'(x)>0$ فإنّ $x\in\mathbb{R}$

من جدول التغيّرات نجد $g'(x)\geq 1$ أي $g'(x)>0$

1-جـ-حساب النّهايات للدالة g

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-x^2-x)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{2e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x}\right)$$
$$=-\infty$$

استخرج العامل المشترك في حالة عدم التعيين

$$(+\infty)+(-\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^x-x^2-x$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(2-\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)$$
$$=+\infty$$

جدول تغيّرات الدالّة $g(x)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2-البرهان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث: $-1.38<\alpha<-1.37$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$]-1.38;-1.37[$

و $\begin{cases} g(-1.38)=-0.0212 \\ g(-1.37)=0.0013 \end{cases}$

و $g(-1.38)\times g(-1.37)<0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α

حيث: $-1.38<\alpha<-1.37$

3-استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{x^2e^x}{e^x-x}$

1-أ-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}=0$$

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}$$

نقوم بإخراج e^x عامل مشترك

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}\left(\frac{x^2}{1-\frac{x}{e^x}}\right)=+\infty$$

1-ب-البرهان أنّ $f'(x)=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$

الدالّة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة هي :

$$f'(x)=\frac{(2xe^x+e^xx^2)(e^x-x)-(e^x-1)(x^2e^x)}{(e^x-x)^2}$$
$$=\frac{xe^x\left((2+x)(e^x-x)-(e^x-1)x\right)}{(e^x-x)^2}$$
$$=\frac{xe^x(-2x+2e^x+xe^x-x^2-xe^x+x)}{(e^x-x)^2}$$
$$=\frac{xe^x(2e^x-x^2-x)}{(e^x-x)^2}$$

ومنه $f'(x)=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$

1-جـ دراسة اتجاه تغير الدالّة f على $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x)=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأنّ

$(e^x-x)^2>0$ على $\mathbb{R}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة الجداء $xe^xg(x)$ على $\mathbb{R}$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
e^x		$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالّة f متزايدة على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[\alpha,0]$

جدول تغيّراتها

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^\alpha}{e^\alpha-\alpha}$$
$$g(\alpha)=0$$
$$2e^\alpha-\alpha^2-\alpha=0$$
$$e^\alpha=\frac{\alpha^2+\alpha}{2}$$

بتعويض قيمة e^α في $f(\alpha)$ نجد

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)-\alpha}=\frac{\alpha^2(\alpha^2+\alpha)}{\alpha^2-\alpha}$$
$$=\frac{\alpha(\alpha^2+\alpha)}{(\alpha-1)}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha-1)}$$

نستعمل القسمة الإقليدية

$$\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha-1)}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2)}{(\alpha-1)}+\frac{2}{(\alpha-1)}$$

$$f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$$

حصر العدد $f(\alpha)$

$-1.38<\alpha<-1.37$

$(-1.37)^2<\alpha^2<(-1.38)^2$

$1.87<\alpha^2<1.9044 \qquad (1)$

$-0.76<2\alpha+2<-0.74 \qquad (2)$

$-2.38<\alpha-1<-2.37$

$-0.843<\frac{2}{\alpha-1}<-0.840 \qquad (3)$

بجمع (1) و (2) و (3) طرفا إلى طرف نجد حصرا لـ $f(\alpha)$: $0.27<f(\alpha)<0.32$

2-ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x^2\right)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2e^x-x^2(e^x-x)}{e^x-x}\right)$$

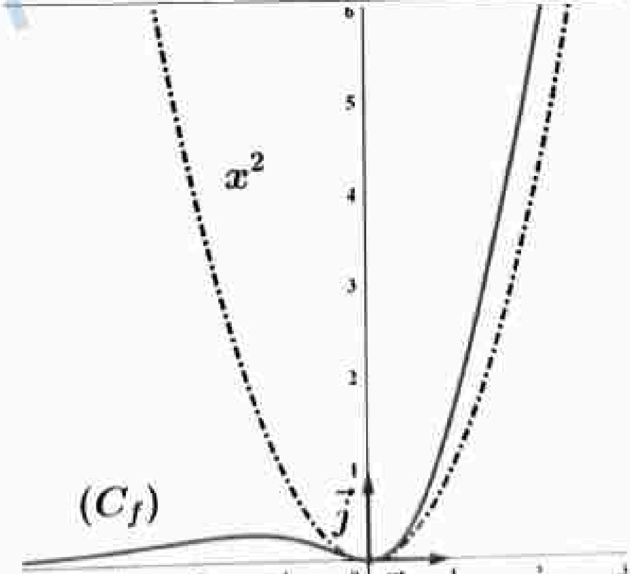
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x-x^2e^x+x^3}{e^x-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x}\times\frac{\frac{x^3}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right)=0$$

نستنتج بيانيا أنّ المنحنيان (C_f) ومنحنى الدالّة مربع x^2 منحنيان متقاربان بجوار $+\infty$

2-جـ-إنشاء المنحنى (C_f)



34. بكالوريا 2015 العلوم التجريبية

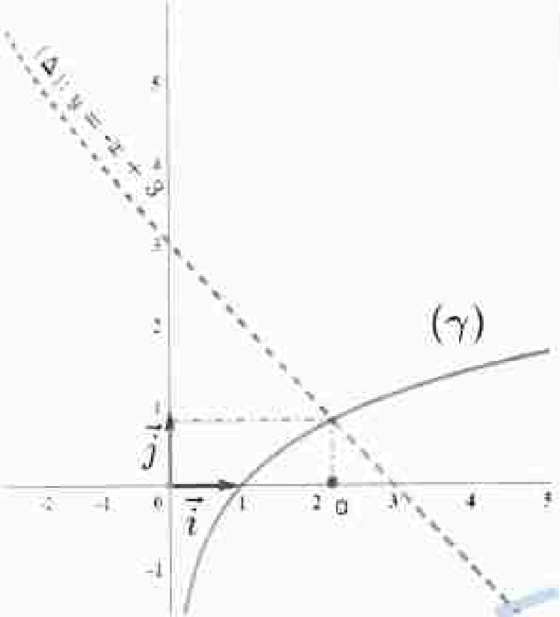
اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2015 شعبة علوم تجريبية (م1)

الموضوع الأول

المستوي المنسوب إلى م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I- (γ) التمثيل البياني للدالّة $x\mapsto\ln x$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=-x+3$

α هي فاصلة تقاطع (γ) و (Δ) .



1- بقراءة بيانيّة حدد وضعيّة (γ) بالنّسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$.

2- g الدالّة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-3+\ln x$

استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

3-تحقّق أنّ $2,2<\alpha<2,3$.

II- f الدالّة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1-احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2-أثبت أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ثم شكل جدول تغيّرات الدالّة f

3-بيّن أنّ: $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$؛ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4-ادرس وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى حامل محور الفواصل؛ ثم انشئ (C_f) على المجال $]0;e^2]$.

III- F الدالّة الأصليّة للدالّة f على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقّق: $F(1)=-3$.

1-بيّن أنّ منحنى الدالّة F يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يطلب تعيين فاصلتيهما.

2-بيّن أنّ $x \mapsto x\ln x - x$ هي دالّة أصليّة للدالّة $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$؛ ثم استنتج عبارة الدالّة F .

الحل

1- تحديد وضعيّة (γ) بالنّسبة إلى (Δ) على $]0;+\infty[$

x	0	α	$+\infty$
الوضعية النسبية	(γ) يقع تحت (Δ)	(γ) يقطع (Δ)	(γ) يقع فوق (Δ)

2- g دالّة معرفة $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = x - 3 + \ln x$$

استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

نعلم أنّ $g(x) = \ln x - y$

ومنه إشارة $g(x)$ كما يلي

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

3-التحقّق أنّ $2.22 < \alpha < 2.3$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad : \quad]0;+\infty[$ على

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2.2\,;2.3[$ و

و $\begin{cases} g(2.2) = -0.01 \\ g(2.3) = 0.13 \end{cases}$

و $g(2.2) \times g(2.3) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2 < \alpha < 2.3$

II- f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

1-حساب النّهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = +\infty$$

$x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = +\infty$$

2-البرهان أنّ: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\ln x - 2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} \\ &= \frac{x - 3 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

بما أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ $x^2 > 0$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه الدالّة f متناقصة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

-جدول تغيّرات الدالّة f

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3- البرهان أنّ $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln(\alpha) - 2)$$

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ ومنه

$$\alpha - 3 + \ln\alpha = 0$$
$$\ln\alpha = 3 - \alpha$$

نعوض قيمة $\ln\alpha$ في $f(\alpha)$ فنجد

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)((3 - \alpha) - 2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(-\alpha + 1) \\ &= -\frac{\alpha - 1}{\alpha}(\alpha - 1) \end{aligned}$$

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

-استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$

لدينا $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

$$2.2 < \alpha < 2.3$$
$$1.2 < \alpha - 1 < 1.3$$
$$1.44 < (\alpha - 1)^2 < 1.69....(1)$$
$$\frac{1}{2.3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2.2}........(2)$$

بضرب (1) في (2)

$$\frac{1.44}{2.3} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \frac{1.69}{2.2}$$

$$-\frac{1.69}{2.2} < \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha} < -\frac{1.44}{2.3}$$

$$-0.77 < f(\alpha) < -0.62$$

4- دراسة وضعيّة (c_f) بالنّسبة إلى (xx')

لدراسة وضعيّة (C_f) مع (xx') ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على المجال $]0;+\infty[$

$$f(x) = 0$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0$$

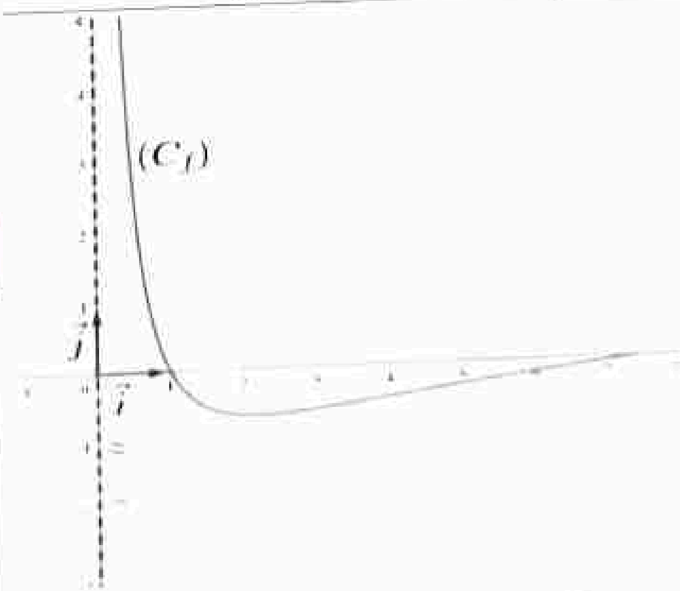
$$\frac{(x-1)(\ln x - 2)}{x} = 0$$

إشارة العبارة من إشارة $(x-1)(\ln x - 2)$

لأنّ $x \in]0;+\infty[$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(\ln x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) فوق (xx')	(C_f) يقطع (xx')	(C_f) اسفل (xx')	(C_f) يقطع (xx')	(C_f) فوق (xx')	

-إنشاء (C_f) على المجال $]0;e^2]$



II- F دالّة أصليّة للدالّة f على $]0;+\infty[$

1-البرهان أنّ (C_f) يقبل مماسين موازين لـ (xx')

F قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ أي

$$F'(x) = f(x)$$

$$f(1) = 0 \quad \text{و} \quad f(e^2) = 0$$

الدالّة F تقبل قيمتين حديتين محليتين

ومنه (C_f) يقبل مماسين موازين لـ (xx') عند

$$x = 1 \, , x = e^2$$

2-البرهان أنّ $x \to x\ln x - x$ هي دالّة الأصليّة لـ $x \to \ln(x)$

$$(x\ln x - x)' = 1\ln x + \frac{1}{x}x - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

ومنه $x \to x\ln x - x$ هي دالّة أصليّة لـ $x \to \ln x$

-استنتاج عبارة الدالّة F

لدينا

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

$$= \ln x - 2 - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}$$

نعلم أنّ $x \to x\ln x - x$ هي الدالّة الأصليّة للدالة $x \to \ln(x)$ و $x \to -2x$ هي الدالّة الأصليّة للدالة $x \to -2$

$$F(x) = x\ln x - x - 2x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x + c$$

$$F(1) = -3$$

$$-3 + c = -3 \Rightarrow c = 0$$

ومنه الدالّة الأصليّة لـ f هي F والتي تحقق $F(1) = -3$ والمعرفة بالعبارة:

$$F(x) = x\ln x - x - 2x - \frac{(\ln x)^2}{2} + 2\ln x$$

$$F(x) = x\ln x + 2\ln x - 3x - \frac{(\ln x)^2}{2}$$

$$F(x) = (x+2)\ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

35. بكالوريا 2015 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة اسية بكالوريا 2015 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

I- g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالّة g على $\mathbb{R}$.

2- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$، ثم تحقّق أن: $0,36 < \alpha < 0,37$.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- f الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$$

1-ب-استنتج أنّ الدالّة f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$.

2-احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، ثم شكل جدول تغيّرات الدالّة f .

3-احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x-1]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4-ادرس وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$.

5-أنشئ (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}]$، نأخذ $f(-\alpha)\approx 0{,}1$.

6-أ- تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$2f(x)+f'(x)-f''(x) = 1-2x-3e^{2x+2}$$

6-ب- استنتج دالّة أصليّة للدالّة f على $\mathbb{R}$.

الحل

I- g دالّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$g(x) = 1-2x-e^{2x-2}$$

1-دراسة اتجاه تغير الدالّة g

النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-2x-e^{2x-2}) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(1-2x-e^{2x-2}) = -\infty$$

المشتقة

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي
$$g'(x) = -2-2e^{2x-2} < 0$$
ومنه الدالّة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

2-البرهان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}$

و
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty\end{cases}$$
و
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$$
حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا $\alpha\in\mathbb{R}$

-التحقّق أنّ $0.36<\alpha<0.37$

بما أنّ $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α على $\mathbb{R}$

و
$$\begin{cases} g(0.37) = -0.02 \\ g(0.36) = 0.002\end{cases}$$
و
$$g(0.36)\times g(0.37) < 0$$
ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فانّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α

حيث $0.36<\alpha<0.37$

3-استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II- f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = xe^{2x+2}-x+1$

1-أ-البرهان أنّ $f'(x) = e^{2x+2}g(-x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{2x+2}+2e^{2x+2}x-1 \\ &= e^{2x+2}\left(1+2x-\frac{1}{e^{2x+2}}\right) \\ &= e^{2x+2}(1-2(-x)-e^{-2x-2}) \\ f'(x) &= e^{2x+2}g(-x)\end{aligned}$$

1-ب-استنتاج أنّ f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha;+\infty[$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(-x)$ لأنّ $e^{2x+2}>0$
بالعودة إلى جدول إشارة $g(x)$
$-x=\alpha$ أي $x=-\alpha$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

والدالّة $x\to -x$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;-\alpha]$ ومتزايدة تماما على المجال $[-\alpha;+\infty[$

2-حساب النّهايات وتشكيل جدول تغيّرات الدالّة f

-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{2x}e^{2}-1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{2x+2}-x+1)$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2}-1+\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

-جدول تغيّرات الدالّة f على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-\alpha)$	↗	$+\infty$

3-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x-1)$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x-1)=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x+2}=0$$

لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}e^{2}=0$

ومنه نستنتج هندسيا أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y=-x+1$

4-دراسة وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة الفرق بين $f(x)-y$ على R

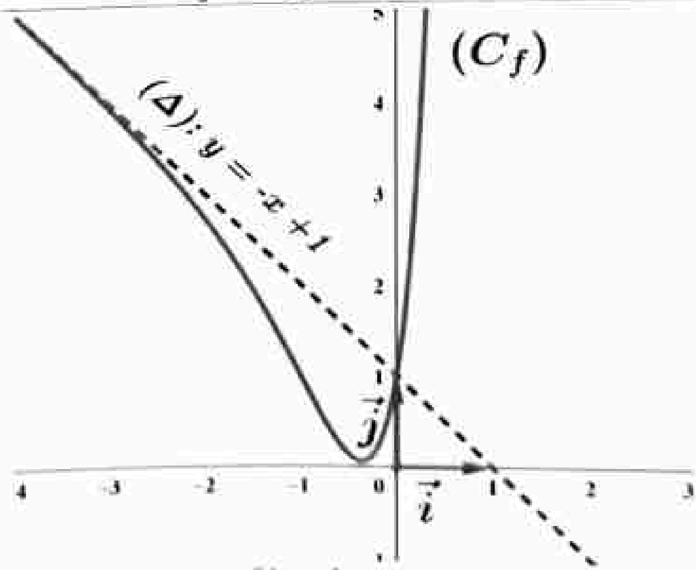
$$f(x)-y=xe^{2x+2}-x+1-(-x+1)$$
$$=xe^{2x+2}-x+1+x-1$$
$$f(x)-y=xe^{2x+2}$$

لكن $e^{2x+2}>0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع أسفل (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

5-إنشاء (Δ) و (C_f) على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$



$f(-\alpha)=0.1$

$-0.37<-\alpha<-0.36$

$y=-x+1$

6-أ-التحقّق أنّ

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$$

$$2f(x)=2xe^{2x+2}-2x+2$$
$$f'(x)=e^{2x+2}+2xe^{2x+2}-1$$
$$f''(x)=4e^{2x+2}+4xe^{2x+2}$$
$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$$

6-ب-استنتاج دالّة أصليّة F للدالّة f على $\mathbb{R}$

لتكن F دالّة أصليّة للدالّة f على $\mathbb{R}$

ولدينا:

$$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$$

ومنه:

$$2F(x)+f(x)-f'(x)=x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}$$

F دالة أصلية لـ f و f دالة أصلية لـ f' و f' دالة أصلية لـ f''

$$2F(x)=-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}$$
$$2F(x)=xe^{2x+2}+e^{2x+2}-2+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}$$
$$F(x)=\frac{1}{2}xe^{2x+2}-\frac{1}{4}e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$$
$$F(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$$

36. بكالوريا 2014 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2014 شعبة علوم تجريبية نسخة جيدة

الموضوع الأول

نعتبر الدالّة العدديّة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ؛فسّر النتيجتين هندسيا.

1-ب-ادرس اتجاه تغير الدالّة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-أ-ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

2-ب-اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

2-جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلّا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$

3-أنشئ (T) و (C_f).

4-لتكن الدالّة h المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي:

. $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

4-أ-بيّن من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم أنّ $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

4-ب-أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .

4-جـ- ناقش بيانيًا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الحل

الدالّة f معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي

$$f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

1-أ-حساب النّهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [1 + \frac{2\ln x}{x}] = -\infty$$

التفسير البياني: $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[1 + \frac{2\ln x}{x}\right] = 1$$

لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

التفسير البياني: $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي لـ(C_f)

1-بـ-دراسة اتجاه تغيّرات الدالّة f

الدالّة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالّتها المشتقّة هي:

$$f'(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right)x - 2\ln x}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

-اشارة $f'(x)$:

نعلم أنّ $x^2 > 0$ على المجال $]0,+\infty[$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - \ln x$

نبحث عن اشارة $1 - \ln x$

$1 - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e^1$

x	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

الدالّة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالّة f

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$1 + \frac{2}{e}$	↘ 1

2-أ- دراسة وضعيّة (C_f) بالنّسبة الى (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على $]0;+\infty[$

$$f(x) - y = 1 + \frac{2\ln x}{x} - 1 = \frac{2\ln x}{x}$$

ومنه اشارة الفرق من إشارة $\ln x$

لأن $x > 0$ على المجال $]0;+\infty[$ و $2 > 0$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f)يقع تحت(Δ)	(C_f)يقطع (Δ)	(C_f)يقع فوق(Δ)

2-ب- معادلة المماس (T) عند $x = 1$

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= 2(x-1) + 1$$
$$(T) : y = 2x - 1$$

2-جـ-البرهان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α على $]0;1[$

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1[$

و
$$\begin{cases} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

و
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) \times f(1) < 0$$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in]0;1[$

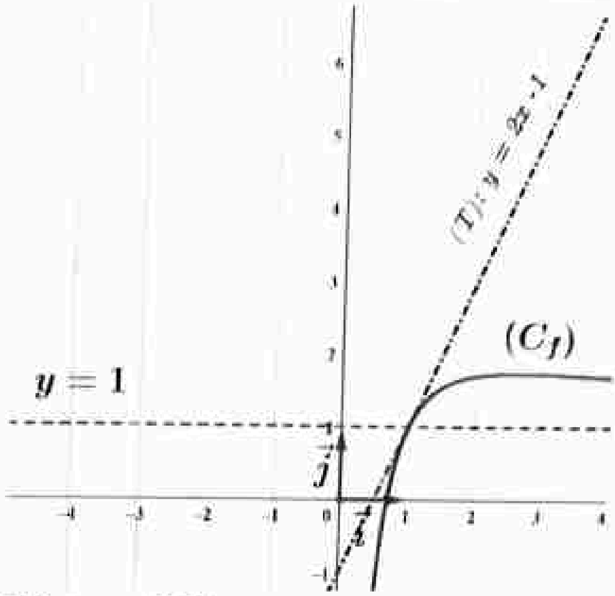
التأكد أنّ $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$

$$\begin{cases} f(e^{-0.3}) = 1 + \frac{2\ln e^{-0.3}}{e^{-0.3}} \simeq 0.2 \\ f(e^{-0.4}) = 1 + \frac{2\ln e^{-0.4}}{e^{-0.4}} \simeq -0.2 \end{cases}$$

$$f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$$

ومنه $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$

3-إنشاء (T) و (C_f)



$0.76 < \alpha < 0.74$

$(T): y = 2x - 1$

$f(e) = 1 + \frac{2}{e} = 1.37$

4- الدالة h المعرّفة $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ:

$$h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$$

4-أ-البرهان أنّ $h(x) - h(-x) = 0$ مهما يكن $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} - \left(1 + \frac{2\ln|-x|}{|-x|}\right)$$

$$= 1 + \frac{\ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{\ln|x|}{|x|} = 0$$

ومنه $h(x) - h(-x) = 0$

الاستنتاج:

$h(x) - h(-x) = 0 \qquad (|-x| = |x|)$

$h(x) = h(-x)$

ومنه نستنتج أنّ الدالّة h دالّة زوجية

ومنحناها البياني (C_h) يكون متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')

4-ب-شرح كيفية رسم المنحنى (C_h) اعتمادا على (C_f)

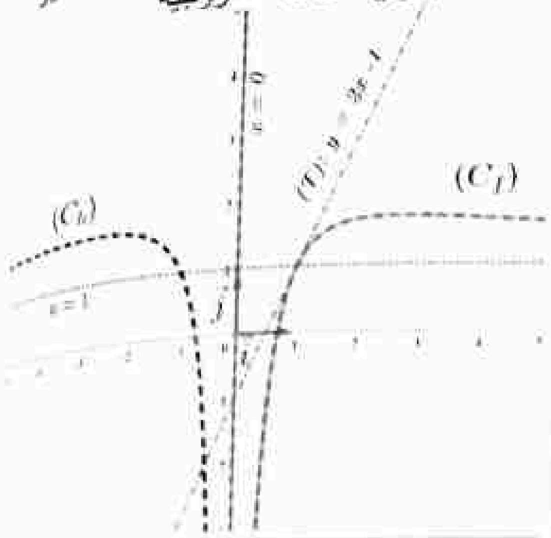
$$h(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2\ln x}{x} = f(x), & x > 0 \\ 1 + \dfrac{2\ln(-x)}{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

(C_h) ينطبق على (C_f) على $]0 ; +\infty[$

أما الجزء الآخر نقوم بمناظرته بالنّسبة إلى محور التراتيب (yy') لأنّ h دالة زوجية



4-جـ-المناقشة البيانية:

$mx^2 = (m-1)|x|$

$\frac{2\ln|x|}{|x|} = (m-1)$

$1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} = m$

$h(x) = m$

حلول المعادلة $h(x) = m$ بيانيًا هي فواصل نقاط تقاطع (C_h) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = m$

1- $m \in]-\infty ; 1]$ للمعادلة حلان متمايزان

2- $m \in]1 ; 1 + \frac{2}{e}[$ للمعادلة أربعة حلول حلان موجبان وحلان سالبان

3- $m = 1 + \frac{2}{e}$ للمعادلة حلان مضاعفان $x = e$ و $x = -e$

4- $m \in]1 + \frac{2}{e} ; +\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة

37. بكالوريا 2014 العلوم التجريبية

الموضوع: دراسة دالة عددية شاملة باك 2014 شعبة علوم تجريبية (الدورة ...)

الموضوع الثاني

I- لتكن g الدالّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

1-أ- احسب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالّة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-أ-بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

2-ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II-نعتبر الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}.$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2-أ-بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}.$$

2-ب-استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

2-جـ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

3-أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث f' مشتقة الدالّة f

3-ب- استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيّراتها (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

4-احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$.

5-أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

6-لتكن h الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}.$$
و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

6-أ-تحقّق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:
$$h(x) = f(x) - 2$$

6-ب-استنتج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h).

الحل

I-g دالّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$$

1-أ-حساب النّهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = +\infty$$

1-ب- دراسة اتجاه تغيّرات الدالّة g على $\mathbb{R}$

الدالّة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على R ودالّتها المشتقة هي :
$$g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$
إشارة $g'(x)$ من إشارة $6x^2 - 8x + 7$

$6x^2 - 8x + 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(6)(7)$

$\Delta = -104 < 0$

$\Delta < 0$ فإنّ إشارة $6x^2 - 8x + 7$ من إشارة a أي (6)

ومنه $g'(x) > 0$ الدالّة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيّرات الدالّة g

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2-أ-البرهان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0.7 < \alpha < 0.8$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0.7;0.8[$

و
$$\begin{cases} g(0.7) \simeq -0.37 \\ g(0.8) \simeq 0.06 \end{cases}$$

و $g(0.7) \times g(0.8) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α

حيث $0.7 < \alpha < 0.8$

2-ب-استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-الدالّة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

1-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^2} = +\infty$$

2-أ- البرهان أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ
$$f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$f(x) = \frac{(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)} = \frac{2(x^3-2x+1)}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$= \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$
$$= \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

2-ب-استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)

قاعدة : إذا كانت لدينا عبارة $f(x) = ax + b + h(x)$ حيث h دالّة نهايتها عند ∞ هي 0 فإنّنا نحكم بأنّ $ax + b$ مستقيم مقارب مائل

لدينا $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

نلاحظ أنّ $f(x) = ax + b + h(x)$

حيث $h(x)=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -\frac{3x}{4x^2}=0$$

نهاية دالة ناطقة عند ∞ هي نهاية أكبر حد في البسط على أكبر حد في المقام

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} -\frac{3}{4x}=0$$

ومنه (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ بجوار $\pm\infty$

2-جـدراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و(Δ)

لدراسة الوضع النسبي لـ(C_f) و(Δ) ندرس إشارة الفرق بين $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$

$$f(x)-y=\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}-\frac{1}{2}(x+1)$$

$$=\frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ندرس إشارة $2x^2-2x+1$

x^2-2x+1

$\Delta=4-4(2)(1)$

$\Delta=-4<0$

فإنّ إشارة $2x^2-2x+1$ من إشارة 2 و $2>0$

ومنه $2x^2-2x+1>0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $1-3x$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f(x)$-y	+	0	−
الوضعية	(C_f)يقع فوق(Δ)	(C_f)يقطع (Δ)	(C_f)يقع أسفل(Δ)

3-أ- البرهان أنّ $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{2x^2-2x+1}$$

$$=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

ومنه: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

3-ب-استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f'(x)=\frac{xg(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$ لأنّ المقام موجب تماما

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		−		−	0	+	
x		−	0	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

الدالّة f متزايدة تماما على $]-\infty;0] \cup [\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;\alpha[$

جدول تغيّرات الدالّة f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4-حساب $f(1)$

$f(1)=0$

ومنه 1 جذر لـ $f(x)$

حل المعادلة $f(x)=0$ في $\mathbb{R}$

$$\frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}=0$$

$x^3-2x+1=0$

بالقسمة الاقليدية

$(x^2+x-1)(x-1)=0$

$(x-1)=0 \Rightarrow x=1$

$x^2+x-1=0$

$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

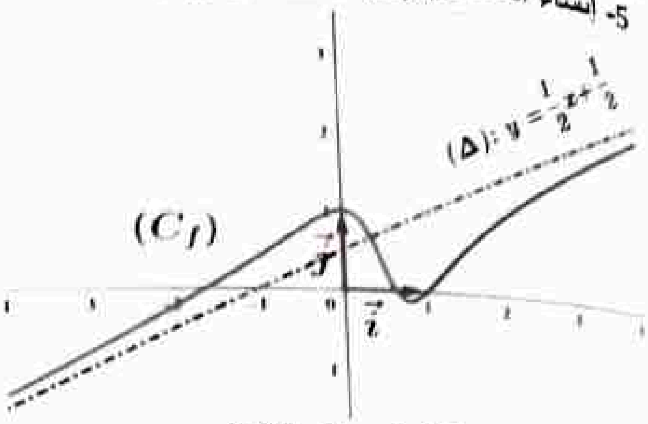
حلول المعادلة $f(x)=0$ هي

$S=\left\{1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

التفسير البياني لحلول المعادلة $f(x)=0$

هي فواصل نقط تقاطع(C_f)مع محور الفواصل $(x'x)$

5- انشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)



$$0.37 < \alpha < 0.8$$
$$y = \frac{1}{2}(x+1)$$

6- h معرّفة على $\mathbb{R}$ $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$:

6-أ-التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإنّ

$h(x) = f(x) - 2$

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2$$
$$= \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1}$$
$$= \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

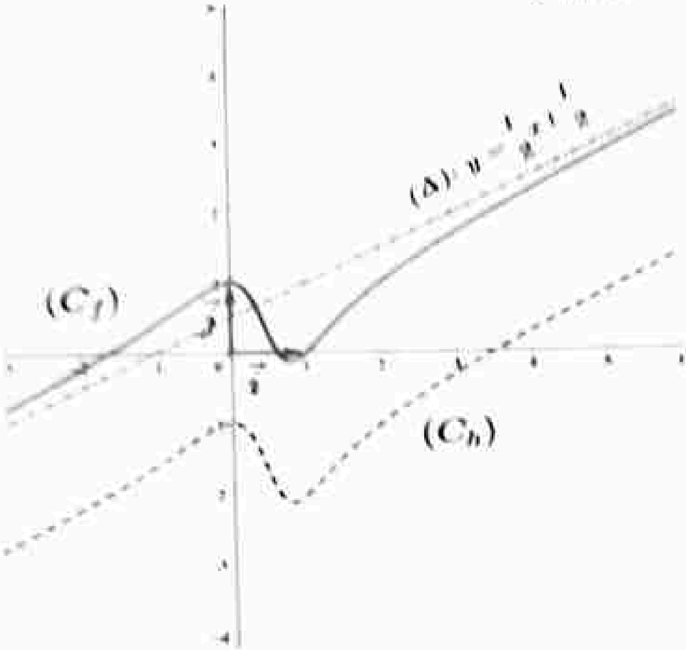
6-ب- استنتاج أنّ (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط حيث $h(x) = f(x+a) + b$

يتم رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{-a}{b}$

$\vec{v} = -a\vec{i} + b\vec{j}$
$h(x) = f(x) - 2$

يتم رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{v}\binom{0}{-2} = -2\vec{j}$

رسم (C_h)



38. بكالوريا 2013 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة أسية شاملة باك 2013 شعبة (ع تجريبية)

الموضوع الأول

x	$F(x)$
0.20	0.037
0.21	0.016
0.22	-0.005
0.23	-0.026
0.24	-0.048
0.25	-0.070

I- f الدالّة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ:
$f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ ،
و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ،ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

2-احسب $f'(x)$.بين أنّ الدالّة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ،ثم شكل جدول تغيّراتها.

3-بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم اعلاه جد حصرا للعدد α.

4-ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C) ،ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالّة $|f|$.

5-عيّن بيانيًا مجموعة قيم الاعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II- g الدالّة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x) = f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1-ادرس تغيّرات الدالّة g على $]-\infty;1[$ ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-أ-تحقّق من أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$ ،ثم بيّن أنّ:

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$$

2-ب- استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالّة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

2-جـ تحقّق من أنّ: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ هي معادلة للمستقيم (T).

الحل

I-f دالّة معرّفة على $]-\infty;1[$ بـ:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$$

1-حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ و استنتاج المستقيمين المقاربين

حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right] = 2$$

لأنّ $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$

حساب $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right) = -\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} x\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\infty$

و $\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

-استنتاج المستقيمات المقاربة لـ (C)

مستقيم مقارب عمودي ذو المعادلة $x = 1$ بجوار $-\infty$

مستقيم مقارب أفقي ذو المعادلة $y = 2$ بجوار $+\infty$

2- حساب $f'(x)$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}\left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{(x-1)^2}\left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right) < 0$$

أي $-\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ $f'(x)$

ومنه الدالّة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

-جدول التغيّرات الدالّة f

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	2 ↘	$-\infty$

3-البرهان أنّ $f(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدا $\alpha \in]-\infty;1[$

التفسير البياني لحل المعادلة $f(x) = 0$ هي فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-\infty;1[$

لدينا $\begin{cases}\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty\end{cases}$

و $\lim_{x\to-\infty} f(x) \times \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-\infty;1[$

-إيجاد حصر لـ α

بما أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) \times \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) < 0$ من الجدول

نجد $0.21 < \alpha < 0.22$

4-رسم (C) و المستقيمين المقاربين و (C')

$$0.21 < \alpha < 0.22$$

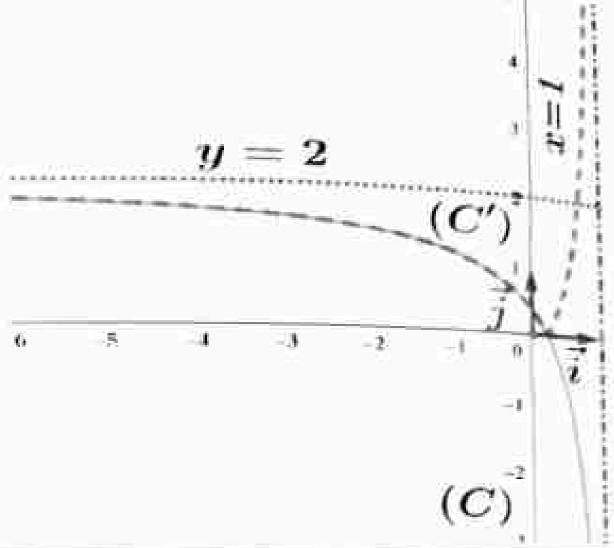
$$f(0) = e^{-1}$$

المنحنى (C') يقع فوق محور الفواصل

لأن: $|f(x)| \geq 0$

الجزء الذي يقع فوق محور الفواصل للمنحنى (C) ينطبق على (C')

والجزء الواقع تحت محور الفواصل للمنحنى (C) يناظر (C') بالنسبة إلى محور الفواصل



5-تعيين بيانيًا قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين مختلفين الإشارة

التفسير البياني لحلول المعادلة $|f(x)| = m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C') مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $|y| = m$

قيم m التي يكون للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة هي $m \in]e^{-1};2[$

II-g دالة معرّفة على $]-\infty;1[$ بـ:

$$g(x) = f(2x-1)$$

1-دراسة تغيرات g على $]-\infty;1[$

المشتقة: $g(x)$ عبارة عن تركيب دالتين قابليتين لاشتقاق على $]-\infty;1[$ ومنه فهي قابلة لاشتقاق على نفس المجال نضع $u(x) = 2x - 1$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$(f \circ u)' = u'(x)f'(u(x))$$

$$g'(x) = \left(f(2x-1)\right)' = 2f'(2x-1)$$

تغيرات g:

الدالة $u(x)$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;1[$ والدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ومنه g دالة متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$ 1
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$2 \searrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(2x-1)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2 \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(2x-1)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}}(2x-1) = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} g(x) = -\infty$$

2-أ-التحقّق أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$

لدينا $g(x) = f(2x-1)$

أي
$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha+1-1) = f(\alpha)$$

وحسب الجواب السابق للجزء الأول $f(\alpha) = 0$

ومنه $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$

البيان أنّ $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

$$g(x) = f(2x-1)$$
$$g'(x) = 2f'(2x-1)$$
$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = 2f'(\alpha+1-1)$$
$$g'(x) = 2f'(\alpha)$$

2-ب- معادلة (T) عند $x = \frac{\alpha+1}{2}$

$$y = g'(x_0)(x-x_0) + g(x_0)$$
$$= g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$
$$= 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + 0$$
$$(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$$

2-جـ- التحقّق من أنّ: $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

$$f(\alpha) = 0$$
$$\frac{\alpha}{\alpha-1} + e^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0$$
$$e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1} \quad \ldots\ldots(1)$$
$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)$$

نعوض (1) في $f'(\alpha)$ فنجد:

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(1+-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{\alpha-1-\alpha}{\alpha-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(\frac{-1}{\alpha-1}\right)$$

$$f'(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)^3} \text{ ....} (2)$$

نعوض (2) في y فنجد:

$$y = 2\left(\frac{1}{(\alpha-1)^3}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$$

ومنه $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ معادلة للمستقيم (T)

39. بكالوريا 2013 العلوم التجريبية

الموضوع: دالة لوغاريتمية باك 2013 شعبة علوم تجريبية (نسخة جديدة)

الموضوع الثاني

I- g الدالّة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2+2x+4-2\ln(x+1)$$

1-ادرس تغيّرات الدالّة g،ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-استنتج من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ أن $g(x)>0$

II- f الدالّة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى م م م $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1-أ- احسب $\lim_{x \to -1} f(x)$.فسّر النتيجة بيانيًا.

1-ب- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2-أ- بيّن أنه، من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ،حيث f' هي مشتقة الدالّة f .

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

2-جـ بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثم تحقق أنّ $0<\alpha<0{,}5$

3- أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

3-ب- ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى (Δ).

4-نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ،مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

4-أ- احسب x_0 .

4-ب- ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

4-جـ- عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

الحل

I- g دالّة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ

$$g(x) = x^2+2x+4-2\ln(x+1)$$

1-دراسة تغيّرات الدالّةg

النّهايات

$$\lim_{x \to -1} (x^2+2x+4-2\ln(x+1)) = +\infty$$

بتغيير المتغير $x+1$ بالمتغير t

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \ln t = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2\ln(x+1)}{x^2}\right) = +\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x \to +\infty} -2\frac{\ln x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} -2\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

المشتقة: الدالة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي

$$g'(x) = 2x+2-2\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= 2(x+1)-\frac{2}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{2(x+1)^2-2}{x+1}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$2(x+1)^2-2=0$

$(x+1)^2=1$

$x^2+2x+1=1$

$x(x+2)=0$

إما $x=0$ أو $x+2=0$ أي $x=-2$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه إشارة $g'(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالّة g متناقصة على المجال $]-1;0]$

ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيرات g

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

2-استنتاج أن $g(x) > 0$

من جدول التغيّرات نلاحظ أنّ $g(x) \geq 4$

منه $g(x) > 0$

x	-1	$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$

I- f معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$$

1-ا-حساب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right)$$
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

لأنّ:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} -\frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{2\ln t}{t} = -\infty$$

التفسير البياني: $x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

1-ب-حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2-أ-البرهان أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 - \frac{0 - \frac{2}{x+1}(x+1) - 1(1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^2}$$
$$= 1 - \frac{-2 - 1 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

2-ب-دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ $(x+2)^2 > 0$

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$

أي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2-جـ-البرهان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 0.5$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على$]0;0.5[$

و
$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(0.5) = 0.12 \end{cases}$$

و
$$f(0) \times f(0.5) < 0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 0.5$

3-أ-بيان أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

يجب أنّ يكون $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} - x = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}\right)$$
$$= 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

3-ب- وضعيّة (C_f) مع (Δ)

هي إشارة الفرق بين $f(x) - y$

$$f(x) - y = x - \frac{1 - 2\ln(x+1)}{x+1} - x$$

$$= -\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط في المقام

نعلم أنّ $x+1>0$ في $]-1;+\infty[$

ومنه إشارته من إشارة $-1+2\ln(x+1)$

نضع $-1+2\ln(x+1)>0$

$\Rightarrow 2\ln(x+1)>1$

$\Rightarrow \ln(x+1)>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x+1>e^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x>\sqrt{e}-1$

x	-1 $\sqrt{e}-1$ $+\infty$
$f(x)-y$	$-$ 0 $+$
الوضعية	(C_f) أسفل (Δ) (C_f) يقطع (Δ) (C_f) فوق (Δ)

4-أ-حساب x_0

$f'(x_0)=1$

معامل التوجيه للمماس = المشتقة

$$\frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$$

$$\frac{{x_0}^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)}{(x_0+1)^2}=1$$

$${x_0}^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)=x_0^2+2x_0+2$$

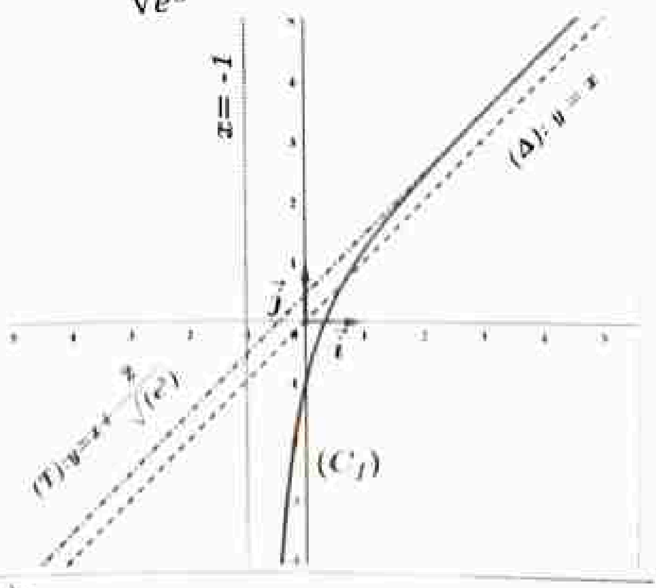
$$\ln(x_0+1)=\frac{3}{2}$$

$$x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$$

4-ب- الرّسم البياني

$y=x$

$y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$



4-جـ-المناقشة البيانيّة

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة $(T_m): y=x+m$

لما يكون $m\in]0;\frac{2}{\sqrt{e^3}}[$ للمعادلة حلّان متمايزان

.40 بكالوريا 2012 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2012 علوم تجريبية 1

الموضوع الأول

لتكن f الدالّة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

1-ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;0[$ ، $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$.

استنتج اتجاه تغير الدالّة f ثم شكل جدول تغيّراتها.

3-أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

3-ب- ادرس وضع المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

4- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β حيث $-3{,}5<\alpha<-3{,}4$ و $-1{,}1<\beta<-1$

5- أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

6-أ- نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

بين أنّ $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتيّة للمستقيم (AB) .

6-ب- بيّن أنّ المستقيم (AB) يمس المنحنى (C_f) في نقطة M_0 يطلب تعيين احداثيتيها.

7- لتكن g الدالّة المعرّفة على $]-\infty;0[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$$

بين أنّ g دالّة أصليّة للدالّة f على المجال $]-\infty;0[$

الحل

f معرفة على $]-\infty;0[$:

$$f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

1-أ-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x+5+6\ln\frac{x}{x-1}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}(x+5+6(\ln|x|-\ln|x+1|))$$
$$=-\infty$$

$$ln\frac{a}{b}=ln\,|a|-ln\,|b|$$

لأنّ في المجال من $]-\infty;0[$ $x\in$ يمكننا وضع $t=-x$ ومنه لمّا $x\underset{<}{\to}0$ فإنّ $t\underset{>}{\to}0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\ln|x|=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\ln|x|=\lim_{\substack{t\to 0\\ >}}\ln t=-\infty$$

التفسير البياني: $x=0$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

1-ب-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+5+6\ln\frac{x}{x-1}\right)$$
$$=-\infty$$

2- البرهان أنّ $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=1+6\frac{\frac{(x-1)-(x)}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}$$
$$=1+6\frac{-1}{x(x-1)}$$
$$=\frac{(x-1)x-6}{x(x-1)}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$$

نعلم أنّ $x(x-1)>0$ لأنّ $x\in]-\infty;0[$
منه إشارة الدالة $f(x)$ من إشارة x^2-x-6

$\sqrt{\Delta}=5$

$x_1=\frac{-1+5}{2}=3$

$x_2=\frac{-1-5}{2}=-2$

جدول الإشارة لـ x^2-x-6

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
x^2-x-6	$+$	0	$-$	0	$+$

ومنه جدول إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;0[$ هو

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖

الدالّة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$
ومتناقصة تماما على المجال $[-2;0[$

جدول تغيّرات الدالّة f

x	$-\infty$		-2		0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	$-\infty$	↗	$3+6\ln\frac{2}{3}$	↘	$-\infty$ ‖

3-أ-البرهان أنّ المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

حتى يكون (Δ) مستقيم مقارب مائل يجب أن يتحقق $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to-\infty}\left(6\ln\frac{x}{x-1}\right)=0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y=x+5$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

3-ب-دراسة وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة الفرق بـ $f(x)-y$ على D_f

$$f(x)-y=6\ln\frac{x}{x-1}$$

ومنه

$$\ln\frac{x}{x-1}>0\Rightarrow\frac{x}{x-1}>1\Rightarrow\frac{x-x+1}{x-1}>0$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $x-1$

$x-1>0\Rightarrow x>1$

جدول الإشارة لـ $x-1$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$0-$	0	$+$

اي $\frac{1}{x-1}<0$ في المجال $]-\infty;0[$
ومنه (C_f) أسفل (Δ)

4-تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين α و β

أولا: البرهان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-3.5;-3.4[$

و $\begin{cases} f(-3.5)=-0.007 \\ f(-3.4)=0.053 \end{cases}$

و $f(-3.5)\times f(-3.4)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا α حيث $-3.5<\alpha<-3.4$

ثانيا : البرهان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا β حيث $-1.1<\beta<-1$

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1.1;-1[$

و $\begin{cases} f(-1)=0.20 \\ f(-1.1)=-0.15 \end{cases}$

و $f(-1.1)\times f(-1)<0$

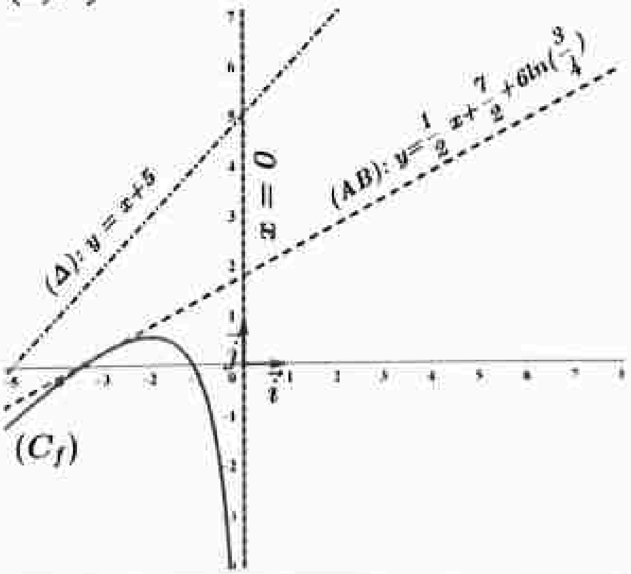
حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّا β حيث $-1.1<\beta<-1$

التفسير البياني:

أي α وβ فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل xx'

5-إنشاء المنحنى (C_f) و(Δ)

(Δ): $y=x+5$



6-أ-البرهان أنّ: $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ معادلة ديكارتية لـ (AB)

نعوض قيمة فواصل النقط A و B في المعادلة

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$

$$3+6\ln\frac{3}{4}=\frac{1}{2}-1+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$
$$=\frac{-1+7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$
$$=3+6\ln\frac{3}{4}$$

ومنه $A\in(y)$

$$\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{1}{2}-2+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}=\frac{5}{2}+6\ln\frac{3}{4}$$

ومنه $B\in(y)$

بما أنّ احداثيات A و B تحقق المعادلة فإنّ المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

6-ب-تبيين أنّ (AB) يمس (c_f) في M_0

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}$$
$$\frac{x_0^2-x_0-6}{x_0(x_0-1)}=\frac{1}{2}$$
$$2(x_0^2-x_0-6)=x_0(x_0-1)$$
$$2x_0^2-2x_0-12=x_0^2-x_0$$
$$x_0^2-x_0-12=0$$
$$\sqrt{\Delta}=7$$

$x_1=-3$......... مقبول

$x_2=4$ مرفوض لأنّ $4\notin D_f$

ومنه (AB) يمس (C_f) في نقطة $M\left(-3\,;2+6\ln\frac{3}{2}\right)$

7-تكون الدالة g دالّة أصلية لـ f إذا كان $g'(x)=f(x)$

الدالّة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\times 6x-\frac{6}{1-x}$$
$$=x+5+6\ln\frac{x}{x-1}+\frac{6}{1-x}-\frac{6}{1-x}$$
$$g'(x)=f(x)$$

ومنه $g'(x)=f(x)$ ومنه g دالّة أصليّة لـ f على المجال $]-\infty;0[$

41. بكالوريا 2012 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة أسية باك 2012 شعبة علوم تجريبية 2

الموضوع الثاني

I-لتكن g الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$g(x) = 1 - xe^x$

1-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2-ادرس اتجاه تغير الدالّة g، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3-أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α على المجال $]-1;+\infty[$.

3-ب- تحقّق أنّ $0.5 < \alpha < 0.6$ ،ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II-نعتبر الدالّة f المعرّفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2-لتكن f' مشتقة الدالّة f ، بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإنّ: $f'(x) = -g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ،ثم شكل جدول تغيّرات الدالّة f .

3-بيّن أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

4-أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

4-ب- ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى (Δ).

5-أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1,6 < x_1 < -1,5$ و $1,5 < x_2 < 1,6$.

5-ب- أنشئ (Δ) و (C_f) .

6-لتكن h الدالّة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$h(x) = (ax+b)e^x$

6-أ-عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون h دالّة أصليّة للدالّة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

6-ب-استنتج دالّة أصليّة للدالّة g على $\mathbb{R}$.

الحل

I-g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = 1 - xe^x$

1-حساب النّهايات

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - xe^x = 1$

$y = 1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_g) بجوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - xe^x = -\infty$

2-دراسة اتجاه تغير g على $\mathbb{R}$

الدالّة g معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالّتها المشتقة : $g'(x) = (-1-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-1-x$ لأن $e^x > 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x-1$	$+$	0	$-$

الدالّة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$ ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

جدول تغيّرات g

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	1 ↗	$1+e^{-1}$	↘ $-\infty$

3-أ-البرهان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in [-1;+\infty[$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

و $\begin{cases} g(-1) = 1.36 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

و $g(-1) \times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in [-1;+\infty[$

3-ب-التحقق أنّ $0.5 < \alpha < 0.6$

الدالّة g مستمرة ومتناقصة على المجال $]0.5;0.6[$

بالتعويض:

$\begin{cases} g(0.6) = -0.09 \\ g(0.5) = 0.17 \end{cases}$

و $g(0.5) \times g(0.6) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0.5 < \alpha < 0.6$

استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من جدول التغيّرات نجد

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II-الدالّة f معرّفة $]-\infty\,;2[$ كما يلي

$$f(x) = (x-1)e^x - x - 1$$

1-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x - x - 1$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (xe^x - e^x - x - 1)$$
$$= +\infty$$

2-البرهان أنّ $f'(x) = -g(x)$

f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي

$$f'(x) = 1e^x + e^x(x-1) - 1 + 0$$
$$= e^x + xe^x - e^x - 1$$
$$= xe^x - 1$$
$$= -(1 - xe^x)$$
$$f'(x) = -g(x)$$

-استنتاج إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالّة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;2[$

x	$-\infty$	α	2
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ e^2-3

3-البرهان أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$

$$f(\alpha) = (\alpha-1)e^\alpha - \alpha - 1$$

من الجزء الأول

$$g(\alpha) = 1 - \alpha e^\alpha = 0$$
$$\alpha e^\alpha = 1$$
$$e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$$

بالتعويض في $f(\alpha)$ نجد

$$f(\alpha) = (\alpha-1)\frac{1}{\alpha} - \alpha - 1^2$$
$$= \frac{\alpha-1}{\alpha} - \frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha}$$
$$f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$$0.5 < \alpha < 0.6$$
$$0.25 < \alpha^2 < 0.36$$
$$1.25 < \alpha^2 + 1 < 1.36 \quad ....(1)$$
$$0.5 < \alpha < 0.6$$
$$\frac{1}{0.6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.5} \quad ....(2)$$

بضرب (1) في (2) طرفا إلى طرف نجد

$$2.08 < \frac{(\alpha^2+1)}{\alpha} < 2.72$$
$$-2.72 < -\frac{(\alpha^2+1)}{\alpha} < -2.08$$
$$-2.72 < f(\alpha) < -2.08$$

4-أ-البرهان أنّ (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - y)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left((x-1)e^x - x - 1 - (-x-1)\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left((x-1)e^x - x - 1 + x + 1\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (xe^x - e^x)$$
$$= 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

4-ب-وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ)

دراسة إشارة الفرق بين $f(x) - y$ على $]-\infty\,;2[$

$$f(x) - y = (x-1)e^x - x - 1 - (-x-1)$$
$$= (x-1)e^x - x - 1 + x + 1$$
$$= (x-1)e^x$$

$e^x > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة $x - 1$

x	$-\infty$	1	2
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) يقع أسفل (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع فوق (Δ)

5-أ-البرهان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا x_1 حيث : $-1.6 < x_1 < -1.5$

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ فهي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-1.6;-1.5[$

و
$$\begin{cases} f(-1.5) = -0.057 \\ f(-1.6) = 0.075 \end{cases}$$

$$f(-1.6)\times f(-1.5)<0$$

و

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًّا x_1 محصور بين

$$-1.6<x_1<-1.5$$

البرهان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا x_2

حيث $1.5<x_2<1.6$

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1.5,1.6[$

و

$$\begin{cases} f(1.6)=0.47\\ f(1.5)=-0.25\end{cases}$$

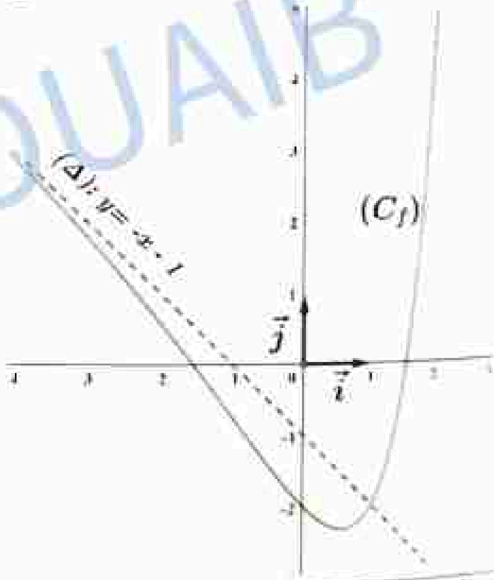
$$f(1.5)\times f(1.6)<0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًّا x_2 محصور بين $1.5<x_2<1.6$

التفسير البياني لحل المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

5-ب-رسم (C_f) و (Δ)

$y=-x-1$



6-أ- تعيين a وb بحيث تكون h دالّة أصليّة للدالّة $x\to xe^x$

$$\begin{aligned} h'(x)&=ae^x+e^x(ax+b)\\ &=ae^x+axe^x+be^x\\ &=e^x(ax+a+b)\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد

$$(ax+a+b)e^x=xe^x$$
$$e^x=e^x$$
$$ax+a+b=x+0$$

ومنه $\begin{cases} a=1\\ a+b=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=-1\end{cases}$

$$h(x)=(x-1)e^x$$

6-ب-استنتاج دالّة أصليّة لـ $g(x)$

حيث $g(x)=1-xe^x$

$$G(x)=x-(x-1)e^x+c$$
$$c\in\mathbb{R}$$

42. بكالوريا 2011 العلوم التجريبية

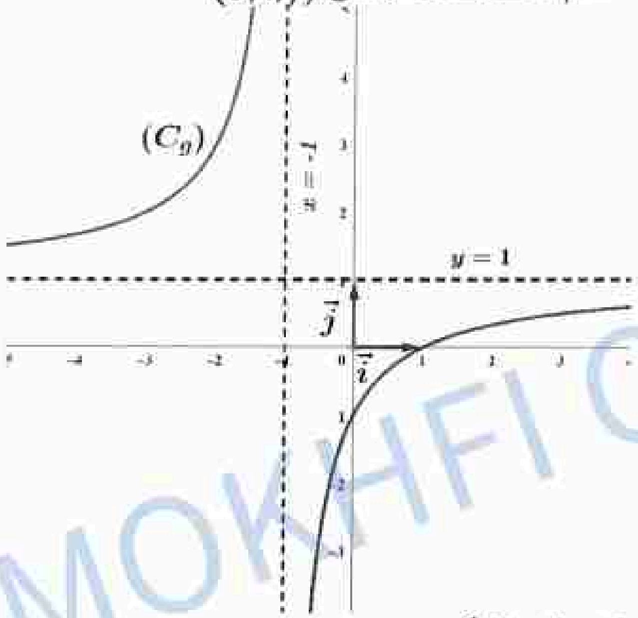
اليوتيوب: الدالة اللوغاريتمية باك 2011 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الأول

I-نعتبر الدالّة g المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:

$$g(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$



بقراءة بيانية:

أ-شكل جدول تغيّرات الدالّة g.

ب-حل بيانيًا المتراجحة $g(x)>0$.

جـ- عيّن بيانيًا قيم x التي يكون من أجلها

$0<g(x)<1$

II- لتكن الدالّة f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب $\lim_{x\to 1}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2- أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$، $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$.

2- ب - احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيّرات الدالّة f .

3- أ – باستعمال الجزء I) السؤال ج- عين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$.

3- ب - α عدد حقيقي.
بين أنّ الدالّة $x \mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالّة أصليّة للدالّة $x \mapsto \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$.

3-جـ – تحقّق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ أنّ $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$ ثم عين دالّة أصليّة للدالّة f على المجال $]1;+\infty[$.

الحل

I- g معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$

أ-تشكيل جدول تغيّرات الدالّة g

من المنحنى نجد

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$ ‖	$+$
$g(x)$	1 ↗ $+\infty$ ‖	$-\infty$ ↗ 1

ب- الحل بيانيا المتراجحة $g(x)>0$

التفسير البياني لحلول المتراجحة $g(x)>0$
أي الفواصل للمنحنى (c_g) حيث يكون المنحنى فوق محور الفواصل وهي $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

جـ-تعيين قيم x التي يكون من أجلها $0<g(x)<1$

الفواصل التي يكون صورها محصورة بين 1و0 هي $x\in]1;+\infty[$

II- f دالّة معرّفة على $]1;+\infty[$ بـ

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

1-حساب النّهايات

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]=-\infty$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-1}{x+1}+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$

2-أ-البرهان أنّ $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

g معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$g'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

نلاحظ أنّ $g'(x)>0$ على $]1;+\infty[$

2-ب-حساب المشتقة $f'(x)$:

f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة

لدينا $f'(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'+\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)'$

نلاحظ أنّ $f'(x)=g'(x)+(\ln g(x))'$

نعلم أنّ $(\ln u(x))'=\frac{u'(x)}{u(x)}$

ومنه

$$f'(x)=g'(x)+\frac{g'(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$
$$=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

لدينا $\frac{2}{(x+1)^2}>0$ و $2>0$ و $(x+1)(x-1)>0$
لأنّ $g'(x)\geq 0$ على $]1;+\infty[$ إشارة الكسر من إشارة جداء البسط في المقام
ومنه الدالّة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

-جدول التغيرات لــ $f(x)$

x	1 $+\infty$
$f'(x)$	‖ $+$
$f(x)$	‖ $-\infty$ ↗ 1

3- II-أ-تعيين إشارة العبارة $\ln\frac{x-1}{x+1}$ على $]1;+\infty[$

لدينا $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln g(x)$

ونعلم أنّ $0<g(x)<1$
ومنه لدينا $g(x)<1$
$\ln g(x)<\ln 1$
$\ln g(x)<0$

$$\ln\frac{x-1}{x+1}<0$$

ومنه إشارة العبارة $\ln\frac{x-1}{x+1}$ سالبة تماما

3-ب- البرهان أنّ $x\mapsto (x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$ هي دالّة أصليّة لـ: $x\to \ln(x-\alpha)$:

نضع

$$H(x)=(x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$$
$$h(x)=\ln(x-\alpha)$$

حتى تكون H دالّة أصليّة لـ h

يجب أنّ $H'(x)=h(x)$

$$\begin{aligned}H'(x) &= 1\ln(x-\alpha)+\frac{1}{(x-\alpha)}(x-\alpha)-1\\ &=\ln(x-\alpha)+1-1\\ &=\ln(x-\alpha)\\ &=h(x)\end{aligned}$$

ومنه H هي دالّة أصليّة للدالّة h

3-جـ التحقّق أنّ $g(x)=1-\frac{2}{x+1}$

$$1-\frac{2}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x-1}{x+1}=g(x)$$

تعيين الدالّة الأصليّة للدالّة f

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x-1}{x+1}+\ln\frac{x-1}{x+1}\\ &=1-\frac{2}{x+1}+\ln(x-1)-\ln(x+1)\end{aligned}$$

وعرفنا سابقا أنّ: $x\to (x-\alpha)\ln(x-\alpha)-x$

هي دالّة أصليّة لـ: $x\to \ln(x-\alpha)$

ومنه

$$F(x)=x-2\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)-x-((x+1)\ln(x+1)-x)+c$$
$$F(x)=x-2\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)-(x+1)\ln(x+1)+c$$
$$F(x)=x-(x+3)\ln(x+1)+(x-1)\ln(x-1)+c$$

43. بكالوريا 2011 العلوم التجريبية

اليوتيوب: الدالة الأسية و حساب المساحات باك 2011 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

نعتبر الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=e^x-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1-ب- احسب $f'(x)$ ثم ادرس اشارتها

1-جـ شكل جدول تغيرات الدالّة f .

2-أ- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$

2-ب- اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2-جـ- بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

2-د- ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحني (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3-أ- احسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

3-ب- أثبت أنّ $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

(ua هي وحدة قياس المساحات)

الحل

f دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-ex-1$

1-أ-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x-ex-1=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{ex}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=+\infty$$

1-ب-حساب $f'(x)$

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ودالتها المشتقة هي $f'(x)=e^x-e$

إشارة $f'(x)$ من إشارة e^x-e

$$e^x-e>0 \Rightarrow e^x>e \Rightarrow x>1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
e^x-e		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالّة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$

ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

1-جـ-تشكيل جدول التغيّرات

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أنّ المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحى (C_f) بجوار $-\infty$:

حتى يكون Δ) مستقيم مقارب مائل لـ(C_f)بجوار $-\infty$ يجب أنّ: $\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^x - ex - 1 + ex + 1) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

2-ب-كتابة معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحى (C_f) في النقطة $x = 0$

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$= (e^0 - e)(x-0) + e^0 - e(0) - 1$$
$$(T): y = (1-e)x$$

2-جـبرهان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]1.75;\ 1.76[$ حلا وحيدا α

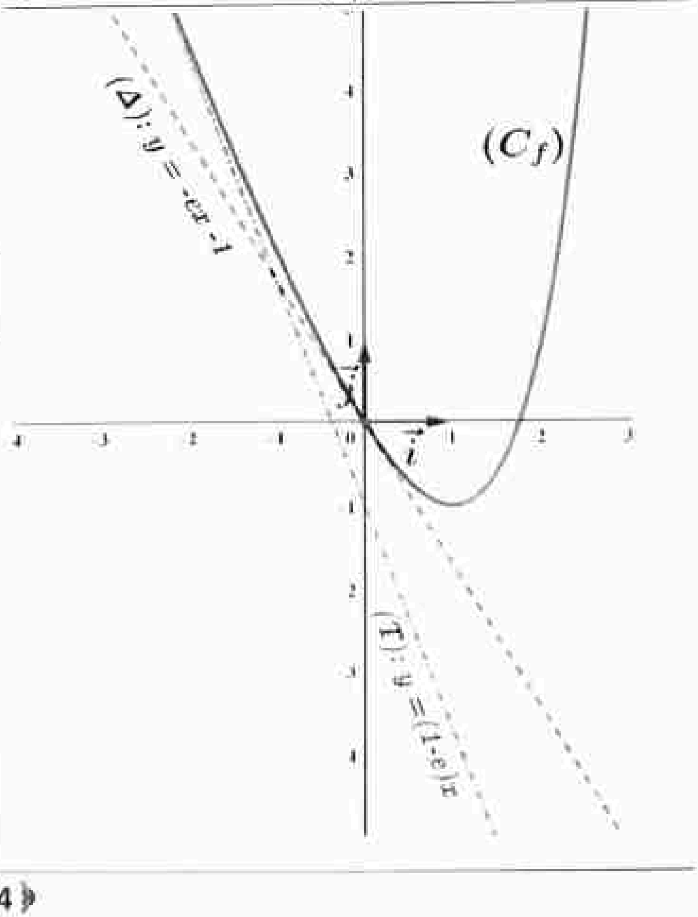
بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1.75;\ 1.76[$

$$\begin{cases} f(1.76) = 0.02 \\ f(1.75) = -0.002 \end{cases}$$

و $f(1.75)\times f(1.76) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1.75 < \alpha < 1.76$

2-د-رسم (Δ) و (T) و(C_f) على المجال $]-\infty; 2]$



3-أ-حساب المساحة $A(\alpha)$ بدلالة α

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha (y - f(x))dx$$
$$= \int_0^\alpha -f(x)dx$$
$$= \int_0^\alpha (e^x - ex - 1)dx$$

لدينا $f(x) = e^x - ex - 1$ ودالّتها الأصليّة هي

$$F(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 - x$$

و منه

$$A(\alpha) = \left[-(e^x - \frac{e}{2}x^2 - x)\right]_0^\alpha$$
$$A(\alpha) = \left[-e^x + \frac{e}{2}x^2 + x\right]_0^\alpha$$
$$A(\alpha) = -e^\alpha + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha - (-e^0 + \frac{e}{2}0^2 + 0)$$
$$A(\alpha) = -e^\alpha + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1\ ua$$

3-ب- إثبات أنّ

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha \quad u.a$$

$$f(\alpha) = 0$$
$$e^\alpha - e\alpha - 1 = 0$$
$$e^\alpha = e\alpha + 1$$

نعوض في $A(\alpha)$ نجد

$$A(\alpha) = -(e\alpha + 1) + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1$$
$$= -e\alpha - 1 + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1$$
$$= \frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha$$

ومنه $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)\ ua$

44. بكالوريا 2010 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية + المتتاليات باك 2010 شعبة علوم تجريبية رقم 1

الموضوع الأول

I-لتكن f الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1-احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}} f(x)$.

2- بيّن أنّ الدالّة f متزايدة تماما على المجال I ثم شكل جدول تغيّراتها.

3-عين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d) ذي المعادلة $y=x$

4-أ- أثبت أنّه من أجل كل x من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\ln(x+a)+b$
حيث a، b عددان حقيقيّان يطلب تعيينهما.

4-ب- استنتج أنّه يمكن رسم (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالّة اللوغاريتمية $(\ln)$ ثم ارسم (C) و (C_f)

II-نعتبر الدالّة العدديّة g المعرّفة على المجال I بـ:
$$g(x)=f(x)-x$$

1-احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} g(x)$ ثم بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

2-ادرس اتجاه تغيّر الدالّة g على I ثم شكل جدول تغيّراتها.

3-أ-احسب $g(1)$ ثم بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]\frac{3}{2};+\infty[$ حلّا وحيدا α.
تحقّق أنّ: $2<\alpha<3$.

3-ب- ارسم (C_g) منحنى الدالّة g على المجال $]\frac{1}{2};5]$ في المعلم السابق.

4-استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثم حدد وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى (d)

5-برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإنّ $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]1;\alpha[$.

III-نسمي (u_n) المتتاليّة العدديّة المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي:
$$u_n=f\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

1-عين قيمة العدد الطبيعي n الي من أجلها يكون: $u_n=1+2\ln3-3\ln2$.

2-احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:
$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$$

الحل

I- f دالة معرّفة على: $]\frac{1}{2};+\infty[$ بـ:
$$f(x)=1+\ln(2x-1)$$

1-حساب النّهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(1+\ln(2x-1))$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln x+\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}}(1+\ln(2x-1))$$

بوضع $t=2x-1$ لمّا $x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}$ فإن $t\overset{>}{\to}0$
$$\lim_{x\overset{>}{\to}\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{t\overset{>}{\to}0}(1+\ln t)=-\infty$$

التفسير البياني: $x=\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

2- البرهان أن الدالّة f متزايدة:

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة
$$f'(x)=\frac{2}{2x-1}$$
ندرس إشارة $2x-1$
$$2x-1>0$$
$$\Rightarrow x>\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$

إذن $\frac{2}{2x-1}>0$ لما $x\in]\frac{1}{2};+\infty[$
ومنه الدالّة f متزايدة تماما على I

-جدول تغيّرات f

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3-تعيين فاصلة النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم (d):

$$f'(x_0)=1\Rightarrow\frac{2}{2x-1}=1$$
$$\Rightarrow\frac{2}{2x-1}-1=0\Rightarrow\frac{-2x+3}{2x-1}=0$$
$$\Rightarrow-2x+3=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

إذن الفاصلة هي $x_0=\frac{3}{2}$

4-أ-البرهان أنّ $f(x)=\ln(x+a)+b$

$$f(x)=1+\ln(2x-1)$$
$$=1+\ln\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$=\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)+1+\ln2$$

ومنه نجد بالمطابقة

$$a=-\frac{1}{2}\qquad b=1+\ln2$$

4-ب- استنتاج رسم (c_f) انطلاقا من (c)

يمكن رسم (c_f) انطلاقا من (c) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right) \\ 1+\ln 2 \end{pmatrix}$

II-نعتبر الدالة g المعرّفة على I بـ:

$$g(x) = f(x) - x$$

1-حساب النّهايات

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} (1 + \ln(2x-1) - x)$$

بوضع $t = 2x - 1$ لمّا $x \overset{>}{\to} \frac{1}{2}$ فإنّ $t \overset{>}{\to} 0$

$$t + 1 = 2x$$
$$\frac{t+1}{2} = x$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \left(1 + \ln t - \frac{t+1}{2}\right)$$
$$= 1 - \infty - \frac{1}{2} = -\infty$$

$x = \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + \ln(2x-1) - x)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \ln x \left(2 - \frac{1}{x}\right) - x\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \ln x + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right) - x\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x} - 1\right)$$
$$= -\infty$$

2- دراسة تغيّرات g على I

g دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة هي

$$g'(x) = \frac{2}{2x-1} - 1 = \frac{2-(2x-1)}{2x-1} = \frac{-2x+3}{2x-1}$$

نعلم أنّ $2x - 1 > 0$ على I ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x + 3$

$$-2x + 3 > 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$	||	$+$	0	$-$	

الدالّة g متزايدة تماما على المجال $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

جدول تغيّرات الدالّة g

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	↗	$-\frac{1}{2} + \ln 2$	↘	$-\infty$

3-أ- حساب $g(1)$

$g(1) = 0$

- البيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ ولدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \\ \text{و} \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = 0.19 \end{cases}$$

و $g\left(\frac{3}{2}\right) \times \lim_{x \to +\infty} g(x) < 0$

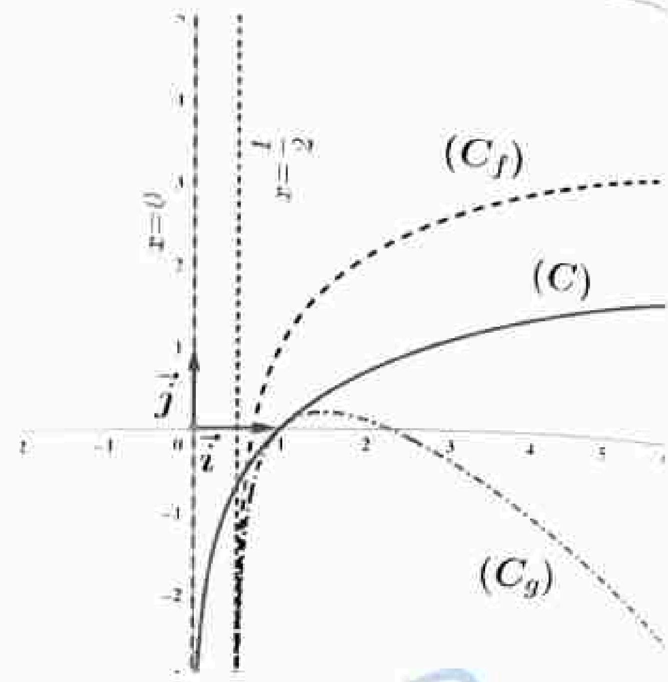
حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

- التحقّق أنّ $2 < \alpha < 3$

$g(2) = -1 + \ln 3 > 0$
$g(3) = -2 + \ln 5 < 0$
$g(3) \times g(2) < 0$

ومنه $2 < \alpha < 3$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة)

3-ب-الرّسم (C_g)



4-استنتاج إشارة $g(x)$ على I

لدينا $g(1) = 0$ و $g(\alpha) = 0$

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

تحديد وضعيّة (c_f) بالنّسبة إلى (d)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على المجال $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

$f(x) - y = 1 + \ln(2x - 1) - x = g(x)$

جدول الوضعية:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖	(C_f) يقع أسفل (d)	(C_f) يقطع (d)	(C_f) يقع فوق (d)	(C_f) يقطع (d)	(C_f) يقع أسفل (d)	

5-برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;\alpha[$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى $]1;\alpha[$

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1;\alpha[$ فإن

$$f(1) < f(x) < f(\alpha)$$

$f(1) = 1$

$f(\alpha) = 1 + \ln(2(\alpha) - 1)$

لدينا $g(\alpha) = 0$

$1 + \ln(2(\alpha) - 1) - \alpha = 0$

$1 + \ln(2\alpha - 1) = \alpha$

$f(\alpha) = \alpha$

ومنه $1 < f(x) < \alpha$

أيّ $f(x) \in]1;\alpha[$

III- u_n متتالية معرّفة على N^* بـ:

$$u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

$$u_n = 1 + \ln\left(2\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1\right)$$
$$= 1 + \ln(1 + \tfrac{1}{n})$$
$$= 1 + \ln(\tfrac{n+1}{n})$$

1-تعيين قيمة n حيث

$$u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$$

$$1 + \ln\frac{n+1}{n} = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$$
$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln 9 - \ln 8$$
$$\frac{n+1}{n} = \frac{9}{8} \Rightarrow 8n + 8 = 9n$$
$$n = 8 \quad n \neq 0$$

2-حساب المجموع S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots\dots u_n$$

$$u_1 = 1 + \ln\frac{2}{1}$$
$$u_2 = 1 + \ln\frac{3}{2}$$
$$u_n = 1 + \ln(\frac{n+1}{n})$$
$$u_{n-1} = 1 + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

بالجمع طرفا لطرف نجد

$$S_n = (1 \times n) + \ln\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \dots \times \frac{n}{(n-1)} \times \frac{(n+1)}{n}\right)$$

$$\boldsymbol{S_n = n + \ln(n + 1)}$$

.45 بكالوريا 2010 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة أسية باك 2010 شعبة علوم تجريبية (نسخة جديدة)

الموضوع الثاني

نعتبر الدالّة العدديّة f المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$. نرمز بـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

1-ب- احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا

2-ادرس اتجاه تغير الدالّة f على كل مجال من مجالي تعريفها.

3-أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب $y = x$ و $y = x + 1$.

3-ب- ادرس وضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى كل من (Δ) و (Δ').

4-أثبت أنّ النقطة $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5-أ- بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث: $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1,4 < \beta < -1,3$

5-ب- هل توجد مماسات لـ(C_f) توازي (Δ) ؟

5-جـ-ارسم (Δ) ، (Δ') ثم المنحنى (C_f) .

5-د-ناقش بيانيًا حسب قسم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(m-1)e^{-x} = m$.

6-أ-تحقق أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإنّ: $\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

6-ب- ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

الحل

f دالّة عدديّة معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = x - \frac{1}{e^x-1}$

1-أ-حساب النّهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$$

1-ب- حساب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0}\left(x - \frac{1}{e^x-1}\right) = +\infty$$

حساب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(x - \frac{1}{e^x-1}\right) = -\infty$$

التفسير الهندسي: $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لـ(C_f) بجوار $\pm\infty$

2-دراسة اتجاه تغير الدالّة f وتشكيل جدول تغيراتها

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالّتها المشتقة هي $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} > 0$

الدالّة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}^*$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3-أ-البرهان أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') بجوار $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{e^x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^x-1}\right) = 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{1}{e^x-1} - x - 1\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-e^x}{e^x-1}\right) = 0$$

ومنه (Δ') مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

3-ب- دراسة الوضعيّة (C_f) بالنّسبة لـ (Δ) و (Δ')

دراسة الوضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = -\frac{1}{e^x-1}$$

$-1 < 0$

$e^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x-1	$-$	0	$+$
-1	$-$		$-$
$-\frac{1}{e^x-1}$	$+$	‖	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	‖	(C_f) يقع أسفل (Δ)

دراسة الوضعيّة (C_f) بالنّسبة إلى (Δ')

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = -\frac{e^x}{e^x-1}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$-e^x$	$-$		$-$
$-\frac{e^x}{e^x-1}$	$+$	‖	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ')	‖	(C_f) يقع أسفل (Δ')

4-البرهان أنّ ω مركز تناظر لـ(C_f)

قاعدة:$\omega(a\,;b)$ مركز تناظر

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

ω مركز تناظر يجب أنّ يكون $f(-x)+f(x)=1$

$$f(-x)+f(x)=-x-\frac{1}{e^{-x}-1}+x-\frac{1}{e^x-1}$$

$$=-\frac{e^x}{1-e^x}-\frac{1}{e^x-1}$$

$$=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{e^x-1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-1}=1$$

ومنه $\omega\left(0,\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C_f)

5-أ-تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β

حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع (xx')

البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين:

بما أن الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على$]\ln 2\,;1[$

و $\begin{cases} f(\ln 2)=-0.33 \\ f(1)=0.41 \end{cases}$

و $f(1)\times f(\ln 2)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًا وحيدا α حيث $\ln 2<\alpha<1$

بما أن الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1.4;-1.3[$

و $\begin{cases} f(-1.4)=-0.06 \\ f(-1.3)=0.08 \end{cases}$

و $f(-1.4)\times f(-1.3)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًا وحيدا β حيث $-1.4<\beta<-1.3$

5-ب- وجود مماسات لـ (C_f) توازي(Δ)

$$f'(x_0)=1$$

$$1+\frac{1}{(e^x-1)^2}=1$$

$$\frac{1}{(e^x-1)^2}=1-1$$

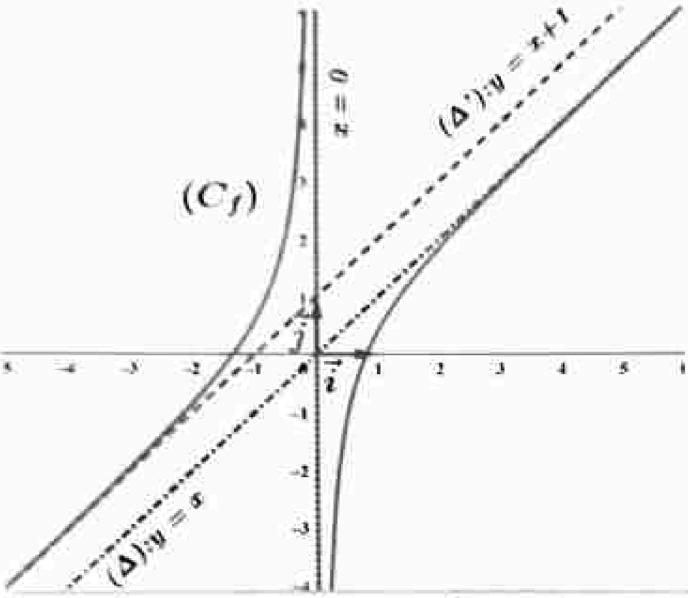
$$\frac{1}{(e^x-1)^2}=0$$

$$(e^x-1)^2\neq 0$$

$$1\neq 0$$

ومنه لا توجد مماسات توازي (Δ)

5-جـ-الرّسم البياني



5-د-المناقشة البيانيّة لحلول المعادلة:

$$(m-1)e^{-x}=m$$

$$(m-1)e^{-x}=m$$
$$me^{-x}-e^{-x}=m$$
$$m(e^{-x}-1)=e^{-x}$$
$$m=\frac{e^{-x}}{(e^{-x}-1)}$$
$$m=\frac{1}{(-e^x+1)}$$
$$m=-\frac{1}{e^x-1}$$
$$x+m=-\frac{1}{e^x-1}+x$$
$$f(x)=x+m$$

حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة

$$(\Delta_m):y=x+m$$

حيث $(\Delta_m)//(\Delta')//(\Delta)$

$$y=ax+b$$

و m يمثل تقاطع (Δ_m) مع محور التراتيب

-1 $m\in]-\infty\,;0[$ للمعادلة حلّ واحد موجب

-2 $m\in[0\,;1]$ لا يوجد حلول للمعادلة في $\mathbb{R}$

-3 $m\in]1\,;+\infty[$ للمعادلة حلّ واحد سالب

ملاحظة:

تم تغيير سؤال 6 بالرّسم البياني و المناقشة البيانيّة وتمّ كتابة (5-د) و(5-ج) بدل (6-أ) و(6-ب)

.46 بكالوريا 2009 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة عددية باك 2009 شعبة علوم تجريبية رقم 1

الموضوع الأول

I- f دالّة معرّفة على $I =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0]$

بـ: $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل.

1-أ- احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I .

1-ب- بقراءة بيانيّة ودون دراسة اتجاه تغيّرات f شكل جدول تغيّراتها.

2- g دالّة معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.$(o;\vec{i};\vec{j})$

2-أ- احسب نهاية g عند $+\infty$.

2-ب- تحقّق من أنّ (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له

2-جـ- ادرس تغيّرات g .

II- k دالّة معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي :

$k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

1-أ- احسب $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{k(h)-k(0)}{h}$

ماذا تستنتج ؟

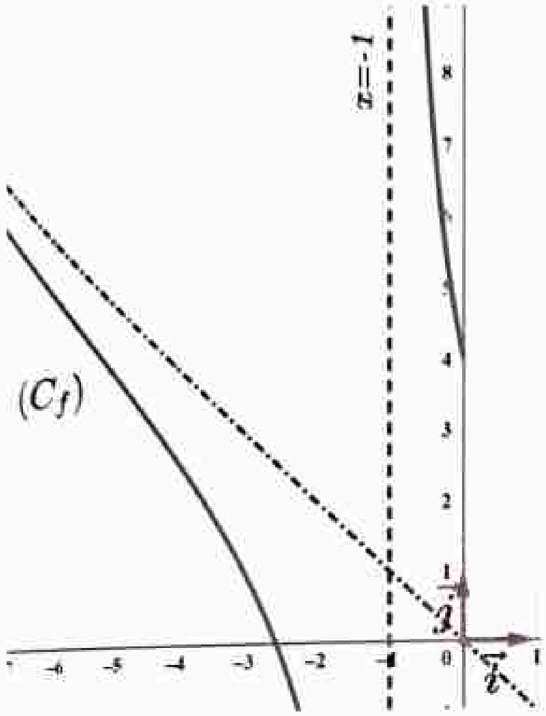
1-ب- أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2- اكتب معادلتي المماسين (Δ_1) و (Δ_2) عند النقطة التي فاصلتها $x_O = 0$

3- أرسم (Δ_1) (Δ_2) و (C_k) .

4- احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_k) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = -\frac{1}{2}$ ، $x = \frac{1}{2}$ ، $y = 0$



الحل

f دالة معرّفة على $I =]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0]$

$f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

1-أ-حساب النّهايات

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x + \frac{4}{x+1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left(-x + \frac{4}{x+1}\right) = -\infty$

لأنّ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{4}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left(-x + \frac{4}{x+1}\right) = +\infty$

لأنّ $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{4}{x+1} = +\infty$

التفسير البياني لـ $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$x = -1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

1-ب-بقراءة بيانيّة نشكل جدول تغيّرات f

x	$-\infty$	-1		0
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 4$	

2- g دالة معرّفة على $[0;+\infty[$ بـ:
$$g(x)=x+\frac{4}{x+1}$$

2-أ- حساب النّهاية g عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac{4}{x+1}=+\infty$$

لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$

2ب-التحقق أنّ (c_g) يقبل م م (Δ) عند $+\infty$

لدينا $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$

ونعلم أنّه إذا كانت $g(x)$ مكتوبة على الشكل

$$g(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$
$$=ax+b+h(x)$$
$$h(x)=\frac{4}{(x+1)}$$
$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$$

فإنّ $y=ax+b$ معادلة مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$ حيث $y=x$

2-أ-جـ-دراسة تغيّرات الدالة g

المشتقة:

الدالّة g تقبل الاشتقاق على $D_g=[0;+\infty[$

$$g'(x)=1+\frac{-4}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط x^2+2x-3 لأنّ $(x+1)^2>0$

$$x^2+2x-3=0$$
$$\sqrt{\Delta}=4$$
$$x_1=-3 \quad x_2=1$$

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
x^2+2x-3	$+$	$-$	$-$	0	$+$

بما أنّ الدالّة g معرّفة على $[0;+\infty[$

ومنه إشارة المشتقة هي:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالّة g متناقصة تماما على المجال $[0;1]$

ومتزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

-جدول تغيّرات الدالّة g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

II-k دالّة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ:
$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$$

1-كتابة عبارة الدالّة $K(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

$$k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}=\begin{cases}x+\frac{4}{x+1} & x\in[0;+\infty[\\ -x+\frac{4}{x+1} & x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0]\end{cases}$$

ومنه نستنتج أنّ لمّا $x\in[0;+\infty[$

فإنّ $k(x)=g(x)$

ولمّا $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0]$

فإنّ: $k(x)=f(x)$

1 -أ-حساب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h-0}$$
$$=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\left(\frac{h}{h}+\frac{\frac{4}{h+1}-4}{h}\right)$$
$$=\lim_{\substack{h\to0\\>}}\left(1+\frac{-4}{(h+1)}\right)=-3$$

ومنه $k'(0)=-3$

ومنه الدالّة k تقبل الاشتقاق على يمين العدد 0

-حساب $\lim\limits_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$

$$\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to0\\<}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h-0}$$
$$=\lim_{\substack{h\to0\\<}}\left(-1+\frac{-4}{(h+1)}\right)=-5$$

ومنه $k'(0)=-5$

ومنه الدالّة k تقبل الاشتقاق على يسار العدد 0

-نستنتج أنّ الدالّة k لا تقبل الاشتقاق عند 0

1-ب-التفسير الهندسي:

المنحنى (c_k) يقبل نصفي مماسين معامل توجيه الأول -3 والثاني -5 عند النقطة ذات الفاصلة

$x = 0$

2- كتابة معادلتي (Δ_1) و (Δ_2)

(Δ_1)

$y = k'(0)(x-0) + k(0)$

1)- (Δ_1) لمّا $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0]$

$k(x) = f(x)$

$k'(x) = -5$

$(\Delta_1) : \boldsymbol{y = -5x + 4}$

2)- (Δ_2) لمّا $x \in [0;+\infty[$

$y = k'(0)(x-0) + k(0)$

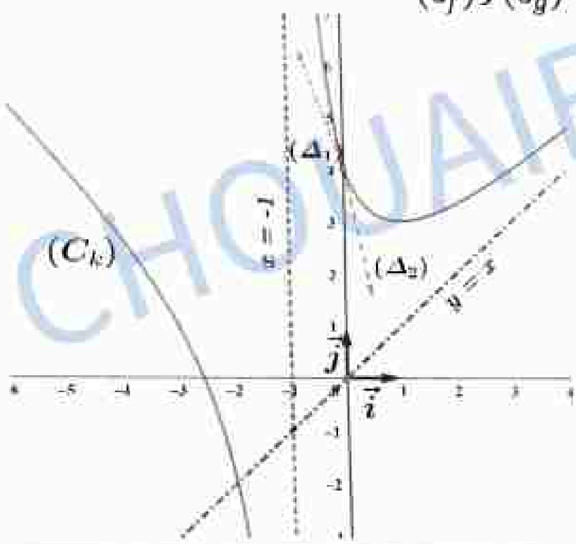
$k(x) = g(x)$

$k'(x) = -3$

$(\Delta_2) : \boldsymbol{y = -3x + 4}$

3- رسم (Δ_1)، (Δ_2)، (C_k)

رسم المنحنى (C_k) نلاحظ أنّه هو اتحاد المنحنيين (C_g) و (C_f)



4- حساب المساحة

$A = A_1 + A_2$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} g(x)$$

$$A_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(-x + \frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 4\ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$

$$= \frac{1}{8} + 4\ln 2$$

$$A_2 = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}}\left(x + \frac{4}{x+1}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 4\ln|x+1|\right]_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\ln\left|\frac{1}{2}+1\right| - 0$$

$$= \frac{1}{8} + 4\ln\frac{3}{2}$$

$A = A_1 + A_2$

$$= \frac{1}{8} + 4\ln 2 + \frac{1}{8} + 4\ln\frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + 4\ln 2 + 4\ln\frac{3}{2}$$

$$A = \frac{1}{4} + 4\ln 3\,(ua)$$

47. بكالوريا 2009 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2009 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني

الجزء الاول:

h دالّة عدديّة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

1-احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2-بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

واستنتج اتجاه تغير الدالّة h ثم أنجز جدول تغيراتها.

3-احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني:

لتكن f دالّة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالّة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ثم فسّر هذه النتيجة بيانيا.

1-ب- باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$، برهن أن $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u} = 0$.

1-جـ- استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1-د- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

1-هـ- ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنّسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2-بين أنّه من أجل كل x من المجال $]-1,+\infty[$

$f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3- بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4

4-ارسم (C_f).

5-احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=x-1$؛ $x=0$ و $x=1$

(تمت إضافة بعض الأسئلة لكي تكون دالة شاملة)

الحل

الجزء الأول:

h دالة عددية معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ
$$h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$$

1-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} h(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}} x^2+2x+\ln(x+1)$$
$$=-\infty$$

التفسير البياني:

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_h) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+2x+\ln(x+1)$$
$$=+\infty$$

لأن

$$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1)=+\infty$$

2-البرهان أنّ $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

$h(x)$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$h'(x)=2x+2+\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$
$$h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$$

إشارة $h'(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

$x+1>0$ على $]-1;+\infty[$

ونعلم أنّ $1+2(x+1)^2>0$

ومنه $\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}>0$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

-جدول تغيّرات h

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3-حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x

$h(0)=0$

ومنه جدول إشارة الدالة $h(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني

f دالّة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ
$$f(x)=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

1-أ-احساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\left[x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$=+\infty$$

التفسير البياني: $x=-1$ هي معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

1-ب- البرهان أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$

نضع $\ln u=t$ ومنه $u=e^t$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

لأنّ $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$

1-جـ-استنتاج $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$
$$=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

1-د- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}-x+1\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$

-استنتاج مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$:

بما أنّ $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$ فإنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

1-هـ-دراسة وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

هي إشارة الفرق $f(x)-y$ على $]-1;+\infty[$

$$f(x)-y=x-1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}-x+1$$

$$=-\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

نعلم أنّ $x+1>0$ على $]-1;+\infty[$ ومنه إشارة $f(x)-y$ من إشارة $-\ln(x+1)$

$$-\ln(x+1)>0$$

$$\ln(x+1)<0$$

$$e^{\ln(x+1)}<e^{0}$$

$$x+1<1$$

$$x<0$$

جدول الوضعيّة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-\ln(x+1)$	$+$	0	$-$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

2-البرهان أنّ $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$

الدالّة f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالّتها المشتقة هي

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-1\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)^2-1+\ln x+1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$f(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

-استنتاج تغيرات الدالة f

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

بما أنّ $f'(x)=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$ فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

الدالّة f متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$

متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

-جدول التغيّرات

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3-نفس السؤال بصيغة أخرى

بين أنّ المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا α

$$3.3<\alpha<3.4$$

بما أنّ الدالّة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]3.3\,;\,3.4[$

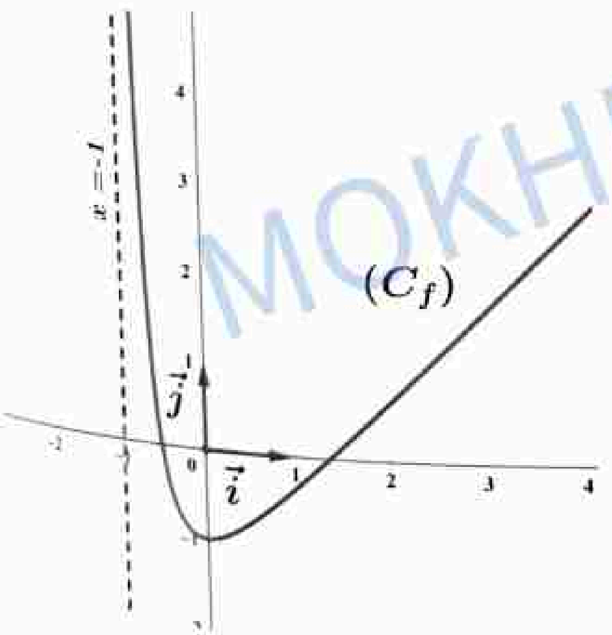
و

$$\begin{cases} f(3.4)=2.06\\ f(3.3)=1.96\end{cases}$$

و $2\in]1.96\,;\,2.06[$

حسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ المستقيم $y=2$ يقطع (C_f) في الفاصلة α حيث $3.3<\alpha<3.4$

4- الرّسم



إضافة: برهن أنّه يوجد مماس موازي للمستقيم (Δ) ثمّ عيّن معادلته

يوازي = الميل = معامل التوجيه = المشتقة

$$f'(x_1)=1$$

$$\frac{h(x)}{(x+1)^2}=1$$

$$\frac{x^2+2x+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=1$$

$x^2 + 2x + \ln(x+1) = (x+1)^2$

$x^2 + 2x + \ln(x+1) = x^2 + 2x + 1$

$\ln(x+1) = 1$

$x = e^1 - 1$

ومنه (C_f) يقبل مماس يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = e - 1$

•معادلة المماس (t) عند $x = e - 1$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(e-1)(x-(e-1)) + f(e-1)$

$= 1(x - e + 1) + e - 2 - \frac{1}{e}$

$= x - e + 1 + e - 2 - \frac{1}{e}$

$(\Delta): y = x - 1 - \frac{1}{e}$

$(-1 - \frac{1}{e} = -1.37)$

-المناقشة بيانيا عدد واشارة حلول المعادلات:

مناقشة $f(x) = x + m$

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة

$(\Delta_m): y = x + m$

حيث

$(\Delta_m)//(\Delta)//(t)$

$y = ax + b$

$y = x + m$

بالمطابقة نجد m تأخذ نفس قيم b

و b نقاط تقاطع المستقيم مع محور التراتيب

-1 $m \in]-\infty ; -1.37[$ لا يوجد للمعادلة حلول

-2 $m = -1.37$ للمعادلة حلا وحيدا موجبا $x = e - 1$

-3 $m \in]-1.37 ; -1[$ للمعادلة حلان موجبان

-4 $m = -1$ للمعادلة حلّ معدوم

-5 $m \in]-1 ; +\infty[$ للمعادلة حلّ وحيد سالب

مناقشة $f(x) = m + 2$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة

$(\Delta_m): y = m + 2$

$m = y - 2$

-1 $y \in]-\infty ; -1[$ $\Leftrightarrow$ $m \in]-\infty ; -3[$ لا يوجد حلول للمعادلة

-2 $y = -1$ $\Leftrightarrow$ $m = -3$ للمعادلة حلّ مضاعف $x = 0$

-3 $y \in]-1 ; +\infty[$ $m \in]-3 ; +\infty[$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

مناقشة $f(x) = |m|$

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم $y = |x|$

$y = |m|$

$|m| \geq 0$

$y \geq 0$

-1 لمّا $y = 0$ فانّ $m = 0$ للمعادلة حلان أحدهما موجب والأخر سالب

-2 لمّا $y \in]0 ; +\infty[$

فانّ $m \in]-\infty ; 0[\cup]0 , +\infty[$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

لتكن الدوال w, u, v المعرّفة على $]-1 ; +\infty[$:

$v(x) = f(x-1) + 1$

يرسم (C_v) انطلاقا من (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{t}\binom{-a}{b}$ حيث $\vec{t}\binom{1}{1}$

$u(x) = -f(x)$

$y' = -y$

$x' = x$

(C_u) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل

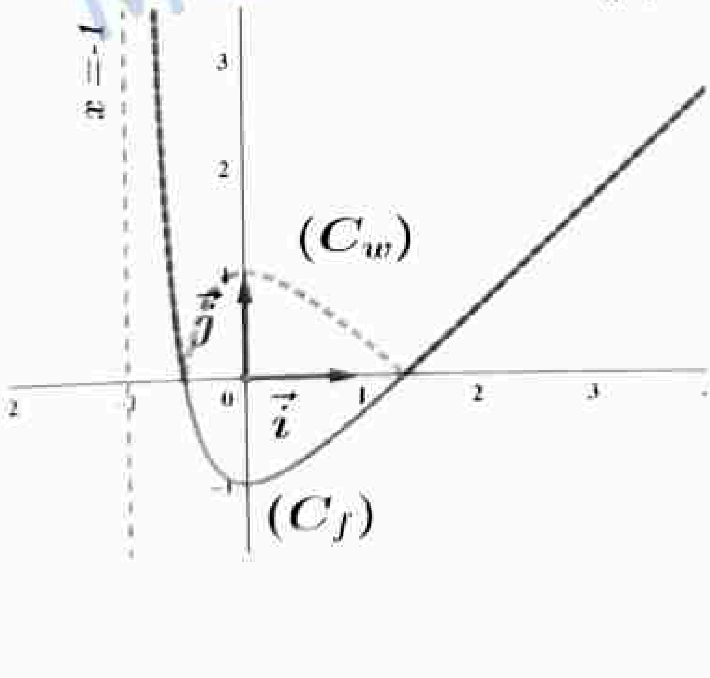
$w(x) = |f(x)| \geq 0$

(C_w) يقع فوق محور الفواصل

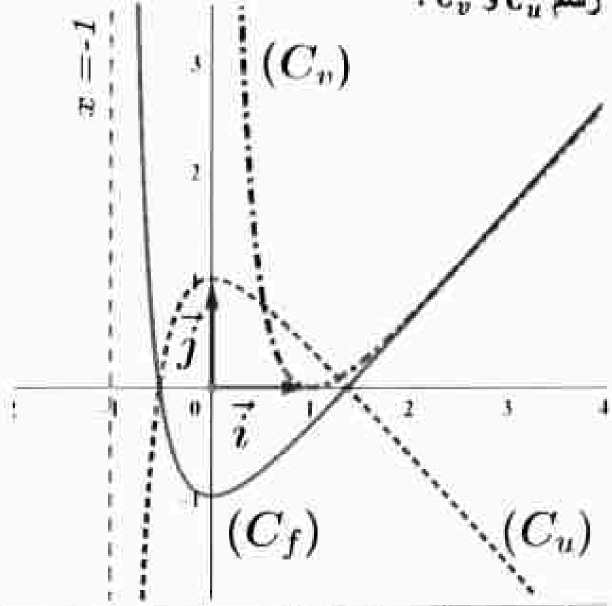
الجزء الذي يقع فوق (xx') من (C_f) ينطبق على (C_w)

الجزء الذي يقع تحت (xx') من (C_f) يناظر على (xx')

رسم C_w



رسم C_u و C_v :



***عيّن مجموعة تعريف الدالّة $K(x) = f(|x|)$**

$$K(x) = f(|x|) = |x| - 1 - \frac{\ln(|x|+1)}{|x|+1}$$

مجموعة تعريف K

$$\begin{cases} |x| + 1 \neq 0, & x \in R \\ |x| + 1 > 0, & x \in R \end{cases}$$
$$|x| > 0$$
$$1 + |x| > 0$$

ومنه المقام لا ينعدم

نقول أنّ $D_K = \mathbb{R}$

الدالّة k دالّة زوجية لأنّ $K(-x) = K(x)$

ونعلم أن $|-x| = |x|$ ومنه

$$K(-x) = f(|-x|) = |-x| - 1 - \frac{\ln(|-x|+1)}{|-x|+1}$$
$$= K(x)$$

بما أنّ الدالّة K زوجية فيكفي رسم منحناها البياني على $]0\,;+\infty[$ ونناظره بالنّسبة لمحور التراتيب

(C_k) ينطبق على (C_f) على $[0;+\infty[$

5-حساب مساحة الحيز

نلاحظ وضعيّة المساحة بالنّسبة إلى المستقيم

إذا كانت تحت المستقيم نقول أن:

$$A = \int_0^1 (y - f(x))dx$$

وإذا كانت فوق المستقيم نقول أن:

$$A = \int_0^1 (f(x) - y)dx$$

$$A = \int_0^1 (y - f(x))dx$$

$$A = \int_0^1 \left(x - 1 - x + 1 + \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$$

$$A = \int_0^1 \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx$$

لدينا

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \frac{1}{x+1}\ln(x+1)$$
$$= (\ln(x+1))'\ln(x+1)$$

ونعلم أنّ $u'u \xrightarrow{\text{دالتها الأصلية}} \frac{u^2}{2}$ أي:

$$\frac{\ln(x+1)}{x+1} \xrightarrow{\text{دالتها الأصلية}} \frac{(\ln(x+1))^2}{2}$$

ومنه

$$A = \left[\frac{(\ln(x+1))^2}{2}\right]_0^1$$

$$A = \frac{(\ln(1+1))^2}{2} - \frac{(\ln(0+1))^2}{2}$$

$$A = \frac{(\ln 2)^2}{2}\ (ua)$$

48. بكالوريا 2008 العلوم التجريبية

اليوتيوب: الدالة الاسية باك 2008 شعبة العلوم التجريب

الموضوع الاول

I-نعتبر الدالّة العدديّة للمتغير الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$$

حيث a و b عددان حقيقيّان.

(C_f) المنحنى الممثل للدالّة f في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$

- عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى (C_f) ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II-نعتبر الدالّة العدديّة g للمتغير الحقيقي x المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي

$$g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$$

(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ وفسّر النتيجة بيانيًا

(نذكر أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} ue^u = 0$)

ب- ادرس تغيّرات الدالّة g، ثم أنشئ جدول تغيّراتها.

جـ- بيّن أنّ المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثييها.

د- اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I.

هـ- ارسم (C_g).

و- H الدالّة العدديّة المعرّفة على $]-2,+\infty[$ كما يأتي: $H(x) = (\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيّان.

- عيّن α و β بحيث تكون H دالّة أصليّة للدالّة: $x \mapsto g(x)-1$
- استنتج الدالّة الأصليّة للدالّة g والتي تنعدم عند القيمة 0

III- لتكن k الدالّة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$

- باستعمال مشتقة دالّة مركبة، عيّن اتجاه تغير الدالّة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الحل

I-f دالة عدديّة معرّفة على $]-2;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = (ax+b)e^{-x}+1$$

1-تعيين قيمتي a و b:

$A \in (C_f)$ أي $f(-1) = 1$

$$(-a+b)e^{-1(-1)}+1 = 1$$
$$(-a+b)e = 0$$
$$e \neq 0$$

ومنه $b = a$ .... (1)

$f(x)$ قابلة للاشتقاق على D_f

$$f'(x) = (a-ax-b)e^{-x}$$
$$f'(-1) = (a-a(-1)-b)e^{1} = -e$$
$$(a+a-b)e = -e$$
$$2a-b = -\frac{e}{e}$$
$$2a-b = -1 \quad ....(2)$$

نعوض(1) في (2)

$$2b-b = -1$$
$$b = -1$$

إذن $a = -1$ $b = -1$

ومنه $f(x) = (-x-1)e^{-x}+1$

II- g دالة معرّفة على $]-2;+\infty[$:
$$g(x) = (-x-1)e^{-x}+1$$

II-أ-تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((-x-1)e^{-x}+1\right) = 1$$

نضع $u = -x$ لمّا $x \to +\infty$ فإن $u \to -\infty$

ومنه تصبح

$$\lim_{u\to-\infty}(u-1)e^{u}+1 = \lim_{u\to-\infty} ue^{u}-e^{u}+1$$
$$= 1$$

لأنّ:

$$\lim_{u\to-\infty} ue^{u} = 0$$
$$\lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0$$

ط2- إذا لم يذكر $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left((-x-1)e^{-x}+1\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left((-x-1)\frac{1}{e^{x}}+1\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x-1}{e^{x}}+1\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}+1\right)$$
$$= 1$$

II -ب-دراسة تغيّرات g

المشتقةg دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $[-2;+\infty[$

ودالتها المشتقة هي

$$g'(x) = -1e^{-x}-e^{-x}(-x-1)$$
$$= e^{-x}(-1-(-x-1))$$
$$= (-1+x+1)e^{-x} = xe^{-x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x

لأنّ $e^{-x} > 0$

جدول الإشارة:

x	-2		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالّة g متناقصة على المجال $[-2;\ 0]$

ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

x	-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	e^2+1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

$$g(-2) = (-(-2)-1)e^{-(-2)}+1 = e^2+1$$
$$g(0) = -1e^{0}+1 = 0$$

II -جـ-البرهان أنّ (C_g) يقبل نقطة انعطاف

حتى يقبل (C_g) نقطة انعطاف يجب أن تنعدم المشتقة الثانية وتغير إشارتها

$$g'(x) = xe^{-x}$$
$$g''(x) = (1-x)e^{-x}$$
$$g''(x) = 0 \Longrightarrow x = 1$$

جدول الإشارة

x	-2		1		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه (C_g) يقبل نقطة انعطاف I حيث $I(1; g(1))$

$$g(1) = (-1-1)e^{-1}+1$$

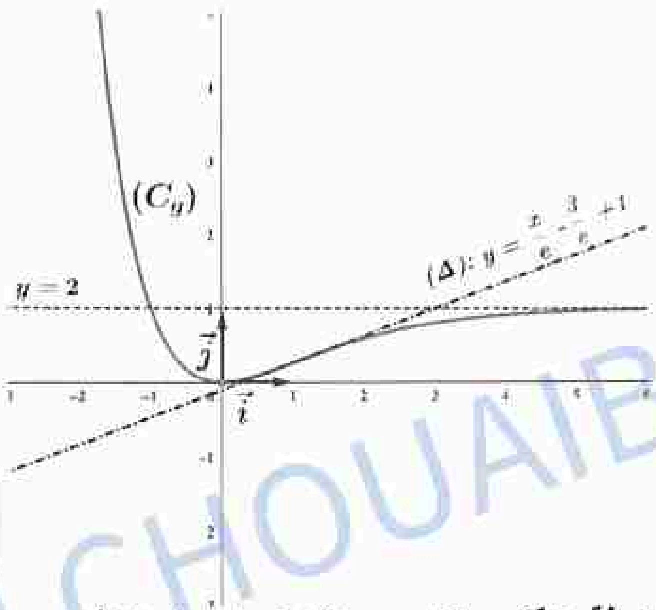
$$= -2e^{-1} + 1$$

$$\boldsymbol{I(1, -2e^{-1} + 1)}$$

II -د-كتابة معادلة المماس عند I

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$
$$y = e^{-1}(x-1) - 2e^{-1} + 1$$
$$y = xe^{-1} - e^{-1} - 2e^{-1} + 1$$
$$\boldsymbol{(T): y = xe^{-1} - 3e^{-1} + 1}$$

II -هـ-الرّسم (C_g)



إضافة: ناقش بيانيًا عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = m$

حلول المعادلة $g(x) = m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$

1- $m \in]-\infty; 0[$ لا يوجد للمعادلة حلول

2- $m = 0$ للمعادلة حلّ معدوم

3- $m \in]0; 1[$ للمعادلة حلأن مختلفان في الإشارة

4- $m = 1$ للمعادلة حلّ وحيد سالب

5- $m \in]1; e^2 + 1[$ للمعادلة حلّ وحيد سالب

II- H معرّفة على $[-2\,;+\infty[$

$$\boldsymbol{H(x) = (ax + \beta)e^{-x}}$$

تعيين a و β

الدالّة H قابلة للاشتقاق على $[-2;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي $H'(x) = (ax+\beta)(-e^{-x}) + ae^{-x}$
$$= (-ax - \beta + a)e^{-x}$$

حتى تكون الدالّة H دالّة أصليّة للدالّة: $x \to g(x) - 1$ على $[-2\,;+\infty[$ يجب أنّ:

من أجل كل x من المجال $[-2\,;+\infty[$ فإنّ $H'(x) = g(x) - 1$

أي $(-ax - \beta + a)e^{-x} = (-x-1)e^{-x}$

بالمطابقة نجد

$$\left.\begin{aligned} -a &= -1 \\ -\beta + a &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= 1 \\ \beta &= 2 \end{aligned}\right\}$$

ومنه $H(x) = (x+2)e^{-x}$

بما أنّ $g(x) = g(x) + 1 - 1$ إذن
$$g(x) = H'(x) + 1$$

فانّ الدالّة الأصليّة للدالّة g على المجال $]-2,+\infty[$ هي الدالة $x \to H(x) + x + b$

لأنّ $\int g(x)\,dx = \int (H'(x) + 1)\,dx$
$$= H(x) + x + b$$

حيث b عدد حقيقي

البحث عن الدالّة الأصليّة للدالّة g التي تنعدم عند القيمة 0

$$H(0) + 0 + b = 0$$

ومنه $b = -2$

الدالّة الأصليّة للدالّة g التي تنعدم عند 0 هي الدالّة
$$x \to (x+2)e^{-x} + x - 2$$

k دالّة معرّفة على $[-2\,;+\infty[$:

$$k(x) = g(x^2)$$

تعيين اتجاه تغير الدالّة k مشتقة دالّة مركب هو

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)\left(f'(g(x))\right)$$

$$k(x) = g(x^2)$$
$$k'(x) = 2x\left(g'(x^2)\right) = 2x\left(x^2 e^{-x^2}\right)$$
$$= 2x^3 e^{-x^2}$$

$e^{-x^2} > 0$ ومنه إشارة $k'(x)$ من إشارة $2x^3$ ونعلم أنّ :
$$2x^3 = 2x(x^2)$$

ونعلم أنّ $x^2 > 0$ أي إشارتها من إشارة x

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالّة k متناقصة تماما على المجال $]-2;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول التغيّرات

x	-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$-5e^{-4}+1$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$

$$k(x) = g(x^2)$$

نضع $u(x) = x^2$

$$k(x) = g(u(x))$$
$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

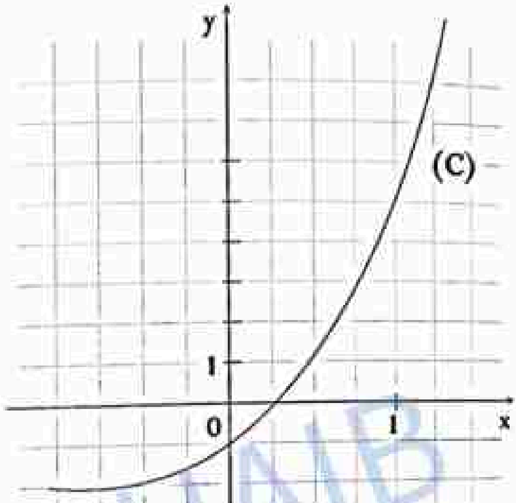
$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$

$\lim_{x\to+\infty} g(x^2) = \lim_{x\to+\infty} g(u(x)) = 1$

49. بكالوريا 2008 العلوم التجريبية

اليوتيوب: دالة عددية باك 2008 شعبة علوم تجريبية

الموضوع الثاني



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالّة العدديّة والمعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1-أ-بقراءة بيانيّة شكل جدول تغيّرات الدالّة g وحدد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

1-ب- علّل وجود عدد حقيقي α من المجال $]0;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha) = 0$

1-ج- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

2-f هي الدالّة العدديّة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2}$$

وليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

2-أ-تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$

حيث f' هي الدالّة المشتقة للدالّة f

2-ب-عيّن دون حساب $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2-جـ- احسب: $\lim_{x\to-1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا.

2-د- شكل جدول تغيّرات الدالّة f.

نأخذ $\alpha \simeq 0,26$

3-أ-عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

3-ب-ارسم المنحنى (Γ)

4-أ- اكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$ حيث a و b عددان حقيقيّان.

4-ب-عيّن F الدالّة الأصلية للدالّة f على المجال $]-1;+\infty[$ والتي تحقّق $F(1) = 2$

الحل

g معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

1-أ-بقراءة بيانيّة g

جدول التغيّرات الدالّة g

x	-1 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-2 $\nearrow$ $+\infty$

$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ و $g(0) = -1$

1-ب-تعليل وجود α حيث $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق:

$$g(\alpha) = 0$$

بما أنّ الدالّة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;\frac{1}{2}[$

و $\begin{cases} g(0) = -1 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{8} \end{cases}$

و $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسّطة فإنّ $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $\alpha \in]0;\frac{1}{2}[$ يحقق

$$g(\alpha) = 0$$

1-جـ استنتاج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	‖ $-$	0	$+$

2- f دالّة معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

2-أ-التحقق أنّ $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

$$f'(x)=\left(\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}\right)'$$
$$=\frac{(3x^2+6x+3)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$
$$=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$
$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأنّ $(x+1)^3>0$ في $]-1;+\infty[$

-جدول الإشارة

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$

ومنه الدالّة f متناقصة تماما على $]-1;\alpha]$

و متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

2-ب- تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

نعلم أنّ

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

بالمطابقة نجد أنّ

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$$
$$=0$$

لأنّ $f'(\alpha)=\frac{g(\alpha)}{(x+1)^3}$ و $g(\alpha)=0$ إذن $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$

التفسير البياني: (C_f) يقبل مماسا أفقيا موازي لمحور الفواصل

2-جـ-حساب النّهايات

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}(x^3+3x^2+3x+2)\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$=+\infty$$

(C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ كمستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

*يمكن حساب النّهاية عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}-(x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+3x+2-(x+1)^2(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+3x^2+3x+2-x^3-3x^2-3x-1}{(x+1)^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)=0$$

ومنه (C_g) له مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

معادلته: $(\Delta): y=x+1$

2-د- جدول تغيّرات الدالّة f

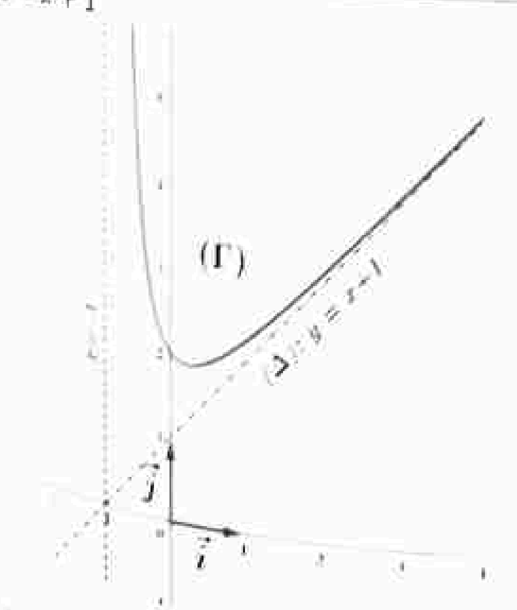
x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3-أ-تعيين مدور لـ$f(\alpha)$ إلى 10^{-2}

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$
$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2}{(\alpha+1)^2}$$
$$f(\alpha)\approx 1.89$$

3-ب- رسم المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

$y=x+1$



4-أ-كتابة $f(x)$ على شكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+a)(x+1)^2 + b}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^3+2x^2+a+ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$$
$$f(x) = \frac{x^3 + (2+a)x^2 + (2a+1)x + a + b}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

$$\left.\begin{matrix} 2 + a = 3 \\ a + b = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a = 1 \\ b = 1 \end{matrix}\right\}$$

ومنه $f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$

4-ب- تعيين الدالّة الأصليّة لـ f

الدالّة F معرّفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]-1\,;+\infty[$ حيث: $F'(x) = f(x)$

والتي تحقّق $F(1) = 2$

لدينا

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + c$$

نعلم أنّ

$$\frac{1}{(x+1)^2} \xrightarrow{\text{دالتها الأصلية}} -\frac{1}{x+1}$$
$$F(1) = \frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{1+1} + c$$
$$\frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{1+1} + c = 2$$
$$\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + c = 2$$
$$1 + c = 2$$
$$c = 1$$

ومنه $F(x)$ هي

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x+1} + 1$$

جزء دوال شعبة التقني الرياضي

MOKHFI CHOUAIB

Bac 2022

50. بكالوريا 2021 تقني رياضي

الموضوع الأول

I) الدالة العددية g معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2-5+e^{x-1}$

1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.71<\alpha<1.72$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+1+(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ أن $f'(x)=g(x)e^{1-x}$

ب- استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha[$.

ج- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C) ثم ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) .

3) بين أن (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A يطلب تعيين فاصلتها (لا يطلب كتابة معادلة (T))

4) أ- بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1+\sqrt{6})$.

ب- ارسم (Δ) ، (T) و (C).

(نأخذ $f(\alpha)\approx 1.1$ ، $f(\sqrt{5})\approx 1.4$ و $f(1+\sqrt{6})\approx 3.1$)

5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x)=-x+1+(-x^2+2x+3)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $h(x)=f(-x)$

ب- اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثم ارسمه.

الحل

I-1-البرهان أن الدالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة مهما يكن $x\in D_g$ فإن : $g'(x)=2x+e^{x-1}$

$g'(x)>0$ على المجال $[0;+\infty[$ اذن g متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

لأن $2e^{x-1}>0$ و $x>0$

2-أ-البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71<\alpha<1,72$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,71;1,72]$ و $\begin{cases} g(1,71)=-0,041 \\ g(1,72)=0,021 \end{cases}$

و $g(1,72)\times g(1,71)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71<\alpha<1,72$

2- ب-اشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-1-أ-البرهان أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ ، $f'(x)=g(x)e^{1-x}$

f قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ودالتها المشتقة مهما يكن $x\in D_f$

$$f'(x)=(e^{x-1}-2x-2+x^2+2x-3)e^{1-x}$$
$$=(x^2-5+e^{x-1})e^{1-x}$$
$$=g(x)e^{1-x}$$

1-ب-دراسة تغيرات الدالة f :

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;\alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

1-ج-البرهان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{(-x^2-2x+3)e}{e^x}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\left(-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e\right]=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

جدول التغيرات:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+3e$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

-البرهان أن (Δ) مقارب مائل لـ (C) مع دراسة وضعيته بالنسبة لـ (C) :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(-x^2-2x+3)e^{1-x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e$$
$$=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$

الوضعية بالنسبة لـ (C) و (Δ) :

$$f(x)-y=(-x^2-2x+3)e^{1-x}$$

اشارته من اشارة $-x^2-2x+3$ لأن $(e^{1-x}>0)$

أي $-x^2-2x+3=0$

$\Delta=16$

أي: $x_1=-3$ $\quad x_2=1$

جدول الوضعية:

x	$-\infty$ $\;-3$	0		1	$+\infty$
$f(x)-y$			$+$	0	$-$
الوضعية			(C) فوق (Δ)	نقطة تقاطع	(C) تحت (Δ)

3-البرهان أن (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة A مع تعيين فاصلتها :

$f'(x)=1$ أي $g(x)e^{1-x}=1$ أي

$$g(x)=e^{x-1}$$
$$x^2-5+e^{x-1}=e^{x-1}$$
$$x^2-5=0$$
$$x^2=5$$

أي $x_1=\sqrt5$

أو $x_2=-\sqrt5$ مرفوض لأن($x\in[0;+\infty[$)

ومنه (C) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) في نقطة $A\left(\sqrt5;f(\sqrt5)\right)$

4-أ-البرهان أن (C) يقبل نقطة انعطاف:

مهما يكن $x\in D_f$ فإن :

$$f''(x)=g'(x)e^{1-x}-e^{1-x}g(x)$$
$$=(2x+e^{x-1})e^{1-x}-e^{1-x}(x^2-5+e^{x-1})$$
$$=(2x-x^2+5)e^{1-x}$$

اشارة $f''(x)$ من اشارة $-x^2+2x+5$ أي :

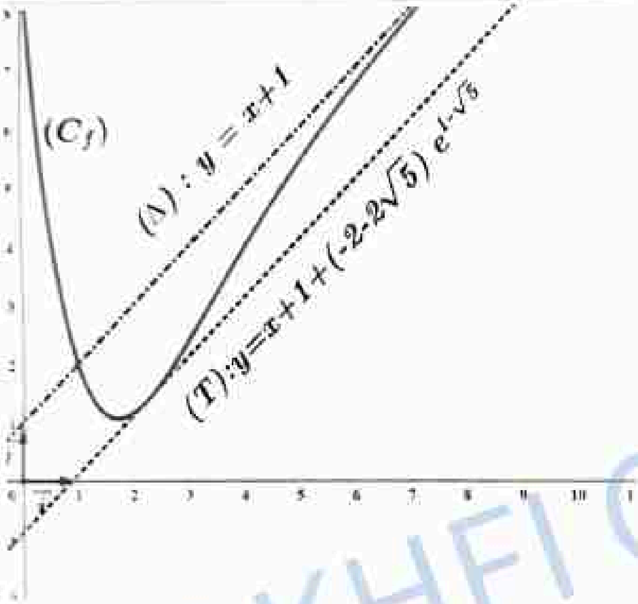
$$-x^2+2x+5=0$$
$$\Delta=24$$

x	0		$1+\sqrt6$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$x_1=1-\sqrt6$ مرفوض و $x_2=1+\sqrt6$

اذن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $1+\sqrt6$

ب- الرسم



5-أ-التحقق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$ أن : $h(x)=f(-x)$

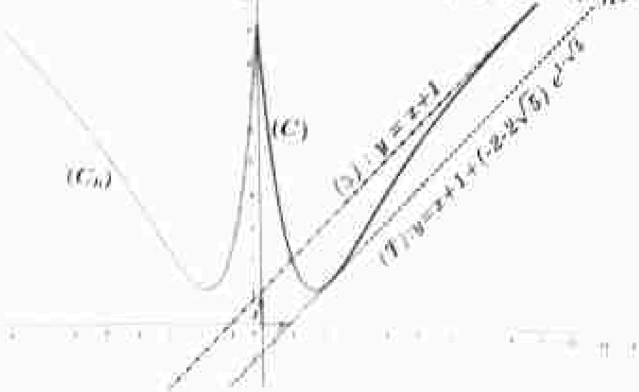
$$f(-x)=-x+1+[-(-x)^2-2(-x)+3]e^{1-(-x)}$$
$$f(-x)=-x+1+(-x^2+2x+3)e^{1+x}$$

ومنه $f(-x)=h(x)$

على المجال $]-\infty;0]$

5-ب-شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) :

(C_h) نظير (C) بالنسبة لحامل محور التراتيب



51. بكالوريا 2021 تقني رياضي

الموضوع الثاني

I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$g(x) = 2\ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$$

1- بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

2-أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.89 < \alpha < 1.90$.

ب- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x) = -x - 2 + \frac{3+2\ln x}{x}$

(C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1- أ- احسب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- أ- بين أنه من اجل كل x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$.

ب- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$ ومتناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f.

3- أ- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x-2)]$ ثم استنتج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ).

4- بين أن (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 ثم اكتب معادلة لـ (T) مماس (C) عند A.

5- ارسم (T) ، (Δ) ، و (C)

(نأخذ $\frac{1}{\alpha} \approx 0.53$ ، $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx 0.73$)

6- الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:
$h(x) = |x| + 2 - \frac{3+\ln(x^2)}{|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- بين أن الدالة h دالة زوجية.

ب- تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x) = -f(x)$

ج- اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثم ارسمه.

الحل

I-1-اتجاه تغير الدالة g :

مهما يكن $x \in D_g$ فإن : $g'(x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3}$

$g'(x) > 0$ على $]0;+\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2-تبيين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,89 < \alpha < 1,9$

أ-الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,89;1,9[$

و $\begin{cases} g(1{,}89) = -0{,}0068 \\ g(1{,}9) = 0{,}0067 \end{cases}$

و $g(1{,}89) \times g(1{,}9) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}89 < \alpha < 1{,}9$

ب-اشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II-1-أ-حساب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا:

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim_{x \to 0^{>}} \left(-x - 2 + \frac{3+2\ln x}{x}\right) = -\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x = 0$

1-ب-حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x - 2 + \frac{3}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) = -\infty$$

2-أ-تبيين أن $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و مهما يكن $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{2}{x}x - (3+2\ln x)}{x^2}$$
$$= -1 + \frac{(-1-2\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{-x^2 - 1 - 2\ln x}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(-x^2 - 1 - 2\ln x)$$

ولدينا $\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\left[2\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1-\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right]$

$$=\frac{1}{x^2}\left[-2\ln x-1-x^2\right]$$

اذن : $f'(x)=\frac{1}{x^2}g\left(\frac{1}{x}\right)$ محققة

2-ب-اتجاه تغير الدالة f :

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ لأن $\frac{1}{x^2}>0$

و $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ لما $\frac{1}{x}=\alpha$ أي $x=\frac{1}{\alpha}$

- $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$ لما $0<\frac{1}{x}<\alpha$ ومنه $x>\frac{1}{\alpha}$

وعليه الدالة f متناقصة تماما على $\left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[$

- $g\left(\frac{1}{x}\right)>0$ لما $\frac{1}{x}>\alpha$ ومنه $0<x<\frac{1}{\alpha}$

وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\left]0;\frac{1}{\alpha}\right]$

2-جـ-جدول التغيرات :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

3-أ-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)$$
$$=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x-2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$

3-ب-الوضعية بالنسبة لـ (C) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-(-x-2)=\frac{3+2\ln x}{x}$$

أي : $3+2\ln x=0$ اي $\ln x=-\frac{3}{2}$

ومنه $x=e^{-\frac{3}{2}}$

جدول الوضعية:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) فوق (Δ)	

4-تبيين أن (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

مهما يكن $x\in D_f$ فإن :

$$f''(x)=\frac{\left(-2x-\frac{2}{x}\right)x^2-2x(-x^2-1-2\ln x)}{x^4}$$
$$=\frac{-2x^2-2+2x^2+2+4\ln x}{x^3}$$
$$=\frac{4\ln x}{x^3}$$

اشارة $f''(x)$ من اشارة $\ln x$ أي :

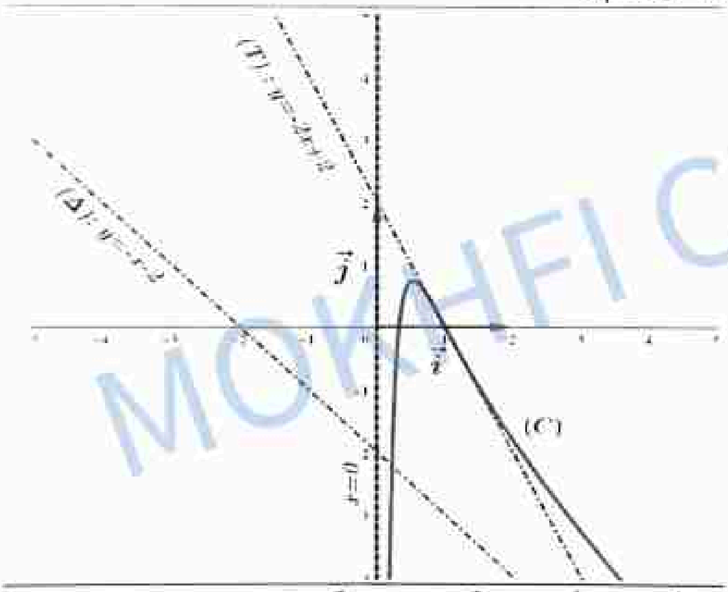
x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

وعليه (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة $A(1;0)$

معادلة (T) مماس (C) عند A :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=-2(x-1)+0$$
$$(T):\ y=-2x+2$$

5-الرسم :



6-أ-تبيان أن الدالة h زوجية :

من أجل $x\in D_h$ و $-x\in D_h$ فإن :

$$h(-x)=|-x|+2-\frac{3+\ln((-x)^2)}{|-x|}$$
$$=|x|+2-\frac{3+\ln(x^2)}{|x|}$$
$$=h(x)$$

ومنه h دالة زوجية

6-ب-التحقق أنه على المجال $]0;+\infty[$:

$$h(x)=-f(x)$$

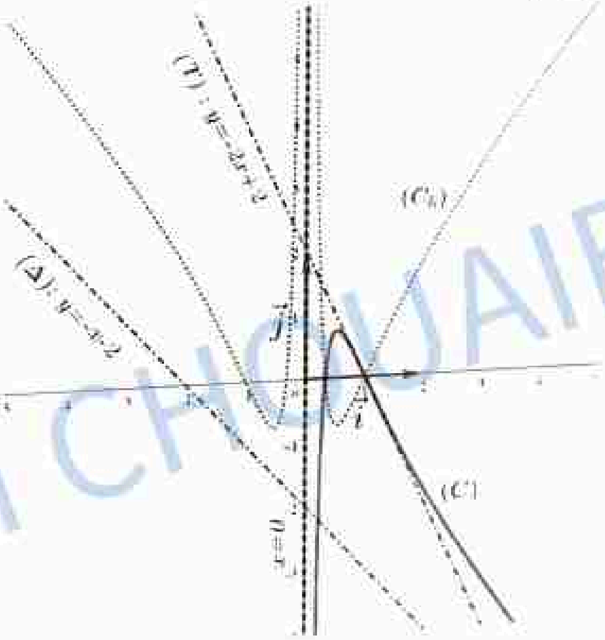
على المجال $]0;+\infty[$:

$$h(x)=x+2-\frac{3+2\ln x}{x}=-f(x)$$

6-جـ : شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) :

(C_h) نظير (C) بالنسبة لحامل محور الفواصل على $]0;+\infty[$ و (C_h) وبما أن h زوجية فإن منحناها يتناظر بالنسبة لمحور التراتيب على المجال $]-\infty,0[$

الرسم



52. بكالوريا 2020 تقني رياضي

الموضوع: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2020 تقني رياضي

الموضوع الأول

I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0;+\infty[$:
$g(x)=-1+x+2\ln x$

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.

2) احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$.

II) الدالة العدديّة f معرفة على $]0;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{-1+(x-2)\ln x}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

1-ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2-أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:
$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

2-ب) عيّن اتجاه تغيّر الدالّة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثّل للدالّة: $x\longmapsto \ln x$ على المجال $]0;+\infty[$.

3-أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

3-ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المنحنى (Γ).

4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β، ثمّ تحقّق أنّ: $0.5<\alpha<0.6$ و $2.9<\beta<3$

5) ارسم (Γ) ثمّ (C_f).

الحل

I-1) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$:

المشتقة:

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة
$$g'(x)=0+1+2\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=1+\frac{2}{x}>0$$

أي $g'(x)>0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

I-2) حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$:

-حساب $g(1)$:

$$g(1) = 0$$

-إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

II-1-أ) حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{-1+(x-2)\ln x}{x}\right] = +\infty$$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

II-1-ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-1+(x-2)\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}+\frac{(x-2)\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}+\frac{xlnx}{x}-\frac{2lnx}{2}\right]$$
$$= +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^n} = 0$

II-2-أ) البرهان أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ حيث $x > 0$:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x+\frac{1}{x}(x-2)\right)(x)-1(-1+(x-2)\ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{xln\,x+x-2+1-(x-2)\ln x}{x^2}$$
$$= \frac{xln\,x+x-1-xln\,x+2\ln x}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{-1+x+ln\,x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

II-2-ب) تعيين اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

-جدول التغيرات للدالة f :

$$f(1) = -1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

II-3-أ) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+(x-2)\ln x}{x}\right)-\ln x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+xlnx-2\ln x-xlnx}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1-2\ln x}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}\right)$$
$$= 0$$

(C_f) يقبل منحنى مقارب (Γ) عند $+\infty$ معادلته $y = \ln x$.

II-3-ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمنحنى (Γ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)-\ln x = \frac{-1-2\ln x}{x}$$

$x > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-1-2\ln x$ حيث:

إذا كان: $-1-2\ln x = 0$

$$\Rightarrow -2lnx = 1$$
$$\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$$
$$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

ومنه $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f(x)-\ln x$	||	$+$	0	$-$	
الوضعية	||	(C_f) فوق (Γ)	(C_f) يقطع (Γ)	(C_f) تحت (Γ)	

II-4) البرهان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين α و β

أي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β :

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة (متناقصة) تماما على المجال $]0;1]$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty \\ f(1) = -1 \end{cases}$$ و

و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) \times f(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0; 1[$

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة (متزايدة) تماما على المجال $]1; +\infty[$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$ و

و $f(1) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]1; +\infty[$

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β .

-التحقق أن $0.5 < \alpha < 0.6$:

$$\begin{cases} f(0.5) = 0.07 \\ f(0.6) = -0.014 \end{cases}$$

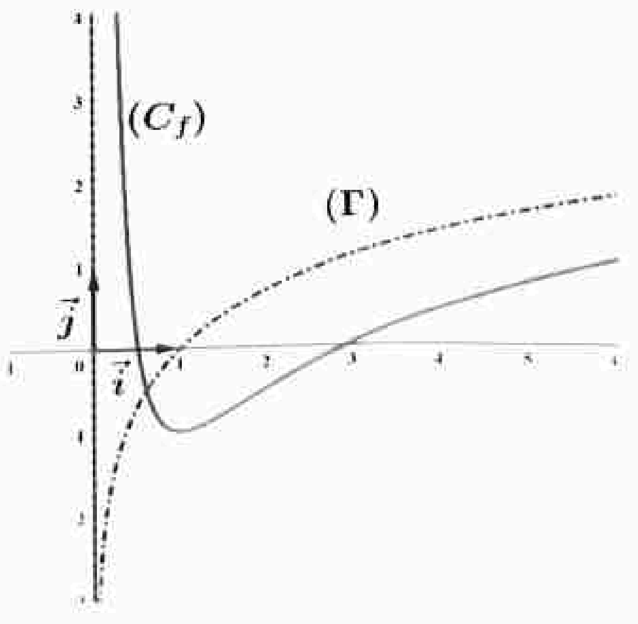
ومنه $0.5 < \alpha < 0.6$

-التحقق أن $2.9 < \beta < 3$:

$$\begin{cases} f(2.9) = -0.4 \\ f(3) = 0.03 \end{cases}$$

ومنه $2.9 < \beta < 3$

5- رسم (C_f) و (Γ)



53. بكالوريا 2020 تقني رياضي

التوثيق: دالة أسية شاملة و رائعة باك 2020 تقني رياضي

الموضوع الثاني

الدالّة العدديّة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1-أ) بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$

1-ب) ادرس إشارة $f'(x)$ واستنتج اتّجاه تغير الدالّة f .

1-جـ) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالّة f.

2-أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x - \frac{3}{4}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

2-ب) ادرس وضعيّة (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4) بيّن أنّ المنحنى البياني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها.

5) ارسم (Δ)، (T) و المنحنى البياني (C_f).

6) ليكن m وسيطا حقيقيًا. عيّن مجموعة قيم m الّتي من أجلها تقبل المعادلة: $f(x) = x + m$ حلّين مختلفين.

الحل

الدالّة العدديّة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2$$

1-أ- البرهان أن: $f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-1; +\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{4} \times [2(2e^{-x} - 1)(-2e^{-x})]$$
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}[-4e^{-2x} + 2e^{-x}]$$
$$f'(x) = 1 - 2e^{-2x} + e^{-x}$$
$$f'(x) = -2e^{-2x} + e^{-x} + 1$$

ولدينا من جهة أخرى

$$f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$$
$$f'(x) = 2e^{-x} + 1 - 2e^{-2x} - e^{-x}$$

$$= -2e^{-2x} + e^{-x} + 1$$
$$f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1)$$

ومنه

1-ب- دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $[-1; +\infty[$

نعلم أن $2e^{-x} + 1 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $1 - e^{-x}$

$1 - e^{-x} = 0$
$e^{-x} = 1$
$\ln e^{-x} = \ln 1$
$-x = 0$
$x = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-1; 0]$
الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

1-جـ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2\right) = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

جدول التغيرات

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-1)$	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 + \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2 - \left(x - \frac{3}{4}\right)\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

2-ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ على $[-1; +\infty[$

$$f(x) - y = \frac{1}{4}(2e^{-x} - 1)^2 - \frac{1}{4}$$
$$f(x) - y = \frac{1}{4}[4e^{-2x} - 4e^{-x} + 1] - \frac{1}{4}$$
$$= e^{-2x} - e^{-x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$
$$f(x) - y = e^{-x}(e^{-x} - 1)$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $e^{-x} - 1$

لأن $e^{-x} > 0$

$e^{-x} - 1 > 0$
$e^{-x} > 1$
$x < 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

3- البرهان أن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ(Δ)

نعلم أنّ ميل المماس (T) هو $f'(x)$، وبما أنّ (T) و (Δ) متوازيان فهذا يعني أنّ:

$f'(x) = 1$
$$f'(x) = (1 - e^{-x})(2e^{-x} + 1) = 1$$
$$-2e^{-2x} + e^{-x} + 1 = 1$$
$$-2e^{-2x} + e^{-x} = 0$$
$$e^{-x}(-2e^{-x} + 1) = 0$$

لدينا $e^{-x} > 0$ ومنه

$-2e^{-x} + 1 = 0$
$2e^{-x} = 1$
$e^{-x} = \frac{1}{2}$
$-x = \ln\frac{1}{2}$
$x = -\ln\frac{1}{2} = ln\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \ln 2$

ومنه:
يوجد مماس (T) يوازي (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$ معادلته:

$y = f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2)$
$y = x - \ln 2 + f(\ln 2)$
$f(ln\, 2) = ln2 - 1 + \frac{1}{4}\left(2e^{-ln2} - 1\right)^2$
$f(ln\, 2) = ln2 - 1 + \frac{1}{4}(1 - 1)^2$
$f(ln\, 2) = ln2 - 1$

ومنه:

$y = x - \ln 2 + \ln 2 - 1$
$(T): y = x - 1$

4- البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

(C_f) يقبل نقطة انعطاف عند النقطة ذات الفاصلة x_0

معناه:

$f''(x_0) = 0$

لدينا:

$f'(x) = -2e^{-2x} + e^{-x} + 1$
$f''(x) = 4e^{-2x} - e^{-x}$

ومنه

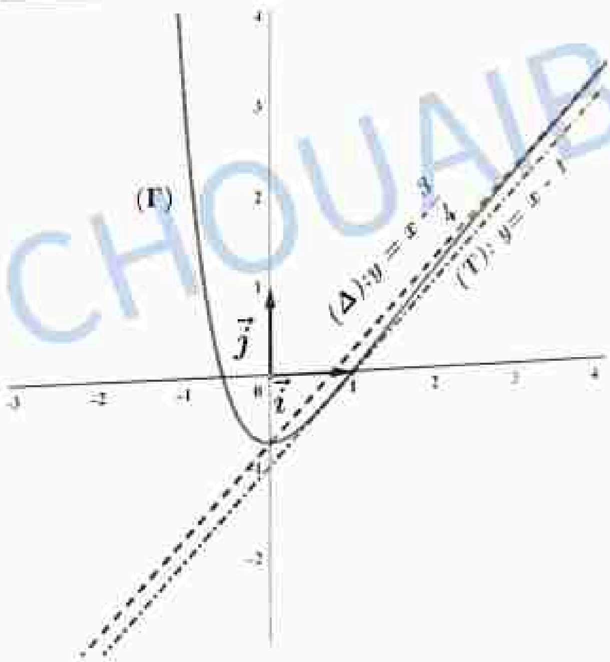
$$f''(x) = 0$$
$$4e^{-2x} - e^{-x} = 0$$
$$e^{-x}(4e^{-x} - 1) = 0$$

نعلم أن $e^{-x} > 0$ ومنه

$$4e^{-x} - 1 = 0$$
$$4e^{-x} = 1$$
$$e^{-x} = \frac{1}{4}$$
$$x = -\ln\frac{1}{4} = \ln 4$$
$$f(\ln 4) = \ln 4 - 1 + \frac{1}{16} = \ln 4 - \frac{15}{16}$$

ومنه النقطة $A(\ln 4, \ln 4 - \frac{15}{16})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

5- رسم (Δ)، (T) و المنحنى البياني (C_f).



6- قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين مختلفين.

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذي المعادلة $y = x + m$

من البيان لدينا:

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين مختلفين لما: $m \in]-1; -\frac{3}{4}[$

.54 بكالوريا 2019 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة اسية شاملة باك 2019 تقني رياضي

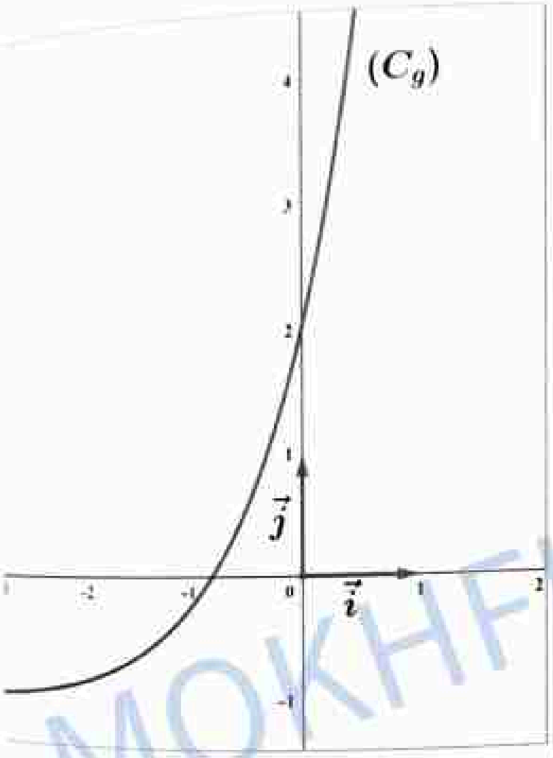
الموضوع الأول

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (x + 3)e^x - 1$$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو في الشكل.

بقراءة بيانية:



أ- حدد إشارة $g(-1)$ و $g\left(-\frac{1}{2}\right)$.

ب- استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $]-1; -\frac{1}{2}[$

بحيث $g(\alpha) = 0$ ثم تحقق أن: $-0.8 < \alpha < -0.7$

جـ- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$بـ:

$$f(x) = (x + 2)(e^x - 1)$$

و (C_f)منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن: $f'(x) = g(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3-أ- احسب $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x)$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

3-ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

3-جـ- اكتب معادلة (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم(Δ)

4- ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha) \approx -0.7$)

5- احسب $f(x) - g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

6- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |x|\left(e^{|x|-2} - 1\right) + 1$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

6-أ-بين أن الدالة h زوجية

6-ب-تأكد أنه من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $h(x) = f(x-2) + 1$

6-جـ- اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

الحل

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(x) = (x+3)e^x - 1$$

أ-تحديد الإشارات

إشارة $g(-1)$ سالبة وإشارة $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ موجبة

ب-استنتاج وجود α

لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال:

$\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ و

و

$$\begin{cases} g(-1) = -0.26 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.51 \end{cases}$$

و

$$g(-1) \times g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$

بما أن $g(-0.8) = -0.01$

و $g(-0.7) = 0.14$ فإن $-0.8 < \alpha < -0.7$

جـ- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ -1 α $-\frac{1}{2}$ $+\infty$
$g(x)$	$-$ 0 $+$

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (x+2)(e^x - 1)$$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

2- اثبات أن $f'(x) = g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (e^x - 1) + e^x(x+2)$$
$$= (x+3)e^x - 1$$
$$f'(x) = g(x)$$

وعليه:إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $f(\alpha)$ ↗ $+\infty$

3-أ- حساب $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x)$:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \to -\infty} [(x+2)(e^x - 1) + x]$$
$$\lim_{x \to -\infty} (xe^x + 2e^x - 2) = -2$$
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = -2$$
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x + 2] = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0$$

أي (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x - 2$ بجوار $-\infty$

3-ب- دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(Δ)

$$f(x) - (-x-2) = (x+2)e^x$$
$$f(x) - (-x-2) > 0$$
$$\Rightarrow (x+2)e^x > 0 \Rightarrow x > -2$$

الوضعية:

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]-2;+\infty[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]-\infty;-2[$

(C_f) يقطع (Δ) عند $x = -2$

جـ-معادلة المماس (T)

(T)يوازي (Δ) أي لهما نفس الميل $f'(x_0) = -1$

ومنه

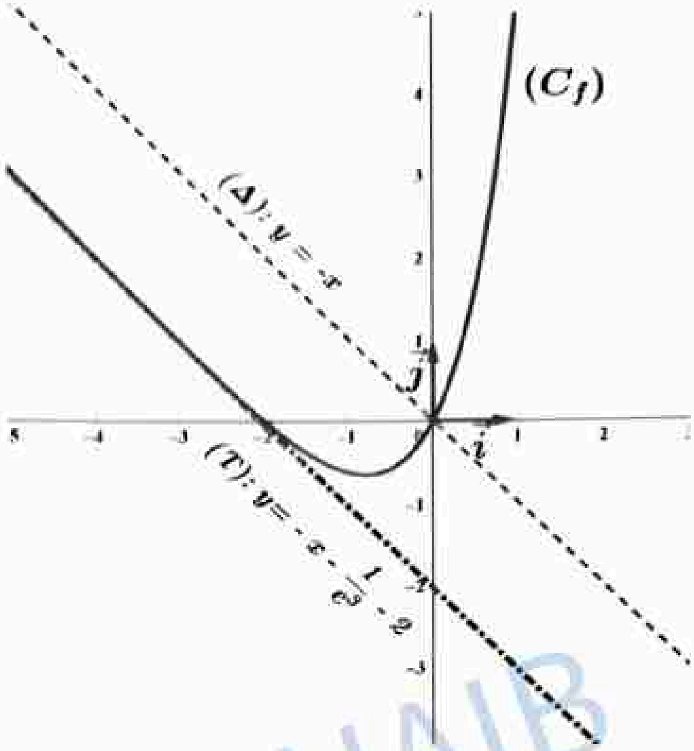
$$g(x_0) = -1$$
$$(x_0 + 3)e^{x_0} - 1 = -1$$
$$(x_0 + 3)e^{x_0} = 0$$
$$x_0 = -3$$

وعليه نكتب معادلة (T) مماس لـ (C_f) عند $x_0 = -3$

$$(T): y = f'(-3)(x - 3) + f(-3)$$

$$(T): y = -x - \frac{1}{e^3} - 2$$

4-رسم (Δ) و(C_f) و(T)



5-حساب $f(x) - g(x)$

$$f(x) - g(x) = (x+2)(e^x - 1) - (x+3)e^x + 1$$
$$= (x + 2 - x - 3)e^x - x - 2 + 1$$
$$f(x) - g(x) = -e^x - x - 1$$

استنتاج دالة أصلية لـ f

لدينا من السؤال السابق

$$f(x) = g(x) - e^x - x - 1$$

ومما سبق: نعلم أن $f'(x) = g(x)$

أي: $f(x) = f'(x) - e^x - x - 1$

ومنه: $F(x) = f(x) - e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + c$

$$F(x) = (x+2)(e^x - 1) - e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

6- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = |x|\left(e^{|x|-2} - 1\right) + 1$$

6-أ-البرهان أن h دالة زوجية

من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا:

$$h(-x) = |-x|\left(e^{|-x|-2} - 1\right)$$

نعلم أن $|-x| = |x|$

$$= |x|\left(e^{|x|-2} - 1\right)$$
$$= h(x)$$

ومنه h دالة زوجية

6-ب-التأكد أن: $h(x) = f(x-2) + 1$

$$f(x-2) = (x - 2 + 2)(e^{x-2} - 1) + 1$$
$$= x(e^{x-2} - 1) + 1$$

لما $x \in [0, +\infty[$ فإن $|x| = x$

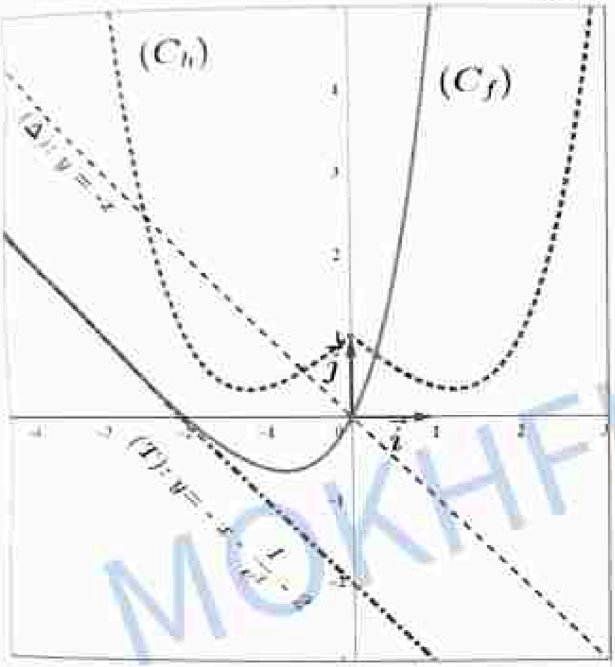
ومنه:

$$f(x-2) + 1 = h(x)$$

6-جـ-رسم (C_h) انطلاقا من (C_f)

بما أن: $f(x-2) + 1 = h(x)$

ومنه فان (C_h) صورة (C_f) بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\,(2,1)$ على المجال $[0; +\infty[$ وبما أن h دالة زوجية فإننا نناظر هذا الجزء بالنسبة لمحور التراتيب



.55 بكالوريا 2019 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية رائعة و شاملة باك 2019 تقني رياضي

الموضوع الثاني

I- g الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على $]0; +\infty[$

بـ: $g(x) = (x+1)(x+e) - e(x\ln x)$

- احسب $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II- f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{e\ln x}{x+1}$$

و (C_f)منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1-أ-احسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$،

ثم بين أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

1-ب- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

1-جـ استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها

2- اكتب معادلة لـ(T) مماس(C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

3-أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

3-ب- تحقق أن: $0.7<\alpha<0.8$

4-(Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln(x+1)$ على المجال $]0;+\infty[$

4-أ- احسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln(x+1))$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

4-ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ)

4-جـ ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)

5- m وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x)=\frac{1+e}{2}x-m$ حلين متمايزين

6- نقبل أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$:

$$lnx<x+1$$

6-أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$:

$$ln2<f(x)<e+\ln(x+1)$$

6-ب- تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]1;+\infty[$ الدالة: $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$

6-جـ- S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=e-1$ و $x=e^2-1$.

باستخدام جواب السؤال 6-أ، بين أن:

$$(e^2-e)ln2<S<e^3$$

الحل

I- g الدالة المعرفة والمتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=(x+1)(x+e)-e(xlnx)$$

أ- حساب $\lim_{x\to0} g(x)$

$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}[(x+1)(x+e)-e(xlnx)]=e$$

لأن

$$\lim_{x\to0} xlnx=0$$

استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

بما أن الدالة g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و $\lim_{x\to0} g(x)=0$ فإن الدالة g موجبة على $]0;+\infty[$

II- f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln(x+1)+\frac{elnx}{x+1}$$

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\ln(x+1)+\frac{elnx}{x+1}\right]=-\infty$$

- اثبات أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{elnx}{x+1}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

1-ب- اثبات من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ أن

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{\frac{e}{x}(x+1)-elnx}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{e(x+1)-exlnx}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x(x+1)+e(x+1)-exlnx}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(x+e)-exlnx}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

1-جـ- اتجاه تغير f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومما سبق فإن $f'(x)>0$ أي الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

-جدول تغيرات f

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2- معادلة المماس (T)

$f'(1)=\frac{1+e}{2}$; $f(1)=\ln 2$

$$(T):\ y=\left(\frac{1+e}{2}\right)(x-1)+ln2$$

$$(T):\ y=\left(\frac{1+e}{2}\right)x-\frac{1+e}{2}+ln2$$

3-أ- البرهان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و $[\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α

3-ب التحقق أن $0.7 < \alpha < 0.8$

لدينا $\begin{cases} f(0.7) = -0.04 \\ f(0.8) = 0.025 \end{cases}$

ولدينا أيضا $f(0.7) \times f(0.8) < 0$

ومنه $0.7 < \alpha < 0.8$

4-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \ln(x+1))$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - \ln(x+1)) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e\ln x}{x+1} = 0$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (Γ) مقارب لـ(C_f) بجوار $+\infty$

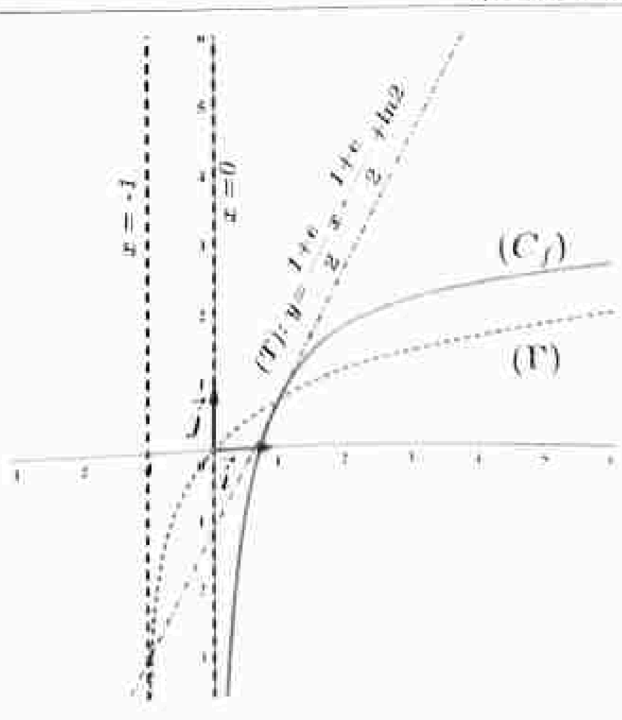
4-ب- الوضع النسبي بين (Γ) و (C_f) :

$$f(x) - \ln(x+1) = \frac{e\ln x}{x+1}$$

بما أن x موجب تماما فإن إشارة الفرق من إشارة $\ln x$ ومنه

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f)تحت (Γ)	تقاطع	(C_f)فوق (Γ)	

4-ج- الرسم



5-تعيين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متمايزين

من التمثيل البياني السابق:

$-m \in \left]-\infty; -\frac{1+e}{2} + \ln 2\right[$

ومنه: $m \in \left]\frac{1+e}{2} - \ln 2; +\infty\right[$

تقبل المعادلة حلين متمايزين

6-أ- اثبات أن: $\ln 2 < f(x) < (e + \ln(x+1))$

من أجل $x \in]1; +\infty[$

$\ln x < x + 1$ ومنه $\frac{\ln x}{x+1} < 1$

وعليه: $\frac{e\ln x}{x+1} < e$

ومنه: $\ln(x+1) + \frac{e\ln x}{x+1} < \ln(x+1) + e$

أي $f(x) < e + \ln(x+1)$ ...... **(1)**

لدينا f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ومنه من أجل $x \in]1; +\infty[$ فإن: $f(x) > f(1)$

$f(x) > \ln 2$ .... **(2)**

من (1)و (2) نجد:

$$\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$$

6-ب-التحقق بالاشتقاق

$[(x+1)\ln(x+1) - x]'$

$= \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 1$

$= \ln(x+1)$

ومنه الدالة: $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$

هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$

6-ج-مساحة الحيز S

لدينا مما سبق $\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$

ومنه:

$\int_{e-1}^{e^2-1} \ln 2\, dx < \int_{e-1}^{e^2-1} f(x) < \int_{e-1}^{e^2-1} e + \ln(x+1)\, dx$

ومنه: $[x\ln 2]_{e-1}^{e^2-1} < S$:

$S < [e.x]_{e-1}^{e^2-1} + [(x+1)\ln(x+1) - x]_{e-1}^{e^2-1}$

$(e^2-1)\ln 2 - (e-1)\ln 2 < S < e(e^2-e) + 2e^2 - e^2 - 0$

وعليه:

$$(e^2 - e)\ln 2 < S < e^3$$

56. بكالوريا 2018 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة اسية باك 2018 شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;1[$ $f'(x)=\frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$ وادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ- اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

3-ب- h الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ: $h(x)=e^{-x}+x-1$

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج من أجل كل x من $]-\infty;1[$ أن: $h(x)\geq 0$.

4- بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;1[$:

$$f(x)+x=\frac{xh(x)}{x-1}$$

ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T). ثم فسر النتيجة بيانيا

5- اكتب معادلة المستقيم (Δ) الذي يشمل مبدأ المعلم O والنقطة $A\left(-2;\frac{2}{3}e^2\right)$ ثم ارسم المستقيمين (T) و(Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $[-2;1[$.

6-أ- بين أنه من أجل كل x من $[-1;0]$:

$$\frac{x}{x-1}\leq f(x)<e^{-x}$$

6-ب- تحقق من أجل كل x من $[-1;0]$ أنه:

$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

ثم بين أن: $1-\ln 2\leq\int_{-1}^{0}f(x)dx<e-1$

7- m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx$ ، حيث $x\in[-2;1[$

الحل

f دالة عددية معرفة على $]-\infty;1[$ بـ:

$f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$

1- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\frac{x}{x-1}e^{-x}=\frac{1}{0^-}e^{1}=-\infty$$

التفسير الهندسي (C_f) يقبل م م شاقولي معادلته

$x=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x-1}e^{-x}=+\infty$$

2- إثبات عبارة $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}e^{-x}-e^{-x}\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$=-\frac{e^{-x}}{(x-1)^2}-\frac{xe^{-x}}{x-1}$$
$$=\frac{-e^{-x}-x^2e^{-x}+xe^{-x}}{(x-1)^2}$$
$$f'(x)=\frac{(-x^2+x-1)e^{-x}}{(x-1)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f

- ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $\frac{e^{-x}}{(x-1)^2}>0$ على $]-\infty;1[$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-x^2+x-1)$

-ندرس إشارة $-x^2+x-1$

$-x^2+x-1=0\Rightarrow\Delta=-3<0$

إشارة العبارة من إشارة $(-x^2)$ ومنه

$f'(x)<0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على مجال تعريفها.

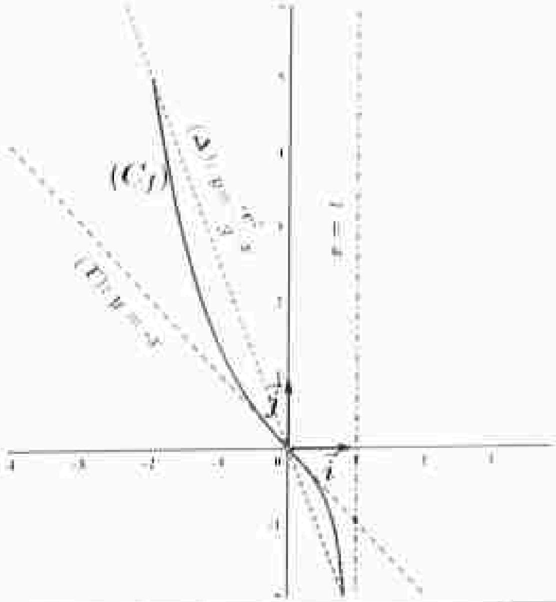
-جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	‖
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$ ‖

3-أ- كتابة معادلة المماس T عند 0

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$y=-(x-0)+0$
$(T): y=-x$

3-ب- h دالة معرفة على المجال $]-\infty;1[$ بـ:
$$h(x)=e^{-x}+x-1$$



دراسة اتجاه تغير الدالة h

$h'(x)=-e^{-x}+1$

إشارة $h'(x)$

$x>0 \Leftarrow e^{-x}<1 \Leftarrow -e^{-x}+1>0$

تغيرات h : $f(x)$ متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;1[$

x	$-\infty$ 0 1
$h'(x)$	$-$ 0 $+$
$h(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ e^{-1}

من جدول التغيرات لدينا $h(0)=0$

ولدينا $h(x)\ge h(0)$

ومنه $h(x)\ge 0$ على المجال $]-\infty;1[$

4-برهان عبارة $f(x)+x=\frac{xh(x)}{x-1}$

$$f(x)+x=\frac{xe^{-x}}{x-1}+x$$
$$f(x)+x=\frac{xe^{-x}+x^2-x}{x-1}$$
$$f(x)+x=\frac{x}{x-1}(e^{-x}+x-1)$$
$$f(x)+x=\frac{xh(x)}{x-1}$$

-استنتاج الوضع النسبي لـ (C_f) مع (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على المجال $]-\infty;1[$

$$f(x)-y=f(x)+x=\frac{xh(x)}{x-1}$$

لدينا $h(x)\ge 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\frac{x}{x-1}$

الوضعية

(C_f) فوق (T) على المجال $]-\infty;0[$

(C_f) تحت (T) على المجال $]0;1[$

(C_f) يقطع (T) عند $x=0$

التفسير الهندسي: بما أن (T) المماس يقطع (C_f) في النقطة O فالمنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند النقطة ذات الفاصلة 0

5- كتابة معادلة (Δ) الذي يشمل O والنقطة A

معادلة المستقيم (Δ) من الشكل $y=ax+b$

$0\in\Delta$ معناه $0=a(0)+b \Leftarrow b=0$

$A\in\Delta$ معناه $\frac{2}{3}e^2=a(-2) \Leftarrow a=-\frac{e^2}{3}$

ومنه معادلة (Δ) هي $y=-\frac{e^2}{3}x$

رسم (T) و (Δ) و (C_f) على المجال $]-2;1[$

6-أ- البرهان أنه من أجل $x\in]-1;0]$:

$$\frac{x}{x-1}\le f(x)<e^{-x}$$

-لدينا من أجل $x\in]-1;0]$

$$f(x)-e^{-x}=\frac{xe^{-x}}{x-1}-e^{-x}=\frac{e^{-x}}{x-1}$$

$e^{-x}>0$ و $x-1<0$ على المجال $]-1;0]$

أي $f(x)-e^{-x}<0$ ومنه

$f(x)<e^{-x}$ ....(1)

-ولدينا كذلك من أجل $x\in]-1;0]$

$$f(x)-\frac{x}{x-1}=\frac{xe^{-x}}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{x}{x-1}(e^{-x}-1)$$

على المجال $]-1;0]$ لدينا $\frac{x}{x-1}\ge 0$

و $e^{-x}-1\ge 0$

أي $f(x)-\frac{x}{x-1}\ge 0$

ومنه $f(x)\ge\frac{x}{x-1}$ ......(2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\frac{x}{x-1}\le f(x)<e^{-x}$

6-ب-التحقق أن $\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$

$$1+\frac{1}{x-1}=\frac{x+1-1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$

-البرهان أن

$$1-\ln 2\le\int_{-1}^{0}f(x)dx<e-1$$

لدينا مما سبق $\frac{x}{x-1}\le f(x)<e^{-x}$

ومنه

$$\int_{-1}^{0}\frac{x}{x-1}\,dx \le \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$$

لدينا الدالة الأصلية لـ e^{-x} هي $-e^{-x}$

والدالة الأصلية لـ $1+\frac{1}{x-1}$ هي $x+\ln|x-1|$

ومنه

$$[x+\ln(1-x)]_{-1}^{0} \le \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < [-e^{-x}]_{-1}^{0}$$

$$1-\ln 2 \le \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < e-1$$

7-المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=mx$ على المجال [-2; 1]

حلول المعادلة هي فاصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y_m = mx$

1) $m < -\frac{e^2}{3}$ للمعادلة حلان

2) $-\frac{e^2}{3} \le m < -1$ للمعادلة ثلاث حلول

3) $m \ge -1$ للمعادلة حل واحد

57. بكالوريا 2018 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2018 شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I-نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;1]$ بـ:

$$g(x)=2-x+\ln x$$

1-أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;1]$.

1-ب- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.15<\alpha<0.16$

2- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]0;1]$

II-لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

(يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x)=\frac{1-2x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}$)

ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2-أ- بين من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ أن:

$$f'(x)=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

2-ب- بين أن f متزايدة تماما على $]1;\frac{1}{\alpha}[$ ومتناقصة تماما على $]\frac{1}{\alpha};+\infty[$، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-2$.

4- ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) (يعطى $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-1.8$)

5- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)|=m$ حلين متمايزين

الحل

I-1 g دالة معرفة على المجال $]0,1]$ بـ:

$$g(x)=2-x+\ln x$$

1-أ-دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0,1]$

النهايات

$$\lim_{x\to 0^{>}} g(x)=\lim_{x\to 0^{>}}[2-x+\ln x]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{<}} g(x)=\lim_{x\to 1^{<}}[2-x+\ln x]=1$$

المشتقة

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,1]$ ودالتها المشتقة

$$g'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{-x+1}{x}$$

$x>0$ على المجال $]0;1]$ و $1>x>0$ وعليه

$0>-x>-1$ إذن $1>-x+1>0$

أي $-x+1>0$ على المجال $]0;1]$

ومنه $g'(x)>0$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$

x	0	1
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	1

1-ب- البرهان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0.15;0.16[$

ولدينا $\begin{cases} g(0,16)=0.007 \\ g(0,15)=-0.047 \end{cases}$

و $g(0.15)\times g(0.16)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.15<\alpha<0,16$

2- استنتاج إشارة $g(x)$: من جدول التغيرات والسؤال السابق

x	0		α		1
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖

II- f دالة معرفة على المجال $]1\,;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$

1- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\left[\frac{1-2x+\ln x}{x-1}\right]=\left(-\frac{1}{0^+}\right)$$
$$=-\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارب شاقولي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x+\ln x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x}{x}+\frac{x}{x}\left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)\right)$$
$$=-2 \qquad \text{لأن } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-2$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

II-2-أ- برهان عبارة $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{-2x+2+1-\frac{1}{x}-1+2x-\ln x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{x}-\ln x}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2-\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{(x-1)^2}=\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{(x-1)^2}$$

II-2-ب- البرهان أن f متزايدة تماما على $]1;\frac{1}{\alpha}]$ ومتناقصة تماما على $[\frac{1}{\alpha};+\infty[$

ندرس اشارة $f'(x)$

$x=\frac{1}{\alpha} \Leftarrow \frac{1}{x}=\alpha \Leftarrow g\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$\frac{1}{\alpha}>x>1 \Leftarrow 1>\frac{1}{x}>\alpha \Leftarrow g\left(\frac{1}{x}\right)>0$

$x>\frac{1}{\alpha} \Leftarrow \alpha>\frac{1}{x}>0 \Leftarrow g\left(\frac{1}{x}\right)<0$

ومنه

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;\frac{1}{\alpha}]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha};+\infty[$

-جدول تغيرات f

x	1		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘	-2

3-دراسة وضعية (C_f) و (Δ) ذو المعادلة $y=-2$

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ على المجال $]1;+\infty[$

$$f(x)-y=\frac{1-2x+\ln x}{x-1}+2$$
$$=\frac{1-2x+\ln x+2x-2}{x-1}$$
$$=\frac{-1+\ln x}{x-1}$$

لدينا $x-1>0$ على المجال $]1;+\infty[$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x-1$

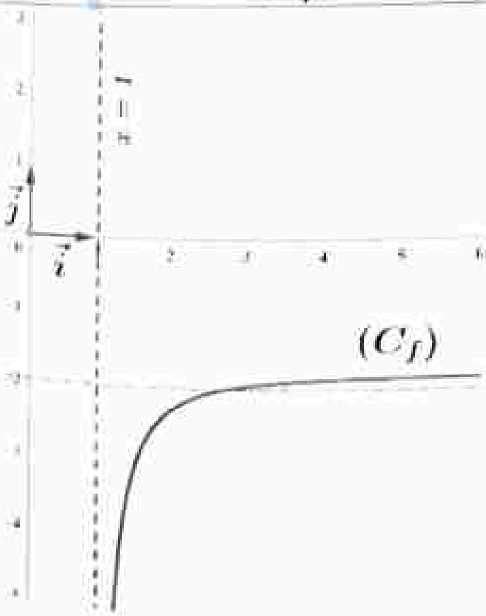
$x>e^1 \Leftarrow \ln x>1 \Leftarrow \ln x-1>0$

$1<x<e^1 \Leftarrow \ln x<1 \Leftarrow \ln x-1<0$

ومنه تكون وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) كما يلي

x	1		e		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

II-4-رسم (C_f) والمستقيمين المقاربين



II-5- تعيين قيم m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متمايزين

لدينا $|f(x)| = m$ ونعلم أن $|f(x)| \geq 0$

وهذا يعني أن $m \geq 0$

ولدينا

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x)\ ; f(x) \geq 0 \\ -f(x)\ : f(x) \leq 0 \end{cases}$$

لكن (C_f) يقع أسفل محور الفواصل:

اذن $|f(x)| = -f(x)$ ومنه $f(x) = -m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = -m$

حتى يكون للمعادلة حلان متمايزان يجب أن يكون:

$$-2 < -m < f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

أي: $-f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < m < 2$

58. بكالوريا 2017 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2017 شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

لتكن الدالة f المعرفة على D_f حيث $D_f =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

و(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ-احسب النهايتين: $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\<}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\>}} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

1-ب- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل x من D_f

$f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$، ثم شكل جدول تغيرات f

3-أ- تحقق أن: من أجل كل عدد حقيقي x من D_f ، $(3-x) \in D_f$ و $f(3-x) + f(x) = 0$

3-ب- استنتج أن (C_f) يقبل مركز تناظر يطلب تعيين احداثياته.

4- اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.45;0.46[$ ثم استنتج انها تقبل حلا آخر β بطلب تعيين حصر له.

5- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة:

$y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ(C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

6- ارسم (Δ) و (C_f).

7- بين أن الدالة:

$$h:\ x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2)$$

أصلية لدالة $x \mapsto \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$.

-ثم احسب بدلالة β مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$y = -2x + 3$ $\quad x = \beta \quad x = 3$

الحل

1- f دالة معرفة على D_f بـ:

$$f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

1-أ-حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 1\\<}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2\\>}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 1\\<}} f(x) = -\infty$$

المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب شاقولي بجوار $-\infty$

$$\lim_{\substack{x \to 2\\>}} f(x) = +\infty$$

المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ كمقارب شاقولي بجوار $+\infty$

1-ب- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2- برهان عبارة $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;1[$

$$f'(x) = -2 + 2\,\frac{\frac{(x-2)-(x-1)}{(x-2)^2}}{\frac{x-1}{x-2}}$$

$$f'(x) = -2 + 2\,\frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $(x-1)(x-2)$

ندرس إشارة المشتقة

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖		‖	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖		‖	$+\infty \searrow -\infty$

3-أ- التحقق أن $f(3-x)+f(x)=0$

$$f(3-x)+f(x) = 2\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$
$$= 2\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right) - 2\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$
$$= 0$$

3-ب- استنتاج أن (C_f) يقبل مركز تناظر

من السؤال السابق $f(3-x)+f(x)=0$

ومنه النقطة $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ مركز تناظر لـ (C_f) حسب قانون مركز التناظر

4- اثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,45;0,46[$

f مستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]0,45;0,46[$

و
$$\begin{cases} f(0,45)=0.027 \\ f(0,46)=0.015 \end{cases}$$

أي $f(0.45)\times f(0.46)<0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(\alpha)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]0.45;0.46[$

- استنتاج أن $f(x)=0$ تقبل حل آخر β

لدينا إذا كان $x\in D_f$ و $(3-x)\in D_f$

و $f(3-x)+f(x)=0$

فإن : $f(3-\alpha)+f(\alpha)=0$

نعلم ان $f(\alpha)=0$ ومنه $f(3-\alpha)=0$ ومنه

$\beta = 3-\alpha$

-حصر β

لدينا $0,45<\alpha<0,46$

أي $-0,46<-\alpha<-0,45$

ومنه $3-0,46<3-\alpha<3-0,45$

اذن $2,54<\beta<2,55$

5-البرهان أن (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+3$ مستقيم مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{|x|\to+\infty}(f(x)-y)$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)-(-2x+3)\right]$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right]$$
$$= 2\ln 1$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞

-دراسة وضعية (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y = 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

حتى يكون $f(x)-y>0$ يجب أن يكون $\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)>0$ ومنه $\frac{x-1}{x-2}>1$

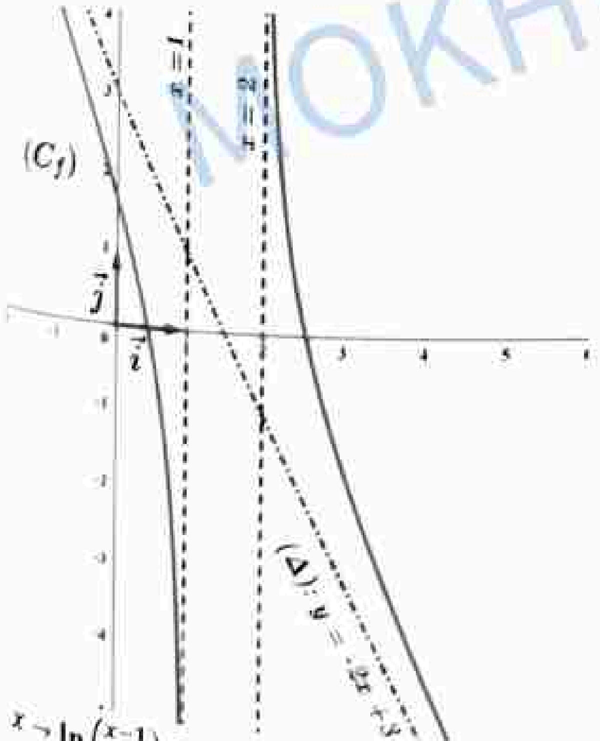
أي $\frac{x-1}{x-2}-1>0$ إذن $\frac{1}{x-2}>0$

أي $x-2>0$

ومنه لكي يكون $f(x)-y>0$ أي $x>2$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	‖		‖	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	‖		‖	(C_f) فوق (Δ)

6- رسم (Δ) و (C_f)



7- برهان أن h دالة أصلية للدالة $x\to\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على المجال $]2;+\infty[$

باشتقاق الدالة h نحصل على $h'(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

ومنه h هي دالة أصلية لـ: $x\to\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

- حساب بدلالة β المساحة S

$$S=\int_{\beta}^{3}(f(x)-y)dx$$

$$S=\int_{\beta}^{3}\left(-2x+3+2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+2x-3\right)dx$$

$$S=\int_{\beta}^{3}2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)dx$$

$$S=2[h(x)]_{\beta}^{3}=2(h(3)-h(\beta))(u.a)$$

59. بكالوريا 2017 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة عددية شاملة باك 2017 شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=x^3+6x+12$$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-1.48;-1.47[$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

$$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

1-ب- بين من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x)=\frac{x\,g(x)}{(x^2+2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2-أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

2-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3-بين أن $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4-ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

5- نرمز بـ S لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$ ، $x=0$ و $y=0$.

-أثبت من أجل كل $x\in[\alpha;0]$ أن: $-3\le f(x)\le f(\alpha)$ ، ثم بين أن:

$$\frac{3}{2}\alpha^2\le S\le -3\alpha$$

الحل

I-الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=x^3+6x+12$$

1- دراسة اتجاه تغير g

$$g'(x)=3x^2+6\ge 0$$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2- اثبات أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1,48<\alpha<-1,47$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على

$$]-1{,}48;-1{,}47[$$

و

$$\begin{cases}g(-1{,}47)=0.003\\ g(-1{,}48)=-0.121\end{cases}$$

$$g(-1.48)\times g(-1.47)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]-1{,}48;-1{,}47[$

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II-f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$

1-أ-حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

1-ب- إثبات عبارة $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(3x^2)(x^2+2)-2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{3x^4+6x^2-2x^4+12x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{xg(x)}{(x^2+2)^2}$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$(x^2+2)^2>0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$

-جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[0;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$

-جدول تغيرات f

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right]$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right]$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{-2x-6}{x^2+2}\right]$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[-\frac{2x}{x^2}\right] = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

-دراسة وضعية (C_f) و(Δ)

-ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y = \frac{-2x-6}{x^2+2}$$

$0 < 2 + x^2$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $-2x-6$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f)يقطع(Δ)	(C_f) تحت (Δ)

II-3-بيان أن $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$

$$f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = \frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2} - \frac{3\alpha}{2}$$
$$= \frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= -\frac{\alpha^3+6\alpha+12}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha^2+2)}$$
$$= 0$$

ومنه $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$$-1{,}48 < \alpha < -1{,}47$$
$$-\frac{3}{2}\times 1.48 < \frac{3}{2}\alpha < -\frac{3}{2}\times 1{,}47$$
$$-2{,}22 < f(\alpha) < -2{,}21$$

- إثبات أنه لما $x \in [\alpha.0]$ فإن:
$$-3 \le f(x) \le f(\alpha)$$

لدينا: $\alpha \le x \le 0$ والدالة f متناقصة تماما على المجال $[\alpha;0]$

ومنه فإن: $f(0) \le f(x) \le f(\alpha)$

ومنه: $-3 \le f(x) \le f(\alpha)$

- إثبات أن $\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$

لدينا من اجل $x \in [\alpha\,;0]$: $S = \int_\alpha^0 -f(x)dx$

ولدينا من السوال السابق:

$$-3 \le f(x) \le f(\alpha)$$

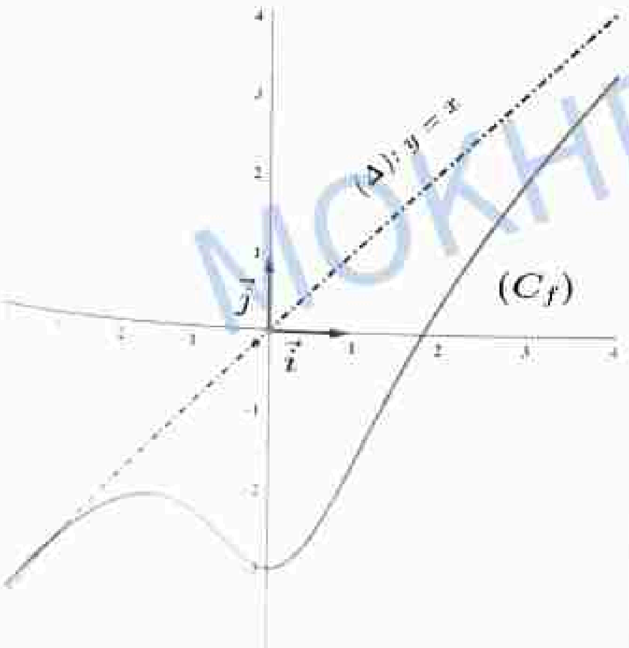
ومنه:

$$-f(\alpha) \le -f(x) \le 3$$

والدالة f رتيبة في المجال $[\alpha;0]$

$$\int_\alpha^0 -f(\alpha)dx \le \int_\alpha^0 -f(x)dx \le \int_\alpha^0 3dx$$
$$[-f(\alpha)x]_\alpha^0 \le S \le [3x]_\alpha^0$$
$$-(f(\alpha)(0) - f(\alpha)(\alpha)) \le S \le 3(0) - 3\alpha$$
$$\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$$

4- رسم (Δ) و (C_f)



60. بكالوريا 2017 تقني رياضي 02

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2017 الدورة الاستثنائية تقني

الموضوع الأول

I-لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.71<\alpha<1.72$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II-نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1-أ-احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2-أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

2-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3- نقبل أن $f(\alpha)=0.87$ و $f(\beta)=f(\gamma)=0$ حيث $0.76<\beta<0.78$ و $4.19<\gamma<4.22$ أنشئ في المعلم السابق (Δ) و (C_f).

4- ليكن λ عدد حقيقي حيث $1<\lambda\le e$ ، نرمز بـ $A(\lambda)$ الى مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=\lambda$.

4-أ- احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ.

4-ب- عين قيمة λ حيث $A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$

الحل

I-g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$g(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$$

1- حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}\right]=-\frac{1}{2}$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

2- دراسة اتجاه تغير g :

الدالة g قابلة للاشتقاق على D_g ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x)=\frac{-\left(\frac{1}{x}\right)x^2-2x(2-\ln x)}{x^4}$$
$$=\frac{-x-4x+2x\ln x}{x^4}$$
$$=\frac{-5+2\ln x}{x^3}$$

على المجال $]0;+\infty[$ $x^3>0$ ومنه إشارة g' من إشارة $(-5+2\ln x)$

$$-5+2\ln x>0\Rightarrow 2\ln x>5$$
$$\Rightarrow \ln x>\frac{5}{2}\Rightarrow \quad x>e^{\frac{5}{2}}$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما لما $x\ge e^{\frac{5}{2}}$ ومتناقصة تماما لما $x\le e^{\frac{5}{2}}$

A.

x	0		$e^{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g\left(e^{\frac{5}{2}}\right)$	↗	$-\frac{1}{2}$

3-البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,71<\alpha<1,72$

من جدول تغيرات g لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1,71;1,72[$

ولدينا $\begin{cases} g(1,71)=0,0004\\ g(1,72)=-0,0072\end{cases}$

و $g(1,71)\times g(1,72)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $1,71<\alpha<1,72$

-استنتاج إشارة g

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

II-الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}$$

1-أ-حساب النهايات

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{2}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{-1+\ln x}{x}\right)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x}{2}+2+\frac{-1+\ln x}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$=-\infty$$

1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x-(-1+\ln x)}{x^2}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{1+1-\ln x}{x^2}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{2-\ln x}{x^2}$$
$$=g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة على $[\alpha;+\infty[$

-جدول تغيرات f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2-أ- البرهان أن المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+2$ م م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-y|=\lim_{x\to+\infty}\left|-\frac{1}{2}x+2+\frac{-1+\ln x}{x}+\frac{1}{2}x-2\right|$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left|-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right|=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2-ب- دراسة وضعية (C_f) مع (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{-1+\ln x}{x}$$

$x>0$ ومنه ندرس إشارة $-1+\ln x$

$-1+\ln x>0 \Rightarrow \ln x>1 \Rightarrow x>e$

x	0		e		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع	‖	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)	

3-رسم (C_f) و (Δ)

4-أ- حساب مساحة الحيز $A(\lambda)$ بدلالة λ

لأن (Δ) يقع فوق (C_f) في المجال $]1;e[$

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}(y-f(x))dx$$
$$=\int_1^{\lambda}\left(-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+\ln x\right]_1^{\lambda}$$
$$=-\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2+\ln\lambda\ u.a$$

4-ب- تعيين قيمة λ حيث $A(\lambda)=\frac{1}{2}\,cm^2$

$$A(\lambda)=\frac{1}{2}cm^2$$
$$-\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2+\ln\lambda=\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2}(\ln\lambda)^2+\ln\lambda-\frac{1}{2}=0$$

نضع $t=\ln\lambda$ ومنه:

$$-\frac{1}{2}t^2+t-\frac{1}{2}=0$$

معادلة من الدرجة الثانية

$$\Delta=(1)-4\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

ومنه: $t=1$ أي: $\ln\lambda=1$

وبالتالي: $\lambda=e$

61. بكالوريا 2017 تقني رياضي 02

اليوتيوب: دالة اسية باك 2017 شعبة تقني رياضي للمقصيين

الموضوع الثاني

I- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$g(x)=1-2xe^{-x}$$
- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$.

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$ ثم استنتج معادلة لـ(Δ) ، المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f).

2-ب- أدرس وضعيةالمنحنى (C_f) بالنسبة لـ(Δ).

3- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له

4- باستعمال المنحنى (C_f) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x)=x+m$ حلين مختلفين.

5- ليكن α عددا حقيقيا موجبا، نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها على الترتيب: $y=x+1$ ، $x=-1$ و $x=\alpha$

- احسب $A(\alpha)$ بدلالة α ثم $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

الحل

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1-2xe^{-x}$

1- دراسة اتجاه تغيرالدالة g

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$g'(x)=-(2e^{-x}-e^{-x}(2x))$$
$$=-(2e^{-x}-2xe^{-x})$$
$$=2(x-1)e^{-x}$$

$2e^{-x}>0$ على $\mathbb{R}$ ومنه اشارة $g'(x)$ من اشارة $x-1$

$$x-1>0\Rightarrow x>1$$

ومنه تكون اشارة g' كما يلي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$

-جدول تغيرات g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

إشارة g :

من جدول تغيرات الدالة g لدينا $g(x)>g(1)$ على $\mathbb{R}$ أي $g(x)>1-\frac{2}{e}$ ومنه $g(x)>0$

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$f(x)=(x+1)(1+2e^{-x})$$

II-1-أ-حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+1)(1+2e^{-x})=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)(1+2e^{-x})=+\infty$$

II-1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=(1+2e^{-x})+(-2e^{-x})(x+1)$$
$$=(1+2e^{-x})-2xe^{-x}-2e^{-x}$$
$$=1-2xe^{-x}=g(x)>0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[(x+1)(1+2e^{-x})-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x+1+2xe^{-x}+2e^{-x}-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[2xe^{-x}+2e^{-x}+1]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}+1\right]$$
$$= 1$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

استنتاج معادلة المستقيم المقارب المائل (Δ) :

بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=1$

إذن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$

وعليه $(\Delta):\ y=x+1$

2-بـ- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=f(x)-(x+1)$$
$$=(x+1)(1+2e^{-x})-(x+1)$$
$$=x+1+2xe^{-x}+2e^{-x}-x-1$$
$$=exe^{-x}+2e^{-x}$$
$$=2e^{-x}(x+1)$$

$2e^{-x}>0$ ومنه ندرس إشارة $(x+1)$

$x+1>0\Rightarrow x>-1$

ومنه تكون الوضعية كالتالي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)

3-اثبات أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ)

(T) يوازي (Δ) معناه أن لهما نفس معامل التوجيه أي 1

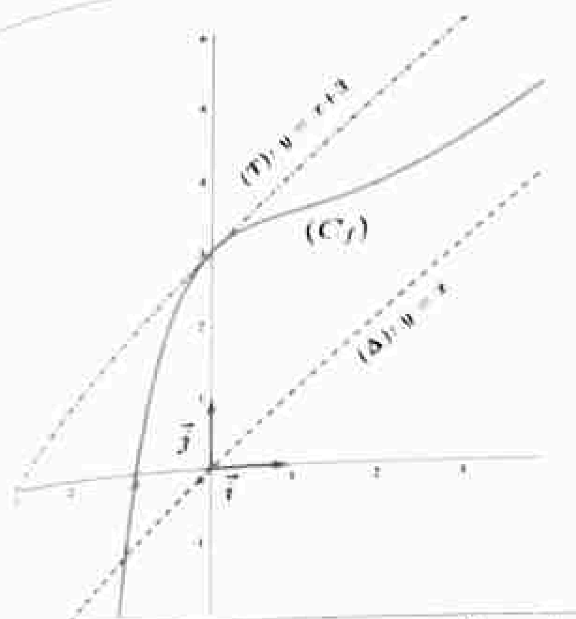
نحل المعادلة $f'(x)=1$ حيث $f'(x)=g(x)$

$$g(x)=1\Rightarrow 1-2xe^{-x}=1$$
$$\Rightarrow 2xe^{-x}=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) وحيدا عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ معادلته

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$=1(x-0)+3$$
$$=x+3$$

4-رسم (C_f)



-تعيين قيم m حتى تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلين

الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ حيث (T) يوازي (Δ) ومنه قيم m التي تقبل فيها المعادلة $f(x)=x+m$ حلين هي $1<m<3$

5-حساب $A(\alpha)$ بدلالة α

$$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}(f(x)-(x+1))dx$$
$$=\int_{-1}^{\alpha}((x+1)(1+2e^{-x})-(x+1))dx$$
$$=\int_{-1}^{\alpha}(2x+2)e^{-x}dx$$
$$=2\int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-x}dx$$

لإيجاد الدالة الأصلية لـ $(x+1)e^{-x}$ نستعمل المكاملة بالتجزئة

$u=$	$x+1$	$u'=$	1
$v=$	$-e^{-x}$	$v'=$	e^{-x}

$$A(\alpha)=2\int_{-1}^{\alpha}(x+1)e^{-x}dx$$
$$=2\left[[-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\alpha}-\int_{-1}^{\alpha}-e^{-x}dx\right]$$
$$=2[-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{\alpha}+2[-e^{-x}]_{-1}^{\alpha}$$
$$=2(-(\alpha+1)e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+e)$$
$$=2(-\alpha-2)e^{-\alpha}+2e\ cm^2$$

-حساب $\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}(-2(\alpha+2)e^{-\alpha}+2e)$$
$$=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{-2\alpha}{e^{\alpha}}+\frac{-4}{e^{\alpha}}+2e\right)$$
$$=2e$$

62. بكالوريا 2016 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2016 تقني رياضي رقم 1

الموضوع الأول

I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

1-أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2-أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.4<\alpha<0.5$.

2-ب- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2-ب- بين أن: $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

3- ليكن a عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$، نسمي (T_a) مماس المنحنى (C) الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة a

نضع من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1;+\infty[$:

$h(x)=f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]$

3-أ- تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$h'(x)=f'(x)-f'(a)$

3-ب- باستعمال اتجاه تغير الدالة g، عين إشارة $h'(x)$ حسب قيم x واستنتج اتجاه تغير الدالة h على المجال $]-1;+\infty[$

3-جـ- حدد الوضع النسبي بين (C) والمستقيم (T_a)

4-أ- بين أنه يوجد مماسان (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

4-ب- ارسم المماسين والمنحنى (C).

5- نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$:

$H(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$

5-أ- بين أن H دالة أصلية للدالة $x\mapsto(x-1)\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$

5-ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=1$ و $x=2$.

الحل

I- g دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$g(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)$

1-أ- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$:

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{x-1}{x+1}=-\frac{2}{0^+}=-\infty$

و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \ln(x+1)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}+\ln(x+1)\right)=+\infty$$

1-ب- دراسة اتجاه تغير g على $]-1;+\infty[$

-المشتقة: $g'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$

ومنه $g'(x)>0$

إذا الدالة g متزايدة تماما على D_g

جدول تغيرات g

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	‖ +	
$g(x)$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

I-2-أ- البرهان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $0,4<\alpha<0,5$

g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,4;0,5[$

و $\begin{cases} f(0,4)=-0.09 \\ f(0,5)=0.07 \end{cases}$

و $f(0.4)\times f(0.5)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فالمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4<\alpha<0,5$

2-ب- استنتاج إشارة $f(x)$

من جدول التغيرات والسؤال السابق نستنتج

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	‖ −	0	+

II-f الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+(x-1)\ln(x+1)$

1- حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}[1+(x-1)\ln(x+1)]$$
$$=+\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x=-1$ مقارب شاقولي لــ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}[1+(x-1)\ln(x+1)]$$
$$=+\infty$$

2-أ- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x-1}{x+1}=g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$

-جدول تغيرات f

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2-ب- اثبات أن $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$

لدينا : $f(\alpha)=1+(\alpha-1)\ln(\alpha+1)$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ أي: $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\ln(\alpha+1)=0$

ومنه: $\ln(\alpha+1)=-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$

نعوض قيمة $\ln(\alpha+1)$ في عبارة $f(\alpha)$

$$f(\alpha)=1+(\alpha-1)\left(-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)$$
$$f(\alpha)=\left(1-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}\right)$$
$$f(\alpha)=\frac{\alpha+1-\alpha^2-1+2\alpha}{\alpha+1}$$
$$f(\alpha)=\frac{-\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}\ldots\ldots(1)$$

بنشر العبارة المعطاة

$$-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}=\frac{-\alpha^2-\alpha+4\alpha+4-4}{\alpha+1}$$
$$=\frac{-\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}\ldots\ldots(2)$$

بما أن $(2)=(1)$ فإن: $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$

-إعطاء حصر لــ $f(\alpha)$

$0,4<\alpha<0,5$
$-0,5<-\alpha<-0,4$
$3.5<-\alpha+4<3,6\ \ldots\ldots(1)$

$1,4<\alpha+1<1,5$

$\frac{1}{1.5}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{1.4}$

$-\frac{4}{1.4}<-\frac{4}{\alpha+1}<-\frac{4}{1.5}\ldots\ldots(2)$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3.5-\frac{4}{1.4}<-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}<3,6-\frac{4}{1.5}$$

ومنه $\mathbf{0,64<f(\alpha)<0,93}$

II-3 (T_a) مماس لـ (C) عند النقطة ذات الفاصلة a

3-أ- التحقق أن $h'(x)=f'(x)-f'(a)$

$$h(x)=f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]$$
$$=f(x)-f'(a)x-af(a)-af(a)+f(a)$$
$$=f'(x)-f'(a)$$

3-ب- تعيين إشارة $h'(x)$ باستعمال تغيرات $g(x)$

لدينا أن $f'(x)=g(x)$

ومنه $h'(x)=g(x)-g(a)$

(1) - إذا كان: $x=a$

فإن : $g(x)=g(a)$
$h'(x)=0$

(2) -إذا كان $x>a$

والدالة g متزايدة تماما أي $g(x)>g(a)$

فإن $\Rightarrow g(x)-g(a)>0$
$\Rightarrow h'(x)>0$

(3) - إذا كان $x<a$

فإن $\Rightarrow g(x)<g(a)$
$\Rightarrow h'(x)<0$

ومنه تصبح إشارة $h'(x)$ كما يلي

x	-1		a		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

ومنه الدالة h متزايدة على المجال $[a;+\infty[$
ومتناقصة تماما على المجال $]-1;a]$

3-جـ- تحديد الوضع النسبي لــ (C_f) و (T_a)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا $f(x)-y=h(x)$

من تغيرات الدالة h نلاحظ أن $h(x)>0$ أي

$f(x)-y>0$

ومنه يصبح الوضع النسبي كما يلي:

x	-1	a	$+\infty$
$h(x)$	$+$	0	$+$
الوضعية	(T_a) فوق (C_f)	(C_f) يمس (T_a)	(T_a) فوق (C_f)

4-أ- البرهان أنه يوجد مماسين (T_a) يشملان النقطة $A(1;0)$

(T) يشمل النقطة A يعني

$$f'(a)(1-a)+f(a)=0$$

بنشر العبارة وتبسيطها نجد:

$$-\frac{(a-1)^2}{a+1}-1=0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2=a+1$$

$$\Rightarrow a^2-3a=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1=0 & \text{اما} \\ a_2=3 & \text{او} \end{cases}$$

ومنه (C) يقبل مماسين (T_a) عند

$$x_1=a_1=0$$

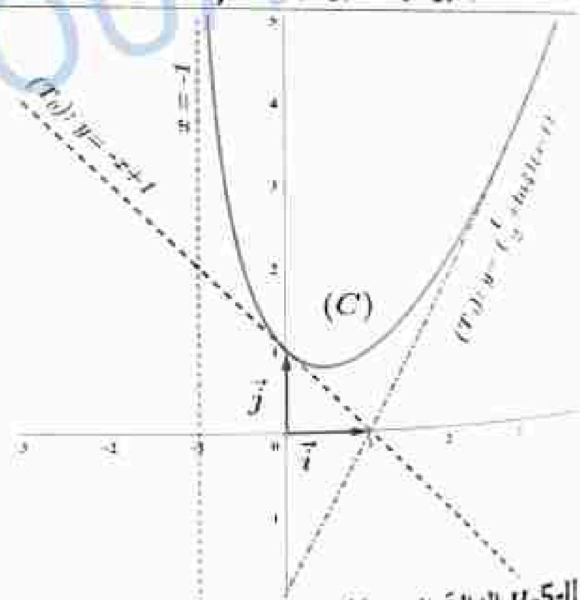
$$x_2=a_2=3$$

كتابة معادلتي المماسين

$$(T_0): y=-x+1$$

$$(T_3): y=\left(\frac{1}{2}+\ln 4\right)(x-1)$$

4-ب- رسم (T_0) و (T_3) و (C_f)



II-5- H الدالة المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :

$$H(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$$

5-أ- تبيان ان H دالة أصلية للدالة:

$$x\to(x-1)\ln(x+1)$$

بالاشتقاق الدالة H نجد

$$H'(x)=\frac{1}{2}\left[(2x-2)\ln(x+1)+\frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)}\right]-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

$$=(x-1)\ln(x+1)$$

ومنه H دالة أصلية للدالة $x\to(x-1)\ln(x+1)$

5-حساب مساحة الحيز A

$$A=\int_1^2 f(x)dx$$

$$=\int_1^2 1+(x-1)\ln(x+1)\,dx$$

$$=\left[x+\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_1^2$$

$$=3-\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{4}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{1,5\,u.a}$$

63. بكالوريا 2016 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2016 تقني رياضي رقم 2

الموضوع الثاني

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-x\ln x$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.5<\alpha<3.6$

3- استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على المجال $]0;+\infty[$.

II-نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$، حيث:

$$\|\vec{i}\|=2cm \text{ و } \|\vec{j}\|=4cm$$

1- بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x=0$ و $y=0$

2-أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

2-ب- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2-جـ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

2-د- احسب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$، فسر النتيجة هندسيا.

3- أ-بين أن: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

3-ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2})

3-جـ- ارسم (C_f).

4- نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي:

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

4-أ- تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

4-ب- عين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة (E) حلين متمايزين.

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$$

و (C_h) منحناها البياني في المستوي.

5-أ-بين أن h زوجية.

5-ب-ارسم في نفس المعلم (C_h) مستعينا بـ (C_f)

الحل

I-الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = x - x\ln x$$

1-أ-حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [x - x\ln x] = 0$$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^n \ln x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [x(1-\ln x)] = -\infty$$

1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = 1 - (\ln(x) + 1) = -\ln x$$

إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$

$$g'(x) > 0 \Rightarrow -\ln x > 0 \Rightarrow x < 1$$

-جدول تغيرات الدالة g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

2-البرهان أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3.5 < \alpha < 3.6$

لدينا g مستمرة ومتناقصة على المجال $]3,5;3,6[$

و $\begin{cases} g(3,6) = -0,88 \\ g(3,5) = -1,01 \end{cases}$

و $-1 \in]-1.01;-0,88[$ ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حل وحيد α في المجال $]-1,1;-0,88[$

3-استنتاج إشارة عبارة $g(x)+1$ على $]0;+\infty[$

من جدول تغيرات الدالة g والسؤال السابق

x	0		α		$+\infty$
$g(x)-1$		$+$	0	$-$	

II- f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

1-بيان أن (C_f) يقبل مقاربين معادلتيهما: $y = 0$ و $x = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مقارب شاقولي لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\left(\frac{\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = 0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2-أ- عبارة $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

2-ب- جدول تغيرات الدالة f

لدينا $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

من أجل $x > 0$ $x(x+1)^2 > 0$ على المجال $]0;+\infty[$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+1$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

2-جـ- معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$(T): y = \frac{1}{2}(x-1) + 0$$
$$(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

2-د- حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = 0$$

لأن الدالة تقبل عند α قيمة حدية عظمى

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مماسا افقيا معادلته $y = f(\alpha)$

3-أ- البرهان أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$$

ولدينا $g(\alpha) + 1 = 0$

ومنه $\alpha - \alpha\ln\alpha + 1 = 0$

$$\ln\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

بتعويض قيمة $\ln\alpha$ في عبارة $f(\alpha)$ نجد

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$$

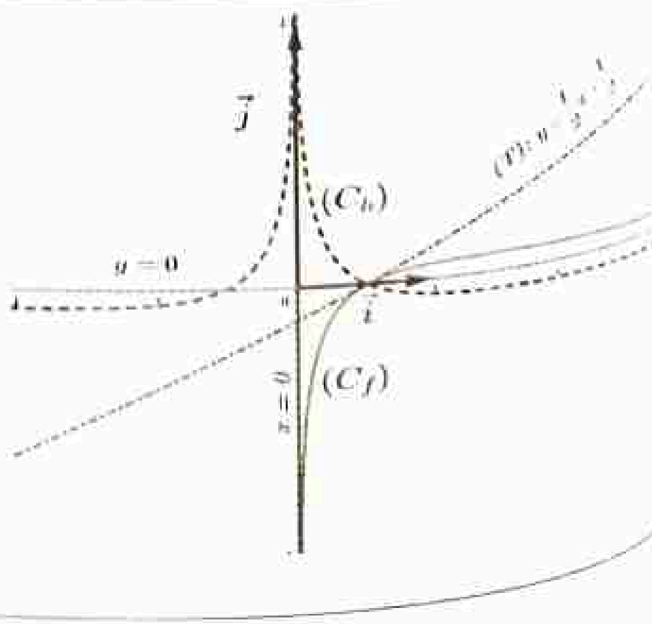
3-ب- حصر $f(\alpha)$

$$3{,}5 < \alpha < 3{,}6$$
$$\frac{1}{3{,}6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3{,}5}$$

ومنه

$$0{,}28 < f(\alpha) < 0{,}29$$

3-جـ- رسم (C_f)



4- المعادلة $x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)\ ....(E)$

4-أ- التحقق أن E يؤول حلها الى حل

$$f(x) = \frac{1}{2}x - m$$

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)$$
$$x(x+1) - 2m(x+1) = 2\ln(x)$$
$$(x+1)(x-2m) = 2\ln(x)$$
$$\frac{2\ln x}{x+1} = x - 2m$$
$$\frac{\ln x}{x+1} = \frac{x}{2} - m$$
$$f(x) = \frac{x}{2} - m\ .....(E)$$

4-ب- تعيين قيم m التي تقبل من اجلها E حلين متمايزين

من خلال معادلة المستقيم المماسي

لـ $(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(C_f) ومن خلال التمثيل البياني السابق معناه

$-m < -\frac{1}{2}$ أي $m \in]\frac{1}{2}; +\infty[$

5-أ-تبيان أن h زوجية

$$h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}\ ;\ D_h = \mathbb{R}^*$$

$$h(-x) = \frac{\ln|-x|}{-|-x|-1} = \frac{\ln|x|}{-|x|-1} = h(x)$$

لأن $|x| = |-x|$

ومنه h دالة زوجية

5-ب- رسم (C_h) باستعمال (C_f)

لدينا $h(x) = -f(x)\ :\ x > 0$

ومنه في المجال $]0; +\infty[$ يكون (C_h) نظير لـ (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل

وبما أن h زوجية فالمنحنى (C_h) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

64. بكالوريا 2015 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2015 تقني رياضي

الموضوع الأول

h-I الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ بما يلي:

$$h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

2-ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-استنتج أنه من كل x من $]-2;+\infty[$:
$h(x) > 0$

II- f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$
كما يلي: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2}\ln(x+2)$
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$).

1-احسب $\lim\limits_{x \to -2^{>}} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2-أ- بين أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$:
$f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ).

4-أ- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثياتها.

4-ب- ارسم المستقيمين المقاربين و (C_f).

4-جـ- احسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = -1$ و $x = 1$

III- g الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ:
$g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$

1- احسب $\lim\limits_{x \to -1^{<}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x \to -1^{>}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ ،
ماذا تستنتج بالنسبة لهذه الدالة g ؟

2- اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

3- انطلاقا من المنحنى(C_f) ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق

الحل

I- h دالة معرفة على المجال $]-2;\infty[$ بـ:
$$h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$$

1-1-حساب $\lim\limits_{x\to -2^{>}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to -2^{>}} h(x) = \lim_{x\to -2^{>}} (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+2)\left[(x+2) + \frac{2}{x+2} - \frac{2\ln(x+2)}{x+2}\right] = +\infty$$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة h

$$h'(x) = 2(x+2) - 2\frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2)^2-2}{x+2}$$

لدينا $x + 2 > 0$ ومنه اشارة $h'(x)$ من اشارة
$2(x+2)^2 - 2$

$$h'(x) > 0 \Rightarrow 2(x+2)^2 - 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \text{أو} \\ x < -3 \end{cases}$$

لدينا مجال تعريف الدالة h $D_h =]-2;+\infty[$
ومنه لكي يكون $h'(x) > 0$ يجب أن يكون $x > -1$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$
$2(x+2)^2-2$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$h'(x)$			‖ $-$	0	$+$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $]-2;-1[$

-جدول تغيرات h

x	-2		-1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3-استنتاج أن $h(x) > 0$ على $]-2;+\infty[$:
من جدول تغيرات h لدينا $h(x) \geq 3 > 0$ ومنه
$h(x) > 0$

II- الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2}\ln(x+2)$$

1-حساب النهايات

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$

التفسير البياني: وجود مستقيم مقارب شاقولي لـ (C_f) معادلته $x = -2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2-أ- اثبات عبارة $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على المجال $]-2;+\infty[$

$$f'(x) = 1 + 2\frac{\frac{1}{x+2}(x+2) - \ln(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 1 + 2\frac{1-\ln(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2+2-2\ln(x+2)}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{h(x)}{(x+2)^2}$$

2-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

لدينا: $(x+2)^2>0$ ومنه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

$h(x)>0$ ومنه f ومتزايدة تماما على D_f

جدول تغيرات الدالة f

x	-2 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3-أ- البرهان أن المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln(x+2)}{x+2}\right)=0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

3-ب- دراسة وضعية (C_f) مع (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{2\ln(x+2)}{x+2}$$

$\frac{2}{x+2}>0$ على المجال $D_f=]-2;+\infty[$ ومنه

ندرس إشارة $\ln(x+2)$

لكي يكون $\ln(x+2)>0$

يجب أن يكون $x+2>1$ ومنه $x>-1$

ومنه تصبح الوضعية كالتالي

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)

4-أ- اثبات أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A

لكي يقبل (C_f) نقطة انعطاف عند A يجب أن:

1-تنعدم المشتقة الأولى ولا تغير اشارتها في A

أو:

2-تنعدم المشتقة الثانية وتغير اشارتها في A

بما أن الحالة الأولى لا تتحقق فندرس الحالة الثانية

$$f''(x)=\frac{-6+4\ln(x+2)}{(x+2)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow -6+4\ln(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \ln(x+2)=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

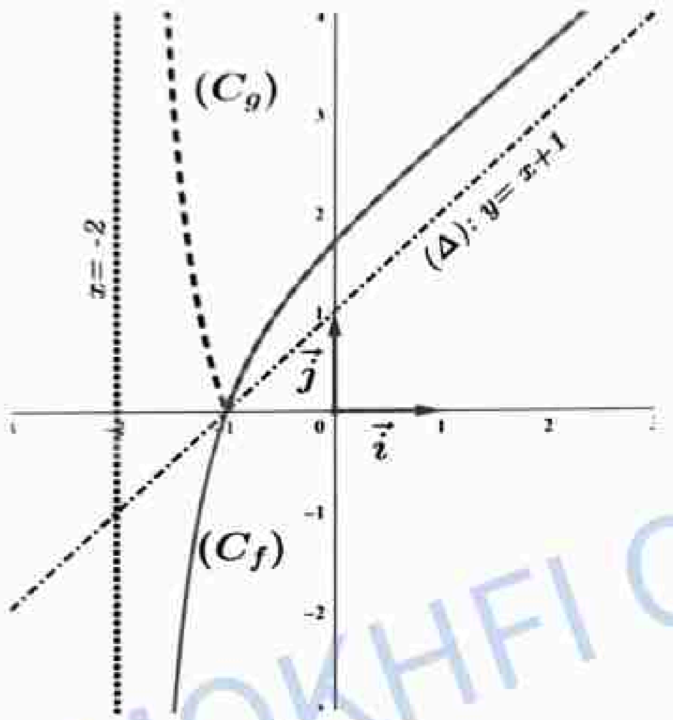
$$\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}-2$$

x	-2	$e^{\frac{3}{2}}-2$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف A حيث:

$$A\left(e^{\frac{3}{2}}-2\ ;\ e^{\frac{3}{2}}+3e^{-\frac{3}{2}}-1\right)$$

4-ب- رسم (C_f) والمستقيمين المقاربين



4-جـ-حساب مساحة الحيز S

$$S=\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\left(x+1+2\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)dx$$

لدينا $u'u^n \xrightarrow{\text{دالتها الأصلية}} \frac{u^{n+1}}{n+1}$

ومنه الدالة الأصلية للدالة $\frac{1}{x+2}\ln(x+2)$ هي: $\frac{\ln^2(x+2)}{2}$

ومنه: $S=\left[\frac{1}{2}x^2+x+\ln^2(x+2)\right]_{-1}^{1}$

$S=((\ln 3)^2+2\ )\,cm^2$

III- g الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=|x+1|+\frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$$

1-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ **و** $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

نكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

$$g(x)\begin{cases} x+1+\frac{2}{x+2}\ln(x+2)=f(x)\,;\,x\geq -1\\ -x-1-\frac{2}{x+2}\ln(x+2)=-f(x)\,;\,-2<x\leq -1\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[\frac{-x-1-\frac{2\ln(x+2)}{x+2}-0}{x+1}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[-\frac{x+1}{x+1}-\frac{2\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\right]$$

$$=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[-1-\frac{2}{x+2}\times\frac{\ln(x+2)}{(x+1)}\right]$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[\frac{\ln(x+2)}{(x+1)}\right]=1$ **باستعمال العدد المشتق للدالة** $k(x)=\ln(x+2)$

ومنه

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ <}}\left[-1-\frac{2}{x+2}(1)\right]$$
$$=-1-2(1)$$
$$=-3$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\left[1+\frac{2}{x+2}\times\frac{\ln(x+2)}{(x+1)}\right]$$
$$=3$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}\neq\lim_{\substack{x\to -1\\ >}}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$$

نستنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند $x=-1$

2-التفسير البياني:

(C_g) يقبل نصفي مماسين معامل توجيههما على الترتيب -3 و 3

3-رسم (C_g) انطلاقا من (C_f)

لدينا لما $x\geq -1$ فإن $g(x)=f(x)$

ولما $-2<x\leq -1$ فإن $g(x)=-f(x)$

ومنه:

في المجال $[-1;+\infty[$ (C_g) وينطبق على (C_f)

في المجال $]-2;-1]$ (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

.65. بكالوريا 2015 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة أسية باك 2015 تقني رياضي

الموضوع الثاني

I- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$g(x)=(x+2)e^{x}-2$$

1-احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

2-ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3-احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$$f'(x)=-g(x)$$

2-ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2-جـ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ).

3-أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث:

$0.92<\alpha<0.93$ و $-1.56<\beta<-1.55$

3-ب- ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty;\frac{3}{2}]$

4-أ- بين أن الدالة: $x\mapsto xe^{x}$ هي دالة أصلية لـ $x\mapsto(x+1)e^{x}$ على $\mathbb{R}$

4-ب- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=\alpha$

(حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3-أ)

4-جـ- جد حصرا للعدد A.

الحل

I-g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = (x+2)e^x - 2$$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^x - 2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^x + 2e^x - 2) = -2$$

2-دراسة اتجاه تغير الدالة g

$$g'(x) = (x+3)e^x$$

$e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+3$

لكي يكون $g'(x) > 0$ يجب أن $x+3>0$ ومنه $x > -3$

ومنه g متزايدة على المجال $]-3\,;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $]-\infty;-3[$

-جدول التغيرات

x	$-\infty$		-3		0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-e^{-3}-2$	$\nearrow$		$+\infty$

3-حساب $g(0)$:

$$g(x) = (0+2)e^0 - 2 = 0$$

-استنتاج اشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II-f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$$

1- النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [2x+3-(x+1)e^x]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} e^x\left[\frac{2x}{e^x} + \frac{3}{e^x} - x - 1\right]$$
$$= -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [2x+3-(x+1)e^x]$$
$$= -\infty$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

2-أ- البرهان أن $f'(x) = -g(x)$

$$f'(x) = 2 - [e^x + e^x(x+1)]$$
$$= 2 - e^x(x+2)$$
$$= -[-2 + e^x(x+2)]$$

$$g'(x) = -g(x)$$

2-ب- إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

أي عكس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات $f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2-جـ البرهان أن (Δ) مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to-\infty} (-(x+1)e^x)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (-xe^x - e^x)$$
$$= 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y = 2x+3$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = -(x+1)e^x$

$e^x > 0$ ومنه ندرس إشارة $-x-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)	

3-أ-البرهان أن $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β

f مستمرة ومتناقصة على المجال $]0{,}92;0{,}93[$

و $\begin{cases} f(0{,}93) = -0.03 \\ f(0{,}92) = 0.02 \end{cases}$

و $f(0.92) \times f(0.93) < 0$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حل α حيث $0{,}92 < \alpha < 0{,}93$

إثبات وجود حل اخر β.

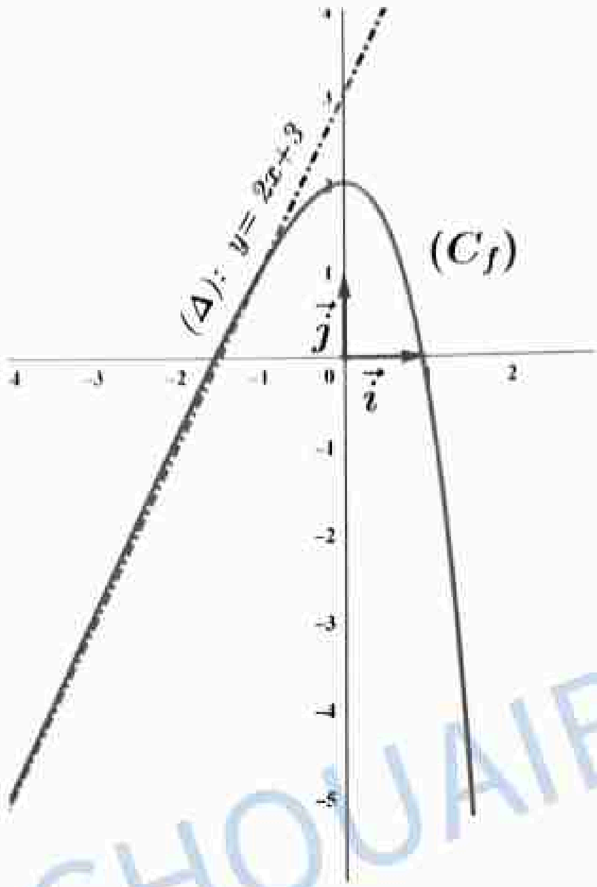
f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1{,}56;-1{,}55[$

و $\begin{cases} f(-1{,}56) = -0.002 \\ f(-1{,}55) = 0.016 \end{cases}$

$f(-1{,}55) \times f(-1{,}56) < 0$

ومنه حسب م ق م المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1{,}56 < \beta < -1{,}55$

3-ب- رسم (Δ) و (C_f)



4-أ- البرهان أن الدالة $x \to xe^x$ دالة أصلية لـ $x \to (x+1)e^x$

$$(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

4-ب- حساب A

بما أن (Δ) يقع فوق المنحنى (C_f) في المجال $]0, \alpha[$

$$A = \int_0^\alpha (y - f(x))dx$$

$$A = \int_0^\alpha (2x+3) - (2x+3-(x+1)e^x)dx$$

$$A = \int_0^\alpha (x+1)e^x dx$$

$$A = [xe^x]_0^\alpha$$

$$A = \alpha e^\alpha \ (\boldsymbol{ua})$$

-حصر A

$0{,}92 < \alpha < 0{,}93 \ldots (1)$

$e^{0{,}92} < e^\alpha < e^{0{,}93} \ldots (2)$

بضرب (1) في (2) طرفا لطرف نجد:

$0{,}92 \times e^{0{,}92} < \alpha e^\alpha < 0{,}93 \times e^{0{,}93}$

ومنه $2{,}31 < A < 2{,}36$

.66. بكالوريا 2014 تقني رياضي

الموضوع: دالة لوغاريتمية + تركيب دوال (باك 2014 تقني رياضي)

الموضوع الأول

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

I- g الدالة المعرفة على المجال $]0; 3]$ بـ:

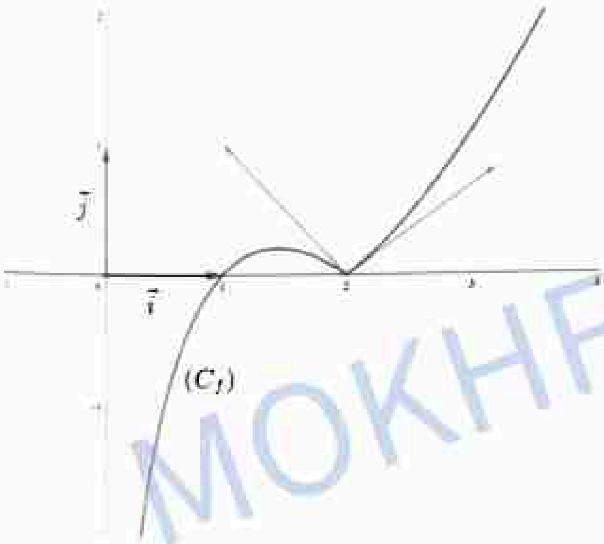
$$g(x) = x\ln x + x$$

1- ادرس تغيرات الدالة g

2-أ- بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; 3]$ ثم تحقق أن $1.45 < \alpha < 1.46$.

2-ب- استنتج إشارة $g(x) - 2$

II- التمثيل البياني المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على المجال $]0; 3]$ بـ: $f(x) = |x-2|\ln x$



1- باستعمال (C_f) ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 2$

2-أثبت صحة تخمينك.

3-ادرس تغيرات الدالة f

III- h الدالة المعرفة على $[0; \frac{\pi}{2}[$ كمايلي:

$$h(x) = (2 - \cos x)\ln(\cos x)$$

1- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) حيث (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h

2-ادرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها وارسم (Δ) و (C_h).

الحل

I-g دالة معرفة على المجال $]0;3]$ بـ :
$$g(x) = x\ln x + x$$

1- دراسة تغيرات g

-النهايات:
$$\lim_{\substack{x \to 0\\>}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0\\>}} x\ln(x) + x = 0$$

- المشتقة

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;3]$ ودالتها المشتقة

$$g'(x) = \ln x + 2$$

إشارة $g'(x)$

$x > e^{-2} \Leftarrow \ln x + 2 > 0 \Leftarrow g'(x) > 0$

x	0		e^{-2}		3
$\ln x + 2$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه g متزايدة على $[e^{-2};3]$

ومتناقصة تماما على $]0;e^{-2}]$

-جدول تغيرات $g(x)$

x	0		e^{-2}		3
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	↘	$-e^{-2}$	↗	$3+3\ln 3$

2-أ- البرهان أن العبارة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;3]$

$2 \notin]-e^{-2};0[$ ومنه المعادلة $g(x) = 2$ لا تقبل حلا في $]0;e^{-2}]$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[e^{-2};3]$

ولدينا
$$\begin{cases} g(1{,}46) \simeq 2{,}01 \\ g(1{,}45) \simeq 1{,}99 \end{cases}$$

و
$$2 \in [-e^{-2};3+3\ln 3]$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[e^{-2};3]$

ومنه المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا α حيث $1{,}45 < \alpha < 1{,}46$

2-ب- استنتاج إشارة $g(x) - 2$

x	0		α		3
$g(x)-2$	‖	$-$	0	$+$	

II- f الدالة المعرفة بتمثيلها (C_f) على $]0;3]$:
$$f(x) = |x-2|\ln x$$

1- التخمين

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x = 2$ لأن المنحنى (C_f) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 2

2-إثبات صحة التخمين

$$f(x)\begin{cases}(x-2)\ln x, & 3 \geq x \geq 2\\ (2-x)\ln x, & 0 < x \leq 2\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2\\<}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2\\<}} \frac{(2-x)\ln x}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2\\<}} -\ln x = -\ln 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 2\\>}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2\\>}} \frac{(x-2)\ln x}{x-2} = \lim_{\substack{x \to 2\\>}} \ln x = \ln 2$$

$-\ln 2 \neq \ln 2$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 2

3-دراسة تغيرات الدالة f

-النهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0\\>}} |x-2|\ln x = -\infty$$

-المشتقة:

f قابلة للاشتقاق على المجال $[2;3[$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-2}{x} = \frac{x\ln x + x - 2}{x} = \frac{g(x)-2}{x}$$

وقابلة للاشتقاق على المجال $]0;2[$

$$f'(x) = -\ln x + \frac{2-x}{x} = \frac{-x\ln x + 2 - x}{x} = -\frac{g(x)-2}{x}$$

-إشارة $f'(x)$

ومنه في المجال $]2;3[$ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$ $x > 0$

وفي المجال $]0;2[$ إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

x	0		α		2		3
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على $]0;\alpha] \cup]2;3]$

ومتناقصة تماما على $[\alpha;2]$

-جدول تغيرات $f(x)$

x	0		α		2		3
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$\ln 3$

III- h دالة معرفة على $]0;\frac{\pi}{2}[$ بـ :

$$h(x)=(2-\cos x)\ln(\cos x)$$

1- البرهان أن (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ مقارب لـ (C_h) بجوار $-\infty$:

نلاحظ أن h هي مركب دالتين $f(x)$ و $x\to\cos x$ حيث:

$$h(x)=f(\cos x)=f(u(x))$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} h(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} f(\cos x)=\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} f(u(x))$$

$$=\lim_{x\to\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}u(x)} f\left(\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} u(x)\right)$$

شرط f مستمرة (نعم لدينا f مستمرة على $]0;\frac{\pi}{2}[$)

وعليه: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}(u(x))=\lim\limits_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}}(\cos x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

ومنه تصبح:

$$\lim_{x\overset{<}{\to}\frac{\pi}{2}} h(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

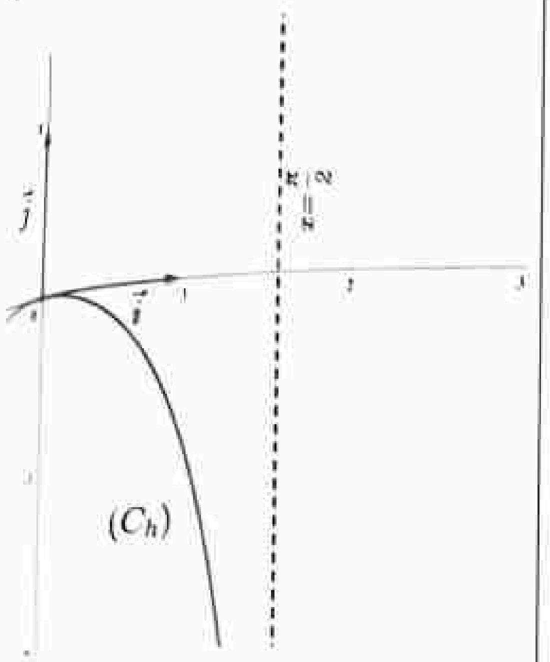
2-دراسة اتجاه تغير الدالة h

نعلم أن الدالة $x\mapsto\cos x$ متناقصة تماما على المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ والدالة f متزايدة تماما على $]0;1[$

ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖

-رسم (Δ) و (C_f)



.67 بكالوريا 2014 تقني رياضي

التوثيق: دالة أسية باك 2014 شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

f هي الدالة المعرفة بـ: $f(x)=(x-1)e^{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- عين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ- بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

ثم تحقق أن $1.27<\alpha<1.28$

3-ب- أكتب معادلة لـ(T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدد وضعية (C_f) بالنسبة الى (T)

3-جـ- أرسم (T) و (C_f)

4-عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^{x}-(m-1)e^{m}=-1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$h(x)=(|x|+1)e^{-|x|}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

5-أ-بين أن الدالة h زوجية.

5-ب- ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f)

6- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax+b)e^x$

حيث: a و b عددان حقيقيان.

-عين a و b حتى يكون: من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$g'(x)=f(x)$$

الحل

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x-1)e^x$

1- تعيين نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x$$
$$=\lim_{x\to-\infty} xe^x-e^x$$
$$=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$$

II-2- دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للانشقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=e^x+(x-1)e^x$$
$$f'(x)=xe^x$$

لدينا $e^x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة x

لكي يكون $f'(x)>0$ يجب $x>0$

ومنه f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ومتناقصة تماما على $]-\infty;0]$

-جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3-أ- البرهان أن $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

المعادلة لا تقبل حلا على المجال $]-\infty;0]$ لأن $1\notin[-1;0[$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و $1\in]-1;+\infty[$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

-التحقق أن $1,27<\alpha<1,28$

لدينا $\begin{cases} f(1,28)=1,01 \\ f(1,27)=0,96 \end{cases}$

ومنه

أي: $f(1,27)<1<f(1,28)$

$$1,27<\alpha<1,28$$

3-ب- معادلة المماس (T) لـ (C_f) $x_0=1$

$$(T): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=e(x-1)+0$$
$$=ex-e$$

-تحديد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T)

-ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

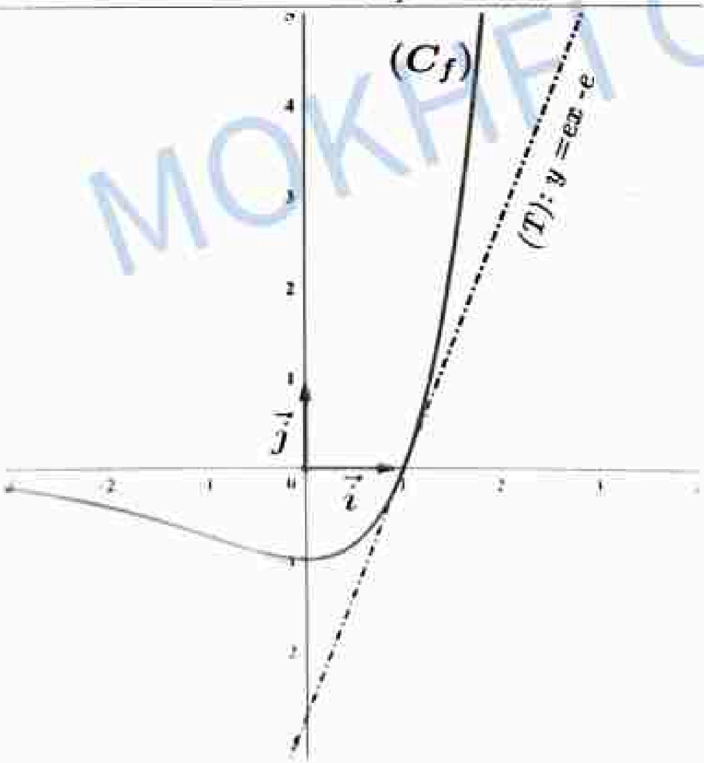
$$f(x)-y=(x-1)e^x-(ex-e)$$
$$=(x-1)e^x-e(x-1)$$
$$=(e^x-e)(x-1)$$

-ندرس إشارة $(e^x-e)(x-1)$

$$(e^x-e)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$\Rightarrow e^x-e=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x-e		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$+$	
الوضعية	(C_f) فوق (T)		(C_f) يمس (T)		(C_f) فوق (T)

3-جـ -رسم (T) و (C_f)



4-تعيين قيم m حتى تقبل المعادلة حلا واحدا في $\mathbb{R}$

$$(x-1)e^x-(m-1)e^m=-1$$
$$(x-1)e^x=(m-1)e^m-1$$
$$f(x)=f(m)-1$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f)
مع المستقيم ذي المعادلة $y = f(m) - 1$
$f(x) = f(m) - 1$ تقبل حلا و احدا إذا كان
$f(m) - 1 = -1$ أو $f(m) - 1 \geq 0$
ومنه $m = 1$ أو $m \geq \alpha$
(f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $\alpha > 0$)

5- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$$

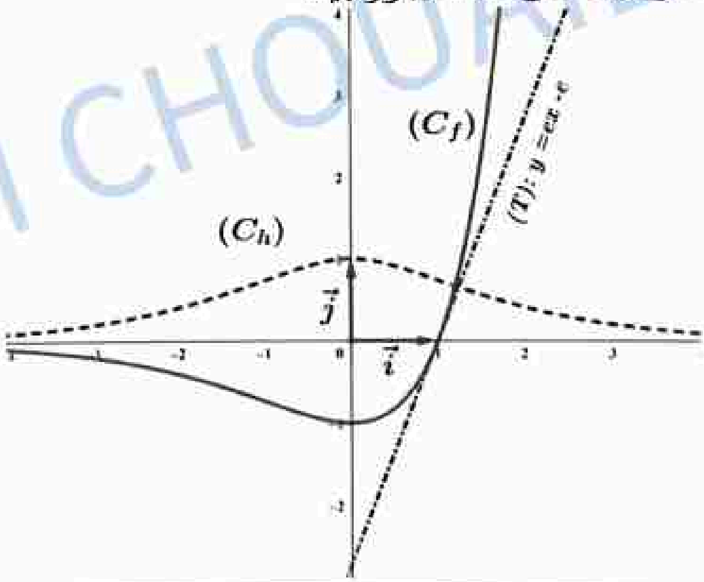
أ- البرهان أن h زوجية

$$\begin{aligned} h(-x) &= (|-x| + 1)e^{-|-x|} \\ &= (|x| + 1)e^{-|x|} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h دالة زوجية

5-ب-رسم (C_h) استعمال (C_f)

إذا كان $x \leq 0$ فإن $h(x) = -f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال $]-\infty;0]$ ثم نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة h زوجية



6-تعيين a و b حتى يكون $g'(x) = f(x)$

$$g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x$$
$$g'(x) = (ax + a + b)e^x$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد

$$f(x) = (x - 1)e^x$$
$$a = 1 \Rightarrow \quad a + b = -1 \quad \Rightarrow b = -2$$

ومنه $g(x) = (x - 2)e^x$

68. بكالوريا 2013 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2013 شعبة تقني رياضي

الموضوع الأول

I-الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]-1;+\infty[$.

2-بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.31 < \alpha < 0.32$

وأن: $\ln(\alpha + 1) = 2 - (\alpha + 1)^2$

3-استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II-الدالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2-أثبت من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ أن:
$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4-بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5-مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III-(Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x

1- أثبت أن المسافة AM تعطى بالعبارة: $AM = \sqrt{f(x)}$

2-الدالة k معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$

2-أ- بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

2-ب- عين إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن

2-جـ- بين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$

الحل

I- g دالة معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ :
$$g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$$

I-1-دراسة اتجاه تغير g

-النهايات.

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]$$
$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1) - 2$$

نعلم أن $\lim_{t \to 0} \ln t = -\infty$

نضع $t = x+1$ لما $x \to -1$ يكون $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \ln t = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1) = -\infty$$

ومنه
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} [(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)] = +\infty$$

-المشتقة.

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

$x > -1$ ومنه $x+1 > 0$ ومنه $g'(x) > 0$

إذا $g(x)$ متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

-جدول تغيرات $g(x)$

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

I-2-البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α حيث $0,31 < \alpha < 0,32$

g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,31;0,32[$

و
$$\begin{cases} g(0.31) = -0.01 \\ g(0.32) = 0.02 \end{cases}$$

ومنه $g(0,31) \times g(0,32) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,31 < \alpha < 0,32$

-البرهان أن $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$

لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه

$$(\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0$$

ومنه
$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

I-3-استنتاج إشارة $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- f الدالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ :
$$f(x) = [(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2]$$

II-1- حساب النهايات

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} [(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2]$$
$$= \lim_{x \to -1} [(2 - \ln(x+1))^2]$$

نضع $t = x+1$ ومنه لما $x \to -1$ يكون $t \to 0$ ومنه

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{t \to 0} [(2 - \ln t)^2] = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2]$$
$$= +\infty$$

2-إثبات عبارة $f'(x)$

$$f'(x) = 2(x+1) + 2\left(-\frac{1}{x+1}\right)(2 - \ln(x+1))$$
$$= 2(x+1) - \frac{4}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1}$$
$$= \frac{2(x+1)^2 - 4 + 2\ln(x+1)}{x+1}$$
$$= \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1}$$
$$f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3-دراسة تغيرات الدالة f

ندرس إشارة $f'(x)$

$x+1 > 0$ على المجال $]-1;+\infty[$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$

-جدول تغيرات f

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4-البرهان أن
$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$$

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2$$

ومن السؤال (I– 2) لدينا:

$$\ln(\alpha+1) = 2-(\alpha+1)^2$$

نعوض قيمة $\ln(\alpha+1)$ في عبارة $f(\alpha)$ ومنه نجد:

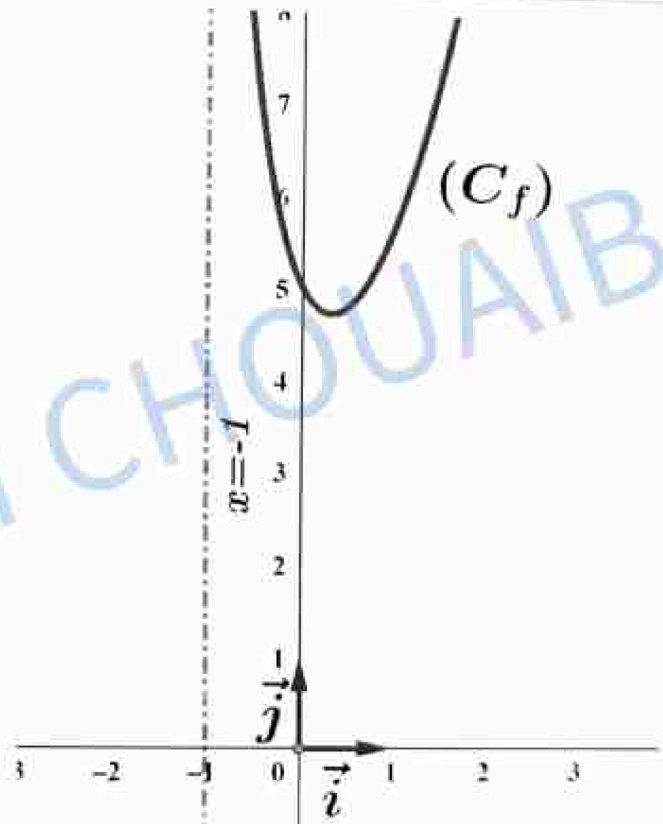
$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + [2-(2-(\alpha+1)^2]^2$$
$$= (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4$$
$$= (\alpha+1)^2[1+(\alpha+1)^2]$$

-استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

$$0,31 < \alpha < 0,32$$
$$(1,31)^2 < (\alpha+1)^2 < (1,32)^2$$

ومنه $4,68 < f(\alpha) < 4,77$

5-رسم (C_f) على المجال $]-1,2]$



III-(T) منحنى الدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة $h(x)=\ln(x+1)$

1- اثبات أن المسافة AM تعطى بالعبارة

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

لدينا A النقطة ذات الاحداثيات $A(-1;2)$

و M نقطة من (T) أي $M(x;\ln(x+1))$

باستعمال قانون الطويلة

$$AM = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$
$$AM = \sqrt{(x-(-1))^2+(\ln(x+1)-2)^2}$$
$$AM = \sqrt{(x+1)^2+(2-\ln(x+1))^2}$$
$$AM = \sqrt{f(x)}$$

III-الدالة k معرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

2-أ- اثبات أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير

الدالة k قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

-إشارة $k'(x)$ من إشارة $f'(x)$ لأن $2\sqrt{f(x)} > 0$

-ومنه لـ k و f نفس اتجاه التغير

x	-1		α		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	↘	$k(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}$	↗	$+\infty$

III-2-ب- تعيين احداثيات B من (T) بحيث تكون المسافة AM اصغر مما يمكن

للدالة k نفس تغيرات الدالة f ومنه

المسافة AM أصغر ما يمكن $B \in (T)$

اذن $B(\alpha;k(\alpha))$ لأن k تقبل قيمة حدية عند α

ومنه $B(\alpha:\sqrt{f(\alpha)})$

أي $B(\alpha;\ln(\alpha+1))$ هي احداثيات النقطة B

2-جـ- البرهان أن

$$AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$$

لدينا: $AB = \sqrt{(\alpha+1)^2+(\ln(\alpha+1)-2)^2}$

لدينا مما سبق $\ln(\alpha+1) = 2-(\alpha+1)^2$

ومنه $\ln(\alpha+1)-2 = -(\alpha+1)^2$

$$AB = \sqrt{(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4}$$
$$AB = \sqrt{(\alpha+1)^2((\alpha+1)^2+1)}$$

اذن $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$

.69 بكالوريا 2013 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة اسية و... باك 2013 تقني رياضي

الموضوع الثاني

I-الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (x-1)e^x$$

1- ادرس تغيرات الدالة g

2-بين انه من اجل كل عدد حقيقي x :

$$1+(x-1)e^x \geq 0$$

II-الدالة f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x-1}{x}; \quad x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1-أ- بين أن f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.

1-ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2-تحقق أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$

2-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

III- n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ، الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f_n(x) = \frac{e^x-1}{x} + n\ln x$

و (C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

2-احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

3-ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1})

4-بين أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثياتها

5-أ-بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0.3;0.4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

5-ب-بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$

فإن: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثم برهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$ ،

6-أ-بالاعتماد على الجزء II، بين أنه من أجل كل $x \in]0;1]$: $\frac{e^x-1}{x} \leq e-1$

6-ب-استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$

$\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ، ثم $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$

6-جـ- جد نهاية المتتالية (α_n)

الحل

I-1 g الدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x-1)e^x$

1- دراسة تغيرات g

النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} (xe^x - e^x) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^x = +\infty$$

المشتقة:

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

- **جدول تغيرات g**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$0 \searrow$	-1	$\nearrow +\infty$

2-البرهان أن $1 + (x-1)e^x \geq 0$

من جدول تغيرات $g(x)$ نلاحظ أن $g(x) \geq -1$

ومنه $(x-1)e^x \geq -1$

ومنه $1 + (x-1)e^x \geq 0$

II- f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^x-1}{x} \quad ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1-أ- اثبات أن f مستمرة على $[0;+\infty[$

الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ ولكن يجب أن تكون مستمرة عند 0 أي

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = f(0) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(0) = 1$$

حيث $h(x) = e^x$ و $h'(x) = e^x$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = 1 = f(0)$

اذن f مستمرة عند 0 و هي مستمرة على $[0;+\infty[$

1-ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{e^x-1}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right] = +\infty$$

2-أ- التحقق من عبارة $f'(x)$ من اجل $x \in]0;+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{xe^x-1(e^x-1)}{x^2}$$
$$=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}$$

2-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f

في المجال $]0;+\infty[$ لدينا $x^2>0$

و: $(x-1)e^x+1>0$

ومنه $f'(x)>0$

إذن: الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

-جدول تغيرات f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1 ↗	$+\infty$

III $f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln x$

1- دراسة اتجاه تغير f_n

لدينا $f_n(x)=f(x)+n\ln x$

ومنه $f_n'(x)=f'(x)+\frac{n}{x}$

اذن $f_n'(x)=\frac{(x-1)e^x+1}{x^2}+\frac{n}{x}$

بما أن و $x^2>0$ و $1+(x-1)e^x>0$ و $\frac{n}{x}>0$

فان: $f_n'(x)>0$ على $]0;+\infty[$

ومنه $f_n(x)$ متزايدة تماما

2-نهايتا الدالة $f_n(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{e^x-1}{x}+n\ln x\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+\lim_{\substack{x\to0\\>}} n\ln x$$

لدينا $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{e^x-1}{x}=1$ **طريقة العدد المشتقة**

ومنه:
$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f_n(x)=1+\lim_{\substack{x\to0\\>}} n\ln x=-\infty$$
$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1}{x}+n\ln x\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}+n\ln x\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$

-جدول تغيرات $f_n(x)$

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	
$f_n(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

II-3-دراسة الوضع النسبي لـ (C_n) و (C_{n+1})

ندرس إشارة الفرق $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=n\ln x+\ln x-n\ln x$$
$$=\ln x$$

نبحث عن اشارة $\ln x$

$$x>1 \Leftarrow \ln x>0$$

x	0		1		$+\infty$
$f_{n+1}(x)-f(x)$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_{n+1}) تحت (C_n)	تقاطع	(C_{n+1}) فوق (C_n)	

II-4-البرهان أن جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B

(C_n) ينطبق (C_{n+1}) تكافئ $f_{n+1}(x)=f_n(x)$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=0$

لدينا مما سبق $f_{n+1}(x)-f_n(x)=\ln x$

$\ln x$ مستقلة عن الوسيط n ومنه النقطة B احداثيها

$B(1;f_n(1))$

$f_n(1)=f(1)+n\ln 1=e-1$

جميع المنحنيات (C_n) تمر بنقطة ثابتة B:

$B(1;e-1)$

II-5-أ-البرهان أنه يوجد عدد حقيقي α_1 حيث $f_1(\alpha_1)=0$

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0,3;0,4[$

ولدينا
$$\begin{cases} f_1(0,3)=-0.03\\ f_1(0,4)=0.31\end{cases}$$

و $f_1(0,3)\times f_1(0,4)<0$

ومنه حسب مبرهنة ق م المعادلة $f_1(\alpha_1)=0$ تقبل حلا وحيدا α_1 حيث $0,3<\alpha_1<0,4$

II-5-ب- البرهان أن $f_n(\alpha_1) < 0$

لدينا من جدول الوضع النسبي أن (C_{n+1}) يقع أسفل (C_n) أي $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

اذن $f_n(x) < f_1(x)$

ومنه بما أن $\alpha_1 \in]0,3 ; 0,4[$ فإن $\alpha_1 < 1$ أي $f_n(\alpha_1) < f_1(\alpha_1)$ ومنه $f_n(\alpha_1) < 0$

-البرهان أنه يوجد عدد حقيقي α_n من $]\alpha_n ; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$

بما أن f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $]\alpha_1 ; 1[$

و $\begin{cases} f_n(1) > 0 \\ f_n(\alpha_1) < 0 \end{cases}$

و $f_n(\alpha_1) \times f_n(1) < 0$

ومنه حسب م ق م المعادلة $f_n(\alpha_n) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n من $]\alpha_n ; 1[$

II-6-أ-البرهان أن $\frac{e^x-1}{x} \le e-1$ حيث $x \in]0,1]$

لدينا $f(1) = e-1$ حيث $x \in]0;1]$

بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;1]$

فإن $f(x) \le f(1)$ ومنه $\frac{e^x-1}{x} \le e-1$

II-6-ب-استنتاج أن $\ln(\alpha_n) \ge \frac{1-e}{n}$

لدينا $f_n(\alpha_n) = 0$ ومنه $\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha_n} + n\ln\alpha_n = 0$

ومنه $n\ln\alpha_n = -\left(\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}\right)$........(1)

ولدينا $\frac{e^x-1}{x} \le e-1$

ومنه $-\left(\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}\right) \ge 1-e$ .... (2)

ومن (1) و (2) نجد:

$n\ln\alpha_n \ge 1-e$

$\ln\alpha_n \ge \frac{1-e}{n}$

-استنتاج أن $\alpha_n \ge e^{\frac{1-e}{n}}$

لدينا $\ln\alpha_n \ge \frac{1-e}{n}$ بإدخال الدالة الأسية

نجد $\alpha_n \ge e^{\frac{1-e}{n}}$

II-6-جـ حساب نهاية المتتالية (α_n):

لدينا:

$e^{\frac{1-e}{n}} < \alpha_n < 1$ و $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1-e}{n}} = 1$

و

ومنه $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1-e}{n}} < \lim_{n\to+\infty} \alpha_n < 1$

ومنه النهاية بالحصر هي:

$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

.70 بكالوريا 2012 تقني رياضي

الموضوع: دالة أسية باك 2012 شعبة تقني رياضي (الموضوع الأول)

الموضوع الأول

I-g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = -4 + (4-2x)e^x$$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2-بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والاخر α حيث $1.59 < \alpha < 1.60$

3-استنتج إشارة $g(x)$.

II-f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$$

(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1- بين أن (C_f) يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتاهما على الترتيب $y = -1$ و $y = 0$

2-أ- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

2-ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f

2-جـ- احسب $f(1)$ ، ثم استنتج، حسب قيم x إشارة $f(x)$

3-أ- بين أن: $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$، حيث α هو العدد المعرف في السؤال 2 من الجزء I

3-ب- استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج الى 10^{-2})

3-جـ- ارسم(C_f)

4- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$2x - 2 = (e^x - 2x)(m+1)$$

5-h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

$$h(x) = [f(x)]^2$$

5-أ-احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$.

5-ب-شكل جدول تغيرات الدالة h

الحل

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = -4 + (4-2x)e^x$$

1- دراسة تغيرات g :

-النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}[-4+(4-2x)e^x] = \lim_{x\to-\infty}[-4+4e^x-2xe^x] = -4$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty} -2xe^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}[-4+(4-2x)e^x] = -\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} 4-2x = -\infty$

-المشتقة:

$$g'(x) = -2e^x + (4-2x)e^x = (-2+4-2x)e^x = (2-2x)e^x$$

$$g'(x) = 2(1-x)e^x$$

نعلم أن $2e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g متزايدة على $]-\infty;1]$ ومتناقصة على المجال $[1;+\infty[$

-جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	$\nearrow$	$-4+2e$	$\searrow$	$-\infty$

2-البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α

- الدالة g مستمرة وتغير إشارتها مرتين وبما أن $g(0)=0$ فإن الصفر حل للمعادلة $g(x)=0$
- الدالة g مستمرة ورتيبة (متناقصة) على $]1;+\infty[$ و

$$\begin{cases} g(1,60) = -0.03 \\ g(1,59) = 0.021 \end{cases}$$

ولدينا

$$g(1,60)\times g(1,59) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة الحل الثاني هو α حيث:

$$1,59 < \alpha < 1,60$$

3-استنتاج اشارة $g(x)$

من جدول التغيرات والسؤال السابق

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$

1- البرهان أن (C_f) يقبل مقاربين عند $-\infty$ و$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{\left(2-\frac{2}{x}\right)}{\frac{e^x}{x}-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة: $y=-1$ مقارب أفقي لـ (C_f) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{\frac{2x}{e^x}-\frac{2}{e^x}}{1-\frac{2x}{e^x}}\right] = 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة: $y=0$ مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2-اثبات عبارة $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{2(e^x-2x)-(e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{2e^x-4x-2xe^x+2e^x+4x-4}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{-4+(4-2x)e^x}{(e^x-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

2-ب- استنتاج إشارة $f'(x)$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

-جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

2-جـ حساب $f(1)$ واستنتاج إشارة f :

$f(1) = 0$

ومنه إشارة $f(x)$ كما يلي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3-أ- البرهان أن $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$

لدينا $f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^{\alpha}-2\alpha}$

ولدينا كذلك $g(\alpha) = 0$ ومنه

$-4 + (4-2\alpha)e^{\alpha} = 0$

ومنه $e^{\alpha} = \frac{4}{4-2\alpha} = \frac{2}{2-\alpha}$

نعوض قيمة e^{α} في عبارة $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{\frac{2}{2-\alpha}-2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{\frac{2-4\alpha-2\alpha^2}{2-\alpha}}$$

$$= \frac{(2\alpha-2)(2-\alpha)}{2-4\alpha-2\alpha^2} = \frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{2-\alpha}{\alpha-1} = -\frac{\alpha-1-1}{\alpha-1}$$

$$= -\left(\frac{\alpha-1}{\alpha-1} - \frac{1}{\alpha-1}\right)$$

$$f(\alpha) = \left[-1 + \frac{1}{\alpha-1}\right]$$

3-ب- استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$

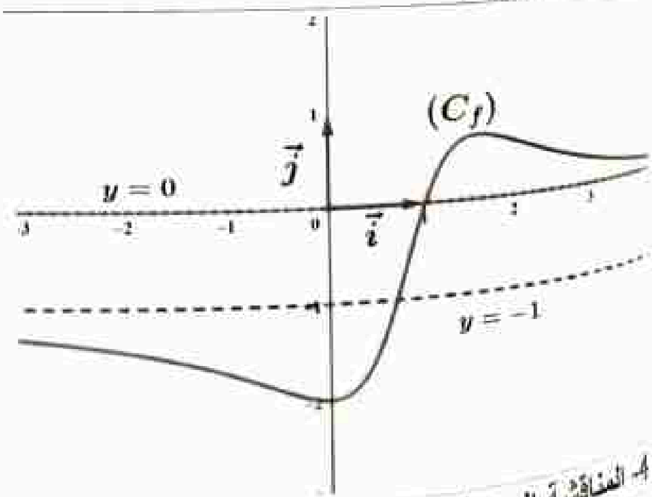
$1,59 < \alpha < 1,6$

$0,59 < \alpha - 1 < 0,6$

$\frac{1}{0,6} - 1 < \frac{1}{\alpha-1} - 1 < \frac{1}{0,59} - 1$

ومنه $0,67 < f(\alpha) < 0,7$

3-جـ- رسم (C_f)



4- المناقشة البيانية لحلول المعادلة واشارتها

حلول المعادلة $f(x) = m+1$ هو فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = m+1$.

$2x - 2 = (e^{x} - 2x)(m+1)$

$\frac{2x-2}{e^{x}-2x} = m+1$

$f(x) = m+1$

المناقشة

لما $m \in]-\infty; -3[\cup]\frac{3-2\alpha}{\alpha-1}; +\infty[$ لا توجد حلول

لما $m = -3$ للمعادلة حل مضاعف معدوم

لما $m \in]-3; -2[$ للمعادلة حلين مختلفي الاشارة

لما $m \in [-2; -1]$ للمعادلة حل واحد موجب

لما $m \in]-1; \frac{3-2\alpha}{\alpha-1}[$ للمعادلة حلين موجبين

لما $m = \frac{3-2\alpha}{\alpha-1}$ للمعادلة حل مضاعف موجب

II-5- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x) = [f(x)]^2$

5-أ-حساب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$

$h'(x) = 2f'(x).f(x)$

-استنتاج إشارة $h'(x)$

إشارة $h'(x)$ من إشارة الجداء $f'(x) \times f(x)$

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

5-ب-جدول تغيرات $h(x)$

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$(f(\alpha))^2$	$\searrow$	0

71. بكالوريا 2012 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية + المناقشة البيانية باك 2012 شعبة تقني رياضي

الموضوع الثاني

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + a + b\ln(x)$

حيث a و b عددان حقيقيان

1- عين a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4.

2-نضع $a=-2$ و $b=2$

أ-ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

2-ب- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1-أ- احسب $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

1-ب- احسب $f'(x)$ ، ثم تحقق أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

1-ج-استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات f

2-أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مقارب لـ(C_f) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى(Δ)

2-ب- بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، ثم جد معادلة له.

2-جـ- نأخذ $\alpha = 1.25$ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $0.6 < x_1 < 0.7$ و $2.7 < x_2 < 2.8$ ثم ارسم كلا من(Δ)و(C_f)و (T).

3-ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m+2)x + 2\ln(x) = 0$

الحل

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :
$g(x) = x^2 + a + b\ln x$

1- تعيين a و b :

(C_f) يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4

(C_f) يشمل A يعني

$g(1) = -1$

$1^2 + a + b\ln 1 = -1$

$a = -2$ ومنه

(C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 4 في النقطة A

$g'(1) = 4$

$g'(x) = 2x + \frac{b}{x}$

$g'(1) = 2 + b = 4$

$b = 2$

2-أ- دراسة تغيرات g

-النهايات

$\lim\limits_{x\to 0^{>}} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

-المشتقة

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

بما أن $x > 0$ فإن $g'(x) > 0$ ومنه g متزايدة تماما

-جدول تغيرات g

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

2-ب- البرهان أن $g(x) = 0$ تقبل حلا α وحيدا على $]0;+\infty[$

g متزايدة تماما ومستمرة على $]0;+\infty[$

و $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$

-إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II-f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$$

1-أ-حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[x - 2 - \frac{2\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[-\frac{2\ln x}{x}\right]$$

لدينا $\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to0} -\ln x = +\infty$

ومنه

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 2 - \frac{2\ln x}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x$$
$$= +\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

1-ب- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 1 - 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

1-جـ- استنتاج إشارة $f'(x)$ وجدول تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

جدول تغيرات f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x - 2 - \frac{2\ln x}{x} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2\ln x}{x}\right] = 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

-وضعية (C_f) و (Δ)

هي إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = -\frac{2\ln x}{x}$$

$x > 0$ ومنه هي نفس إشارة البسط $-\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$		$+$	0	$-$	
$f(x) - y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)	

2-ب- البرهان أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)

يوازي (Δ) يعني أن لهما نفس معاملة التوجيه أي:

$$f'(x) = 1$$

$$\frac{x_0^2 - 2 + 2\ln x_0}{x_0^2} = 1 \Rightarrow -2 + 2\ln x_0 = 0$$
$$\Rightarrow \ln x_0 = 1$$
$$\Rightarrow x_0 = e$$

ومنه (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e$

- إيجاد معادلة T

$$(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$$
$$= x - e + e - 2 - \frac{2}{e}$$
$$(T): y = x - 2 - \frac{2}{e}$$

2-جـ- البرهان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2:

- الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $]0.6;0.7[$

ولدينا $\begin{cases} f(0.7) = -0.28 \\ f(0.6) = 0.30 \end{cases}$

و $f(0.6) \times f(0.7) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_1 على المجال $]0.6;0.7[$

- الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]2.7;2.8[$

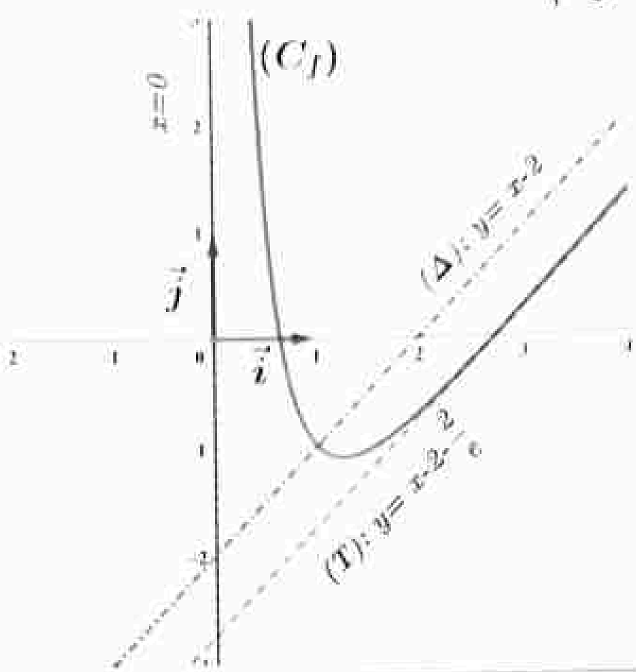
و $\begin{cases} f(2.7) = -0.035 \\ f(2.8) = 0.064 \end{cases}$

و $f(2.7) \times f(2.8) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_2 على $]2.7;2.8[$

ومنه فالمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2

الرسم



3-مناقشة حلول المعادلة بيانيا

$(m+2)x+2\ln x=0$

$m+2=-\frac{2\ln x}{x}$

$m=-2-\frac{2\ln x}{x}$

$-2-\frac{2\ln x}{x}+x=m+x \Rightarrow f(x)=m+x$

ومنه حلول المعادلة $f(x)=m$ هو فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة

$y=m+x$

ومنه توافق مناقشة المعادلة $f(x)=x+m$

-المناقشة(مناقشة مائلة):

لما $m\in]-\infty;-2-\frac{2}{e}[$ لا يوجد حلول

$m=-2-\frac{2}{e}$ يوجد حل وحيد مضاعف

لما $m\in]-2-\frac{2}{e};-2[$ للمعادلة حلان

$m=-2$ للمعادلة حل وحيد

لما $m\in]-2;+\infty[$ للمعادلة حل واحد

.72 بكالوريا 2011 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية +دوال أصلية باك 2011 تقني رياضي

الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{a+b\ln(2x)}{4x^2}$

حيث a و b عددان حقيقيان و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- عين a و b بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ لـ(C_f) موازيا لحامل محور الفواصل.

2- g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$

و (C_g) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق

2-أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$، فسر النتيجتين هندسيا.

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2-جـ- حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$.

2-د- أنشئ (C_g)

3-أ- h الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\frac{1+\ln(2x)}{2x}$.

- احسب $h'(x)$

3-ب- تحقق أن: $g(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{\ln(2x)}{2x^2}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0;+\infty[$

الحل

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x)=\frac{a+b\ln 2x}{4x^2}$

1- تعيين a و b

(C_f)يشمل A يعني $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$

$\frac{a+b\ln 1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1 \Rightarrow \frac{a}{1}=1 \Rightarrow a=1$

2-المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ للمنحنى (C_f) موازي لمحور الفواصل

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$$f'(x)=\frac{4bx-8ax-8bx\ln(2x)}{16x^2}$$
$$=2b-4=0$$
$$\Rightarrow b=2$$

2- g دالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$

2-أ- حساب النهايات والتفسير الهندسي لها

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4x^2}+\frac{\ln 2x}{2x^2}\right]$$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^2} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x^2}$

$= 0$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

التفسير الهندسي:
المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ م م أفقي لـ C_f عند $+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1 + 2\ln 2x}{4x^2}$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{4x^2} + \frac{2\ln 2x}{4x^2}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left[\frac{1}{4x^2}(1 + 2\ln 2 + 2\ln x)\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\frac{1}{4x^2}\right) \times \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 2\ln x$$
$$= -\infty$$

التفسير الهندسي:
المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ م م شاقولي لـ C_f عند $-\infty$

2-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = -\frac{\ln 2x}{x^3}$

إشارة $g'(x)$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

ومنه g متزايدة على $]0; \frac{1}{2}]$
ومتناقصة على $[\frac{1}{2}; +\infty[$

جدول تغيرات g

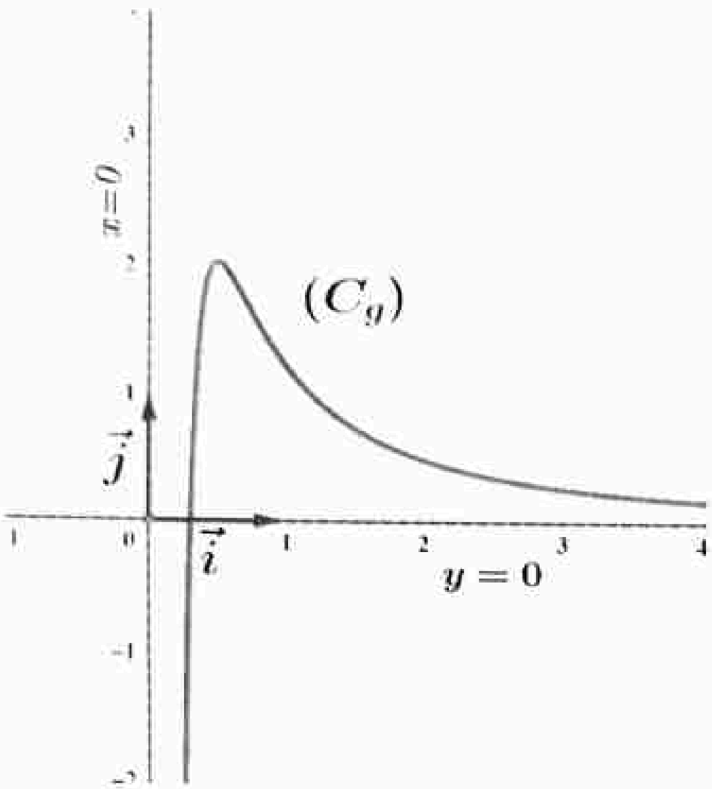
x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|\| -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2-جـ- حل المعادلة $g(x) = 0$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 + 2\ln 2x}{4x^2} = 0$$
$$\Rightarrow 1 + 2\ln 2x = 0$$
$$\Rightarrow \ln 2x = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{2e}$$

$S = \left\{\frac{\sqrt{e}}{2e}\right\}$

2-د- انشاء (C_g)



3- h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ:
$h(x) = \frac{1 + \ln 2x}{2x}$

3-أ- حساب $h'(x)$

$$h'(x) = \frac{\frac{2}{2x}(2x) - 2(1 + \ln 2x)}{4x^2} = -\frac{\ln(2x)}{2x^2}$$

3-ب- التحقق أن $g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$

$$\frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2} = \frac{1 + 2\ln 2x}{4x^2} = g(x)$$

-استنتاج دالة أصلية للدالة g

لكن G هي الدالة الأصلية للدالة g

$$g(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{\ln 2x}{2x^2}$$

الدالة الأصلية لـ $\frac{1}{4x^2}$ هي $-\frac{1}{4x}$

الدالة الأصلية لـ $-\frac{\ln 2x}{2x^2}$ هي الدالة $h(x)$

لأن: $h'(x) = -\frac{\ln 2x}{2x^2}$

ومنه تصبح $G(x)$: $G(x) = -\frac{3 + 2\ln 2x}{4x} + c$

.73 بكالوريا 2011 تقني رياضي

الموضوع: دالة أسية + متتاليات عددية باك 2011 تقني رياضي

الموضوع الثاني

أ- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي

$$f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$$

(C_f)المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f

2-عين المستقيمات المقاربة للمنحنى(C_f)

3-بين أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة لمماس (C_f) عندها

4-لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=f(x)-x$$

4-أ- ادرس تغيرات الدالة g .

4-ب بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.7<\alpha<2.8$

5-أ-حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5-ب- ارسم المماس والمستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=x$ والمنحنى (C_f)

ب- (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n؛ $u_{n+1}=f(u_n)$

1- باستخدام (C_f) والمستقيم (Δ) مثل u_0 ، u_1 و u_2 على حامل محور الفواصل.

2-بين من أجل كل عدد طبيعي n أن: $1\le u_n<\alpha$

3-بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

4-استنتج أن (u_n) متقاربة وبين أن:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\alpha$$

الحل

أ-f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$

أ-1- دراسة تغيرات f

النهايات

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[3-\frac{4}{e^x+1}\right]=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[3-\frac{4}{e^x+1}\right]=3-4=-1$$

-المشتقة واشارتها

$$f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}>0$$

ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

-جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1 ↗	3

2-المستقيمان المقاربان ومعادلتهما:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$

ومنه المستقيمان المقاربان معادلتهما على الترتيب $y=3;\ y=-1$

3-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω

$f'(x)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f''(x)=\frac{-4e^{3x}+4e^x}{(e^x+1)^4}=0$$

$$\Rightarrow -4e^{3x}+4e^x=0$$

$$\Rightarrow 4e^x(-e^{2x}+1)=0$$

$$\Rightarrow e^{2x}=+1\Rightarrow x=0$$

-إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−

$f''(x)$ تنعدم عند 0 وتغير إشارتها ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند النقطة $\omega(0,1)$

-معادلة المماس

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$
$y=x+1$

4-g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=f(x)-x$

4-أ- دراسة تغيرات g

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=+\infty$$

-لأن $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-\infty$$

-لأن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$

-المشتقة

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x)-1\\&=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}-1\\&=\frac{4e^x-(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{4e^x-e^{2x}-2e^x-1}{(e^x+1)^2}\\&=\frac{-e^{2x}+2e^x-1}{(e^x+1)^2}\end{aligned}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

(لأن $(e^x+1)^2>0$)

ندرس إشارة $(-e^{2x}+e^x-1)$

نضع $Z=e^x$ تصبح $-Z^2+2Z-1$

نحل المعادلة $Z^2+2Z-1=0$

$\Delta=0$

ومنه $Z_0=1$ أي $e^x=1$ ومنه $x=0$

$$g'(x)=\frac{-e^x+2e^x-1}{(e^x+1)^2}=-\frac{(e^x-1)^2}{e^x+1}\leq 0$$

أي $g'(x)\leq 0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $-$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

4-ب- البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2,7<\alpha<2,8$

الدالة مستمرة ومتناقصة على المجال $]2.7\,;2.8[$

و $\begin{cases} g(2,7)=0.04 \\ g(2,8)=-0.02 \end{cases}$

أي $g(2,7)\times g(2,8)<0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على $]2,7;2,8[$

5-أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$

$$f(x)=0\Rightarrow 3-\frac{4}{e^x+1}=0$$

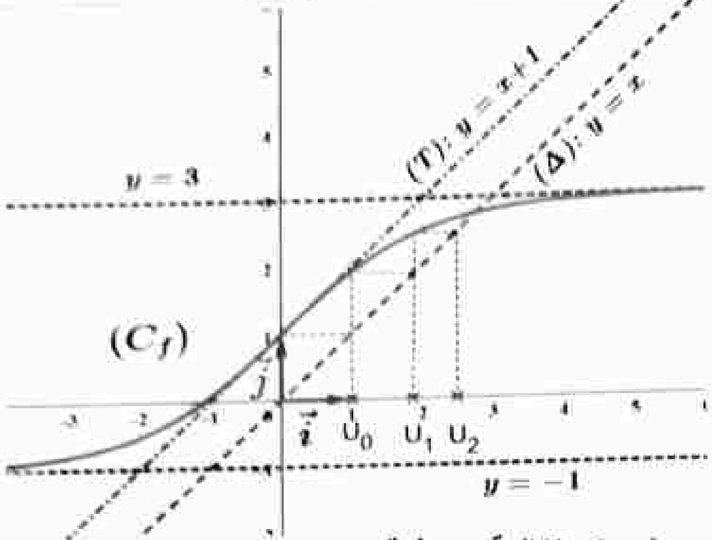
$$\Rightarrow 3=\frac{4}{e^x+1}$$

$$\Rightarrow 3e^x+3=4$$

$$\Rightarrow 3e^x=1$$

$$\Rightarrow e^x=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$$

5-ب-رسم المماس و (Δ) و (C_f)



ب- (u_n) متتالية معرفية بـــ $u_0=1$ ومن اجل n طبيعي $u_{n+1}=f(u_n)$

ب-1- تمثيل الحدود U_0، U_2، U_1

ب-2-البرهان أن $1\leq u_n<\alpha$

من اجل $n=0$ $u_0=1$ ومنه $1\leq u_0<\alpha$

نفرض أن $1\leq u_n<\alpha$

نبرهن من اجل $n+1$ $u_{n+1}=f(u_n)$

لدينا $1\leq u_n<\alpha$ من الفرضية السابقة

$f(1)\leq f(u_n)<f(\alpha)$

لأن f متزايدة تماما

$f(1)\leq u_{n+1}<f(\alpha)$

$1<1,92\leq u_{n+1}<f(\alpha)$

لأن $f(1)=1,92$ و $f(\alpha)=\alpha$

ومنه فإن الفرضية صحيحة أي $1\leq u_n<\alpha$

ب-3-البرهان أن (u_n) متزايدة تماما

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=g(u_n)$

بما أن $1\leq u_n<\alpha$ فإن من جدول تغيرات $g(x)$

$g(u_n)>0$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ب-4-استنتاج أن (u_n) متقاربة

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد α ومنه فهي متقاربة

أي $\lim u_{n+1}=\lim u_n=l$

أي $f(l)=l$

ومنه $l=\alpha$ و $\lim u_n=\alpha$

74. بكالوريا 2010 تقني رياضي

اليوتيوب: الدالة الأسية + المناقشة البيانية + التركيب باك 2010 تقني رياضي

الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة:

$$f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

2-احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها

3-بين أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها.

4-أ- (D) و (D') المستقيمان اللذان معادلتاهما على الترتيب $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$

-بين أن (D) و (D') مقاربان للمنحنى (C_f) ، ثم حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما.

4-ب- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_0 و x_1 حيث $0.9 < x_0 < 0.91$ و $-1.66 < x_1 < -1.65$

4-جـ-احسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $f(x) + f(-x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

4-د-ارسم (D)- و (D') و(C_f)

4-هـ- m عدد حقيقي(D_m)المستقيم المعرف بالمعادلة $y = x + m$

ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

5-نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$

ادرس تغيرات الدالة g دون حساب $g(x)$ بدلالة x

الحل

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$بـ: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$

1- تعيين a و b حيث

$$f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{3ax(e^x - 1) + b}{3(e^x - 1)}$$

$$f(x) = \frac{3axe^x - 3ax + b}{3(e^x - 1)}$$

بالمطابقة نجد $a = 1 \quad b = -4$

2-حساب النهايات

$\lim f(x) = -\infty$

$\lim f(x) = +\infty$

$\lim f(x) = -\infty$

$\lim f(x) = +\infty$

3-البرهان أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x - 1)^2} > 0$$

لأن $e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4-أ- البرهان أن (D) و (D') م مقاربان لـ (C_f)

-أولا (D) ذو المعادلة $y = x$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{4}{3(e^x - 1)}\right] = 0$$

ومنه: (D) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

(C_f) أسفل (D) لأن في جوار $+\infty$

$$f(x) - x = -\frac{4}{3(e^x - 1)} < 0$$

-ثانيا (D') ذو المعادلة $y = x + \frac{4}{3}$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right)\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[-\frac{4}{3(e^x - 1)} - \frac{4}{3}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-4 - 4(e^x - 1)}{3(e^x - 1)}\right]$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[-\frac{4e^x}{3(e^x - 1)}\right]$$

$$= \frac{0}{-3} = 0$$

ومنه: (D') مستقيم مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $-\infty$

(C_f) فوق (D') في جوار $-\infty$

لأن لما x يؤول إلى $-\infty$ يكون:

$$f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right) = -\frac{4e^x}{3(e^x - 1)} > 0$$

4-ب- البيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين x_0 و x_1

لدينا الدالة f متزايدة تماما ومستمرة على $\mathbb{R}^*$

ومنه فهي متزايدة تماما ومستمرة على المجالين $]-1,66;-1,65[$ و $]0,9;0,91[$

$$\begin{cases} f(0.91) = -0.013 \\ f(0.9) = 0.011 \end{cases}$$

مع

$$f(0.9) \times f(0.91) < 0$$

و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا x_0 حيث $0.9 < x_0 < 0.91$

وأيضا

$$\begin{cases} f(-1.65) = 0.00026 \\ f(-1.66) = -0.013 \end{cases}$$

و

$$f(-1.66) \times f(-1.65) < 0$$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا x_1 حيث $-1.66 < x_1 < -1.65$.

4-ج- حساب $f(x)+f(-x)$

$$f(x)+f(-x) = x - \frac{4}{3(e^x-1)} - x - \frac{4}{3(e^{-x}-1)}$$

$$= -\frac{4}{3(e^x-1)} - \frac{4}{\frac{3(1-e^x)}{e^x}}$$

$$= -\frac{4}{3(e^x-1)} - \frac{4e^x}{3(1-e^x)}$$

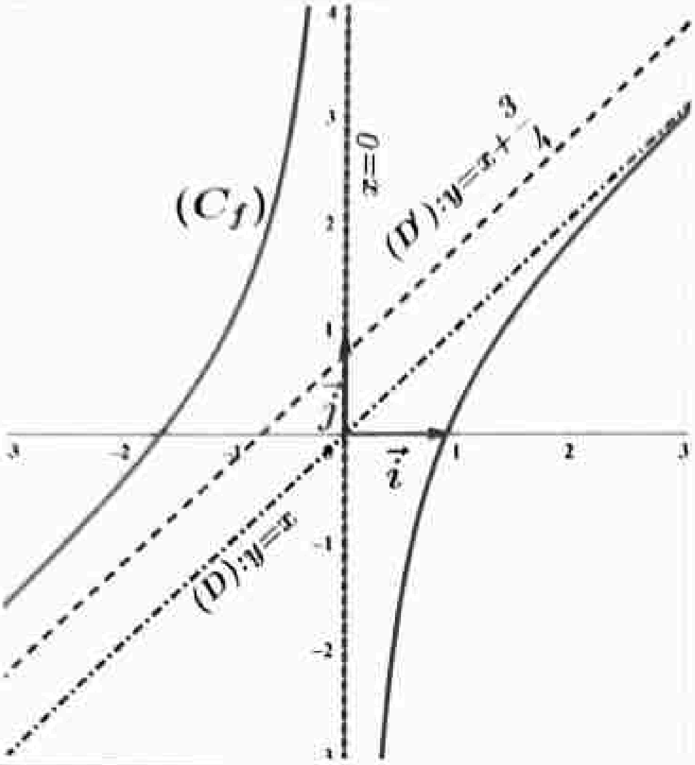
$$= \frac{4}{3}\frac{e^x-1}{e^x-1}$$

$$= \frac{4}{3}$$

التفسير الهندسي للنتيجة

(C_f) يقبل مركز تناظر في النقطة $\omega\left(0;\frac{2}{3}\right)$ حسب قانون مركز التناظر

4-د- رسم (C_f) و (D) و (D')



4-هـ- المناقشة بيانيا لعدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

لما $m < 0$ أو $m > \frac{4}{3}$ للمعادلة حل وحيد

لما $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ لا يوجد حلول

5- g دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = [f(x)]^2$

- دارسة تغيرات g دون حساب $g(x)$

$g'(x) = 2f'(x)f(x)$

إشارة g' من إشارة الجداء $f'(x).f(x)$

لكن لدينا $f'(x) > 0$ ومنه نفس إشارة $f(x)$

لدينا من جدول التغيرات والأسئلة السابقة إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

x	0		x_0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

ومنه g متزايدة على $]x_0;+\infty[$

و متناقصة تماما على $]0;x_0[$

75. بكالوريا 2010 تقني رياضي

الموضوع: دراسة دالة جذرية شاملة باك 2010 تقني رياضي

الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

و (C_f)المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1-أ- أثبت أن الدالة f فردية

1-ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

1-جـ- ادرس تغيرات الدالة f

2-أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

2-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى(T) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

2-جـ- بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب لـ(C_f) بجوار$+\infty$، ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر.

2-د- ارسم (d) و(d') و (C_f) في المعلم السابق

3- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$كما يلي:

$$g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

3-أ- بين أن الدالة g زوجية

3-ب- انطلاقا من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

الحل

1- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

1-أ-البرهان أن f فردية من أجل $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right)$$

$$= -x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه الدالة f دالة فردية

1-ب- اثبات عبارة $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \left(-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

1-ب- دراسة تغيرات f

-النهايات

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

-جدول التغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2-أ- معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$

$$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$(T): y = 2x$$

1-ب- دراسة وضعية (C_f) و (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 2\right)$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x\right) = \frac{x\left(1-\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$\sqrt{x^2+1} \geq 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $x\left(1 - \sqrt{x^2+1}\right)$

لدينا $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \geq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{x^2+1} \leq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$1-\sqrt{x^2+1}$	$-$		$-$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (T)	تقاطع	(C_f) تحت (T)

لدينا المماس (T) يخترق (C_f) في المبدأ وتتغير وضعيته بالنسبة لـ (C_f) ومنه فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف في المبدأ $O(0,0)$

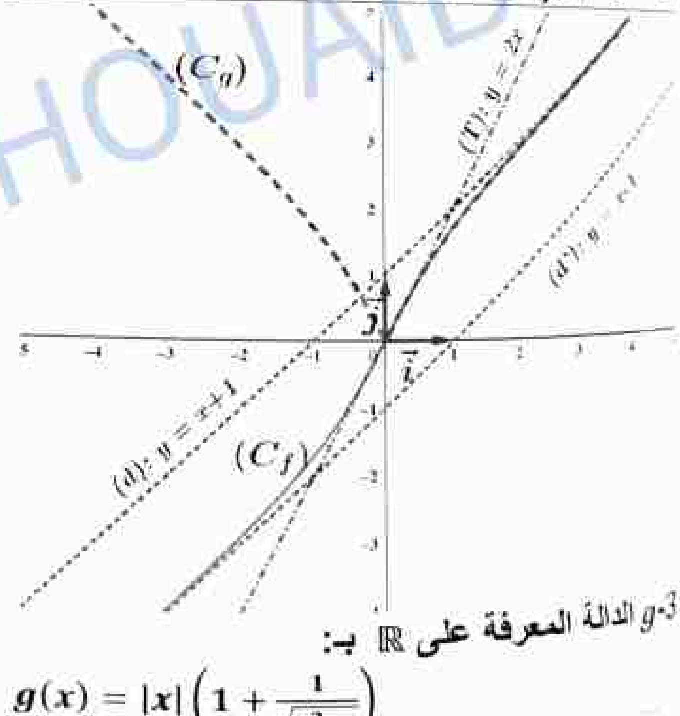
2-جـ البرهان أن (d) م م لــ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-y| = \lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x-1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}-1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}-1\right]$$
$$= 1-1=0$$

ومنه فإن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لــ (C_f) عند $+\infty$

بما أن الدالة فردية فإن التمثيل البياني يقبل بجوار $-\infty$ مستقيم مقارب آخر معادلته $y = x - 1$

2-د- رسم (C_f) و (d) و (d')



3- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = |x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

3-أ- بيان أن الدالة g زوجية

$$g(-x) = |-x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$
$$= |x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية

3-ب- رسم (C_g) انطلاقا من (C_f)

$$g(x)\begin{cases} x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = f(x) & ; x \geq 0 \\ -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x) & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_g) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

و يناظر (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما $x \leq 0$ لأن g دالة زوجية

-الرسم (انظر السؤال 2-د)

76. بكالوريا 2009 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة اسية +حساب المساحات باك 2009 تقني رياضي

الموضوع الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

و (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1- احسب $f(x)+f(-x)$ من أجل عدد حقيقي x ، ثم استنتج أن النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

2-ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$

3-بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

4-بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α بحيث: $-1.7 < \alpha < -1.6$

5-ارسم (C_f)

6-بين من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أن: $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

7-احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلات $x = \alpha$ و $x = 0$ $y = x + 2$

بين أن $A(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$ ثم استنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$

الحل

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$

1- حساب $f(x)+f(-x)$

$$f(x)+f(-x) = x+\frac{2}{e^x+1} - x + \frac{2}{e^{-x}+1}$$

$$= \frac{2}{e^x+1} + \frac{2}{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

$$= \frac{2+2e^x}{e^x+1} = 2$$

ومنه حيث قانون مركز التناظر النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

قانون مركز التناظر: تكون النقطة $\omega(a,b)$ مركز تناظر إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

$$f(2a-x)+f(x)=2b$$

2-دراسة تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

-استنتاج جدول تغيرات على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3-البرهان أن (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مستقيم مقارب بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{2}{e^x+1}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1} = 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y=x$ م م لـ (C_f) بجوار $+\infty$

-حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{e^x+1}-2\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{2e^x}{e^x+1}\right]$$

$$= 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x+2$ م م لـ (C_f) عند $-\infty$

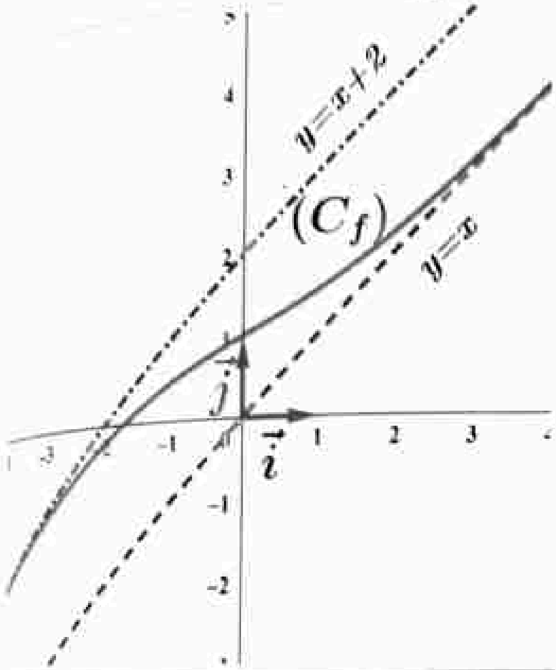
4-البرهان أن للمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α

f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1,7;-1,6[$

و $\begin{cases} f(-1.6) = 0.064 \\ f(-1.7) = -0.0089 \end{cases}$

و $f(-1.7)\times f(-1.6) < 0$ ومنه حسب مبر هنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α حيث: $-1,7 < \alpha < -1,6$

5-رسم (C_f)



6-برهان أن $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$$x+\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1} = x + \frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

$$= x + \frac{2}{1+e^x} = f(x)$$

7-حساب $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \int_\alpha^0 (y - f(x))dx$$

$$= \int_\alpha^0 \left(2 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}dx\right)$$

$$= 2[x+\ln(e^{-x}+1)]_\alpha^0$$

$$= 2[\ln 2 - \alpha - \ln(e^{-\alpha}+1)]$$

-البرهان أن $A(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$

$$A(\alpha) = 2[\ln 2 - \alpha - \ln(e^{-\alpha}+1)]$$

$$= 2[\ln 2 - \ln e^{\alpha} - \ln(e^{-\alpha}+1)]$$

$$= 2[\ln 2 - (\ln e^{\alpha} + \ln(e^{-\alpha}+1))]$$

$$A(\alpha) = 2[\ln 2 - \ln(1+e^{\alpha})]$$

لدينا $f(\alpha) = 0$ أي

$$\alpha + \frac{2}{e^{\alpha}+1} = 0$$

$$\frac{2}{e^{\alpha}+1} = -\alpha \Rightarrow \frac{2+\alpha}{-\alpha} = e^{\alpha}$$

نعوض قيمة e^{α} في عبارة $A(\alpha)$ السابقة

$$A(\alpha) = 2\left[\ln 2 - \ln\left(1 - \frac{2+\alpha}{\alpha}\right)\right]$$

$$= 2\left[\ln 2 - \ln\left(\frac{2}{-\alpha}\right)\right]$$
$$= 2[\ln 2 - \ln 2 + \ln(-\alpha)]$$
$$= 2\ln(-\alpha)$$

-استنتاج حصر لـ $A(\alpha)$

بما أن $-1,7 < \alpha < -1,6$

فإن $2\ln(1,6) < A(\alpha) < 2\ln(1,7)$

.77 بكالوريا 2009 تقني رياضي

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية رقم 20 باك تقني رياضي 2009

الموضوع الثاني

1- g الدالة المعرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = 2x + \ln x$$

أ-احسب نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة g

جـ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ فإن $g(x) \neq 0$

2- لتكن f دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{6\ln x}{2x + \ln x}$$

أ- بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل

$$f(x) = \frac{6\frac{\ln x}{x}}{2 + \frac{\ln x}{x}}$$

من أجل $x \in [1;+\infty[$

ب-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

جـ ادرس اتجاه تغير الدالة f

د-شكل جدول تغيرات الدالة f، ماهي قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متمايزين؟

هـ-جد معادلة للمماس (Δ_1) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1 حيث (C_f) يرمز إلى التمثيل البياني للدالة f في المعلم م م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3-نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = f(e^x)$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ-شكل جدول تغيرات الدالة h

ب- جد معادلة للمماس (Δ_2) للمنحنى (C_h) عند النقطة التي فاصلتها 1.

جـ ارسم كلا من (Δ_1) و (Δ_2) ، (C_f) و (C_h) في نفس المعلم السابق.

الحل

g دالة معرفة على $[1;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = 2x + \ln x$$

1-أ-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x + \ln x) = +\infty$$

1-ب- دراسة اتجاه تغير g

$$g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$$

من أجل $x \in [1;+\infty[$

$g'(x)$ موجب على $[1;+\infty[$ ومنه الدالة g متزايدة تماما

و $g(1) = 2$

x	1 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$2 \nearrow +\infty$

1-جـ - برهان أن $g(x) \neq 0$

من جدول التغيرات لدينا: g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

و $g(x) \geq 2$ ومنه $g(x) \neq 0$

2-أ- f معرفة على $[1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{6\ln x}{2x + \ln x}$$

2-أ- برهان أن $f(x) = \frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$

$$\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}} = \frac{\frac{6\ln x}{x}}{\frac{2x+\ln x}{x}} = \frac{6\ln x}{2x+\ln x} = f(x)$$

2-ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{6\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}\right]$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{0}{2} = 0$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ م م أفقي لـ (C_f)

2-جـ دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{6}{x}\right)(2x+\ln x)-\left(2+\frac{1}{x}\right)6\ln x}{(2x+\ln x)^2}$$

$$=\frac{12x(1-\ln x)}{x(2x+\ln x)^2}$$

من أجل $x\in[1;+\infty[$ لدينا $\frac{12x}{x(2x+\ln x)^2}>0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln x$

يكون $1-\ln x>0$ إذا $\ln x<1$

ومنه $x<e$ أي

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة على $[1;e]$

ومتناقصة على $[e;+\infty[$

2-د- جدول تغيرات

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{6}{2e+1}$	$\searrow$	0

-قيم k حتى تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين

من جدول التغيرات تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين إذا وفقط إذا كان: $0<k<f(e)$

2-هـ معادلة (Δ_1) عند 1

$$(\Delta_1): y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$=3(x-1)+0$$
$$=3x-3$$

3- h دالة معرفة على $[1;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=f(e^x)$$

3-أ- جدول تغيرات h

لدينا $h(x)$ قابلة للاشتقاق على $[1;+\infty[$

$$h(x)=f(e^x)=\frac{6x}{2e^x+x}$$

ومنه $h'(x)=e^xf'(e^x)$

$e^x>0$ ومنه إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(e^x)$

$f'(e^x)>0$ معناه $e>e^x>1$

ومنه: $1>x>0$

$f'(e^x)<0$ معناه $e^x>e^1$ ومنه $x>1$

بما أن $h(x)$ معرفة على المجال $[1;+\infty[$

فإن $h'(x)<0$.

ومنه الدالة h متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

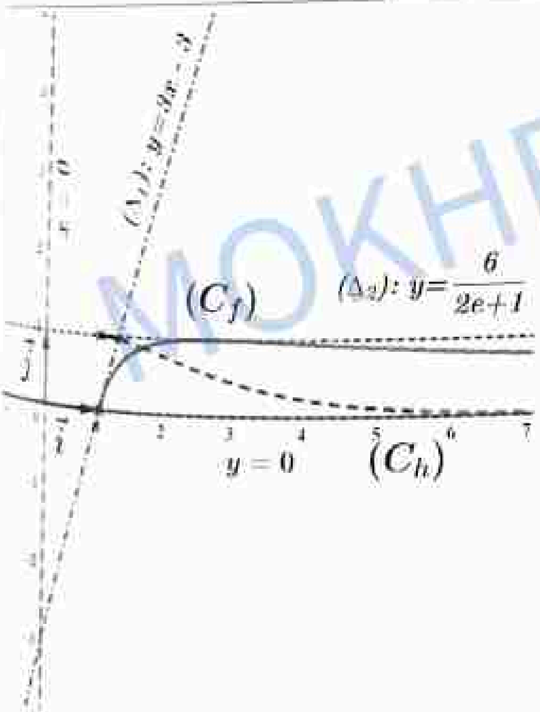
جدول التغيرات

x	1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$\frac{6}{2e+1}$	$\searrow$	0

3-معادلة المماس (Δ_2) لـ (C_h) عند النقطة ذات الفاصلة 1

$$(\Delta_2): y=h'(1)(x-1)+h(1)$$
$$h'(1)=ef'(e)=0$$
$$h(1)=\frac{6}{2e+1}$$
$$(\Delta_2): y=\frac{6}{2e+1}$$

3-جـ الرسم



جزء دوال شعبة الرياضيات

78. بكالوريا 2021 الرياضيات

الموضوع الأول

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$$

1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $1.53 < \alpha < 1.54$

ب- احسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x:
$$f'(x) = g(x)$$

ب- استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; \alpha]$

جـ شكل جدول تغيرات الدالة f

3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$

ب- ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

جـ بين أن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تحقق:
$$2.03 < \beta < 2.04$$

د- بين أن (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لـ (Δ) (لا يطلب كتابة معادلة لـ (T) و (T'))

4) ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C) على $]-\infty; 1 + \sqrt{2}]$

(نأخذ: $\alpha \approx 1.53$ ، $f(\alpha) \approx -2.3$
$f(\sqrt{3}) \approx -2.1$ ، $f(-\sqrt{3}) \approx -3.2$)

5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = f[\ln(x)]$

أ- احسب $\lim_{x\to 0} h(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

الحل

1-I -دراسة تغيرات الدالة g :

أ-النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} [(x^2 - 3)e^x + 3] = 3$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} [xe^x] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [(x^2 - 3)e^x + 3] = +\infty$$

ب- دراسة اتجاه التغير:

- حساب المشتقة:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة مهما يكن $x \in D_g$ فإن :

$$g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $x^2 + 2x - 3$
لأن $e^x > 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(-3)$$
$$= 16$$
$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$$
$$x_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$$

إشارة $g'(x)$:

$g'(x) > 0$ على $]-\infty; -3[$ و $]1; +\infty[$

و $g'(x) < 0$ على $]-3; 1[$

$g'(x) = 0$ من أجل $x = -3$ أو $x = 1$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; -3]$ و $[1; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-3; 1]$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-3		0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$		0	$+$	$+$
$g(x)$	3 ↗	$g(-3)$	↘	0	$g(1)$	↗ 0	$+\infty$

2-أ تبيين أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,53 < \alpha < 1,54$

لدينا g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ فهي مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1.53 ; 1.54]$

و
$$\begin{cases} g(1.53) = -0.043 \\ g(1.54) = 0.07 \end{cases}$$

أي $g(1.53) \times g(1.54) < 0$

ومنه حسب م. ق. م. فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}53 < \alpha < 1{,}54$

2- ب- حساب $g(0)$ استنتاج إشارة $g(x)$

$g(0) = 0$:

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II-1- حساب نهايات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} [3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x] = +\infty$$

2-أ-البرهان ان $f'(x) = g(x)$

مهما يكن $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = 3 + ((2x - 2)e^x + e^x(x^2 - 2x - 1))$$
$$= 3 + 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x - ex$$
$$= (x^2 - 3)e^x + 3$$
$$= g(x)$$

2-ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f'(x) = g(x)$ أي أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

من السؤال (I-2-ب-) تبين أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0; \alpha]$

2-ج - جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3-أ-تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to-\infty} [3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x - 3x - 1]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x - 1)e^x = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

3-ب-وضعية (C) بالنسبة لـ (Δ)

لدراسة الوضعية ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = (x^2 - 2x - 1)e^x$$

إشارة الفرق من إشارة $x^2 - 2x - 1$ لأن $0 <$ دائما

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8$$
$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$$
$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C) فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) تحت (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) فوق (Δ)	

3-جـ-البرهان أن (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $2.03 < \beta < 2{,}04$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha ; +\infty[$ وبالتالي هي مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[2.03 ; 2.04]$

و $\begin{cases} f(2.03) = -0.06 \\ f(2.04) = 0.06 \end{cases}$

أي $f(2{,}03) \times f(2{,}04) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث

$$2{,}03 < \beta < 2{,}04$$

3-د-البرهان أن (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لـ (Δ)

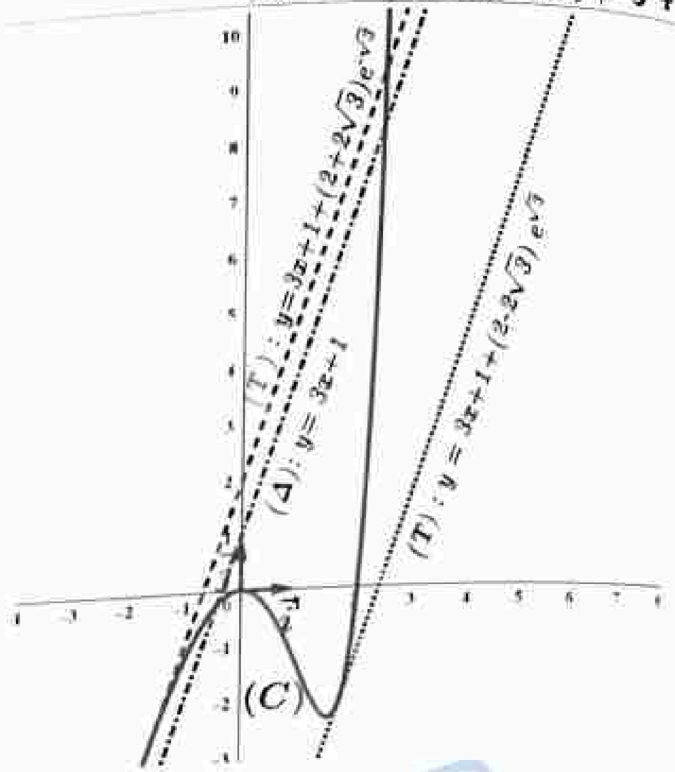
أي $f'(x) = 3$

$$(x^2 - 3)e^x + 3 = 3$$
$$(x^2 - 3)e^x = 0$$
$$x^2 = 3$$

وعليه $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$

ومنه (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين (Δ) عند الفاصلة $x = \sqrt{3}$ ، $x = -\sqrt{3}$

4-رسم (Δ) و (T) و (T') و (C)



5-أ-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(\ln x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

5-ب-دراسة اتجاه تغير الدالة h :

مهما يكن $x \in D_f$ فإن $h'(x) = \frac{f'(\ln x)}{x}$ أي

$h'(x) = \frac{g(\ln x)}{x}$

$h'(x) = 0$ أي $g(\ln x) = 0$

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ و $g(0) = 0$

ومنه $\ln x = \alpha$ أو

$\ln x = 0$

أو $\begin{cases} x = e^{\alpha} \\ x = 1 \end{cases}$

وعليه الدالة h متزايدة تماما على كل من المجالين $]0;1]$ و $[e^{x};+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[1;e^{\alpha}]$

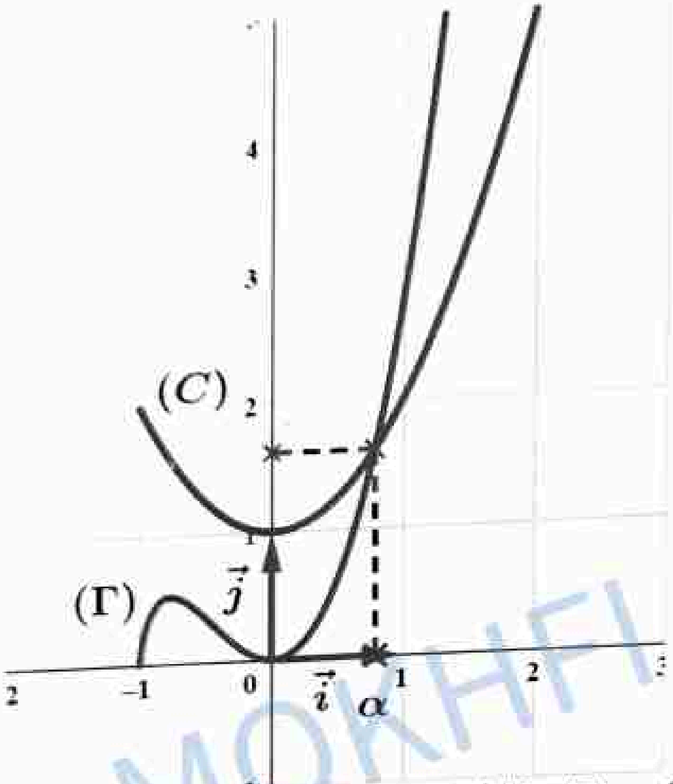
جدول التغيرات :

x	0		1		e^{α}		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$f(0)$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

79. بكالوريا 2021 الرياضيات

الموضوع الثاني

I) المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.
في الشكل المقابل (C) و (Γ) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين المعرفتين على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $x \mapsto 1+x^2$ و $x \mapsto 2x(1+x)\ln(1+x)$



(C) و (Γ) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0.78 < \alpha < 0.79$

الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:
$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

1) بقراءة بيانية، حدد حسب قيم x من المجال $]-1;+\infty[$ وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ)

2) استنتج حسب قيم x من المجال $]-1;+\infty[$ إشارة $g(x)$.

II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

(الوحدة: $2cm$)

1)أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ وبين أن:
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ب- فسر النهايتين هندسيا.

2) أ- بين من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـ - بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

د- اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند المبدأ O.

3) ارسم (T) و (C_f)

(نأخذ: $f(\alpha) \approx 0.36$)

4) الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = \frac{\ln(1+|x|)}{1+x^2}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- بين أن الدالة h زوجية.

ب- بين أن الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ثم فسر ذلك بيانيا.

جـ- اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

الحل

1-تحديد وضعية (C) بالنسبة الى (Γ) من البيان

x	-1	α	$+\infty$
الوضعية	(C) فوق (Γ)	(C) يقطع (Γ)	(C) اسفل (Γ)

2-استنتاج اشارة $g(x)$

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

II-1-أ-حساب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ والبرهان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} = -\infty$$

لأن

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (1+x^2) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1+x}{(1+x^2)}\right] \times \left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right] = 0$$

لأن

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right] = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1+x}{1+x^2}\right] = 0 \end{cases}$$ و

1-ب-تفسير النتيجة هندسيا

أي أن (C_f) يقبل مستقيمان مقاربان للمنحنى معادلاتهما $x = -1$ و $y = 0$

2-أ- البرهان أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$

مهما يكن $x \in D_f$ فإن :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}(1+x^2) - 2x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)}{1+x}}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(1+x^2)^2}$$

2-ب-دراسة اتجاه التغير وجدول تغيرات الدالة f :

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

لأن $(x+1)(1+x^2)^2 > 0$

على المجال $]-1;+\infty[$

وبالتالي : $f'(x) \geq 0$ على المجال $]-1;\alpha]$ أي الدالة f متزايدة تماما على هذا المجال

$f'(x) < 0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ أي الدالة f متناقصة تماما على هذا المجال

جدول التغيرات :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

2-جـ-البرهان أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ واستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

نعلم أن $g(\alpha) = 0$ أي

$$1+\alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha) = 0$$

أي $1+\alpha^2 = 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha) \dots (1)$

ولدينا (2) $f(\alpha)=\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}$

بتعويض (1) في (2) نجد :

$$f(\alpha)=\frac{\ln(1+\alpha)}{2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}$$

ومنه : $f(\alpha)=\frac{1}{2\,\alpha(1+\alpha)}$

إيجاد حصرا لـ $f(\alpha)$:

لدينا $0,78<\alpha<0,79$

أي (1) .... $1,56 < 2\,\alpha < 1,58$

و (2) .... $1,78<1+\alpha<1,79$

بضرب (1) و (2) نجد:

$2,77 < 2\,\alpha(1+\alpha) < 2,82$

أي $\frac{1}{2,82} < \frac{1}{2\,\alpha(1+\alpha)} < \frac{1}{2,77}$

$0,35 < \frac{1}{2\,\alpha(1+\alpha)} < 0,36$

ومنه $0,35<f(\alpha)<0,36$

2-د-معادلة لـ (T) مماس للمنحنى (C_f) عند المبدأ O

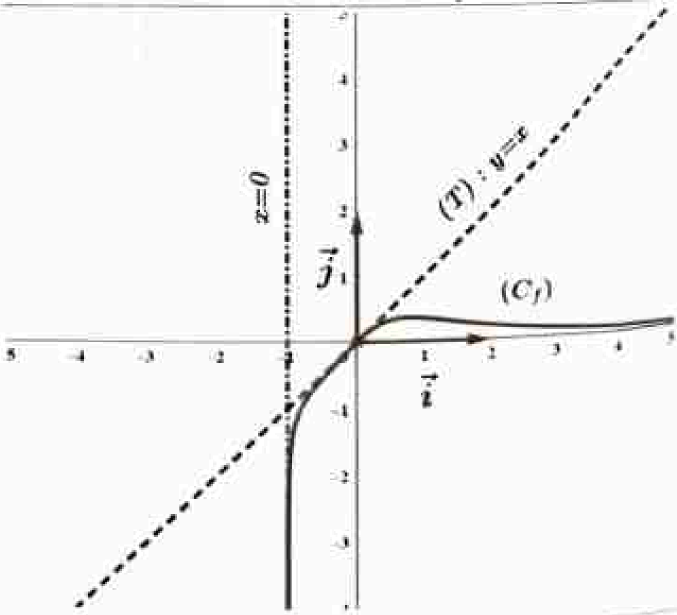
$$y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

لدينا $f'(0)=1$ و $f(0)=0$ ومنه :

$$y=1(x-0)+0$$

ومنه $y=x$

3-رسم (T) و (C_f):



4-أ-تبيين أن الدالة h زوجية :

من أجل $x\in D_h$ و $-x\in D_h$:

$$h(-x)=\frac{\ln(1+|-x|)}{1+(-x)^2}=\frac{\ln(1+|x|)}{1+(x)^2}=h(x)$$

ومنه الدالة h دالة زوجية

4-ب-تبيين أن الدالة h غير قابلة للإشتقاق عند الصفر ثم تفسير ذلك بيانيا :

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{\ln(1+|x|)}{x(1+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{-\ln(1-x)}{-x}\times\frac{1}{(1+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{-\ln(1-x)}{-x}\right]\times\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{1}{(1+x^2)}\right]$$

بوضع $t=-x$

$x\overset{<}{\to}0$ أي $t\overset{>}{\to}0$

ومنه

$$=\lim_{t\overset{>}{\to}0}\left[\frac{-\ln(1+t)}{t}\right]\times\frac{1}{(1+x^2)}=-1$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x(1+x^2)}\right]$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{(1+x^2)}\right]=1$$

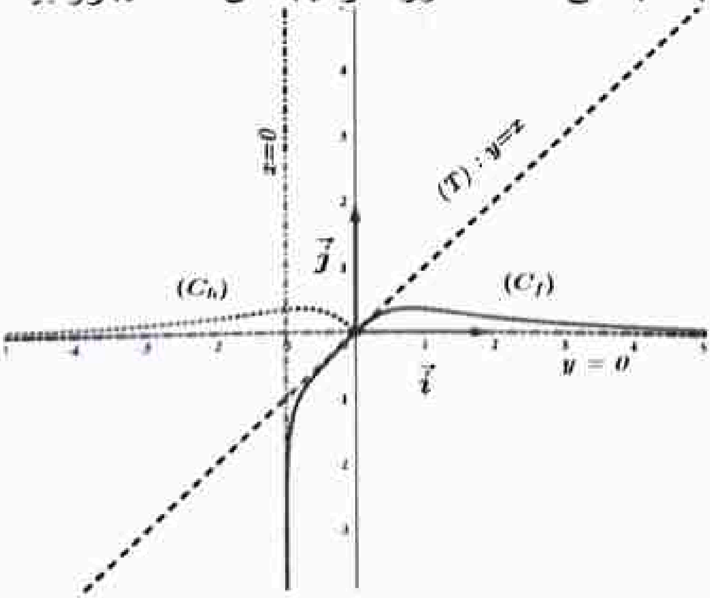
ومنه h غير قابلة للإشتقاق عند الصفر

لأن $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h(x)}{x}\neq\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)}{x}$

التفسير الهندسي: وجود نصفي مماسين في المبدأ

4-جـ-شرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ورسمه

(C_h) ينطبق على (C_f) على المجال $]0;+\infty[$ لأن $h(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=f(x)$ ثم نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة الى حامل محور التراتيب لأن الدالة h زوجية



.80. بكالوريا 2020 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية شاملة و رائعة باك 2020 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

I) الدالّتان العدديّتان g و h معرفتان على المجال $]-\infty;0]$ كما يلي: $g(x)=-2e^x$ و $h(x)=x(e^x+1)$، حدّد إشارة كلّ من $h(x)$ و $g(x)$ على المجال $]-\infty;0]$.

II) الدالّة العدديّة f معرّفة على المجال $]-\infty;0]$:

$$f(x)=(x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-\infty;0]$: $f'(x)=h(x)+g(x)$

1-ب) استنتج اتّجاه تغيّر الدالّة f على المجال $]-\infty;0]$.

2) احسب $f(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالّة f

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلًا وحيدا α في المجال $]-\infty;0]$ ثمّ تحقّق أنّ: $-1.5<\alpha<-1.4$

4) (P) هو التمثيل البياني للدالّة: $x\longmapsto\frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty;0]$.

4-أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيًا.

4-ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (P) و (C_f).

4-ج) أنشئ (P) ثمّ المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;0]$.

5) ليكن m وسيطا حقيقيًا، ناقش بيانيًا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $|f(x)|=e^m$ على المجال $]-\infty;0]$.

الحل

1 تحديد إشارة $g(x)$ و $h(x)$ على المجال $]-\infty;0]$:

لدينا: $g(x)=-2e^x$

$e^x>0$ ومنه $-2e^x<0$ أي $g(x)<0$ ولدينا $e^x+1>0$ و $x\le0$ على المجال $]-\infty;0]$

ومنه $x(e^x+1)\le0$

أي $h(x)\le0$.

1-أ البرهان من أجل كل x من المجال $]-\infty;0]$ أن: $f'(x)=h(x)+g(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0]$

$$f'(x)=1e^x+e^x(x-3)+\frac{1}{2}(2x)$$
$$=e^x+xe^x-3e^x+x$$
$$f'(x)=-2e^x+x(e^x+1)$$

ومنه $f'(x)=g(x)+h(x)$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;0]$:

بما أن $f'(x)=h(x)+g(x)$

حيث $g(x)<0$ و $h(x)\le0$

ومنه $f'(x)<0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$

2- حساب $f(0)$:

$$f(0)=(0-3)e^0+\frac{1}{2}(0)^2=0$$

حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left((x-3)e^x+\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^x-3e^x+\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-3

3- البرهان أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α بحيث $\alpha\in]-\infty;0]$:

بما أن الدالة f مستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]-\infty;0]$

و $f(0)=-3$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\times g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α حيث $\alpha\in]-\infty;0]$

- التحقق أن $-1.5 < \alpha < -1.4$:

$$\begin{cases} f(-1.5) = 0.12 \\ f(-1.4) = -0.1 \end{cases}$$

$$f(-1.5) \times f(-1.4) < 0$$

ومنه: $-1.5 < \alpha < -1.4$

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α

4-أ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \frac{1}{2}x^2$:

$$\lim_{x\to-\infty} (x-3)e^x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x - 3e^x$$

$$= 0$$

- التفسير البياني:

(C_f) يقبل منحنى مقارب (P) معادلته $y = \frac{1}{2}x^2$ عند $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي لـ (P) و (C_f) :

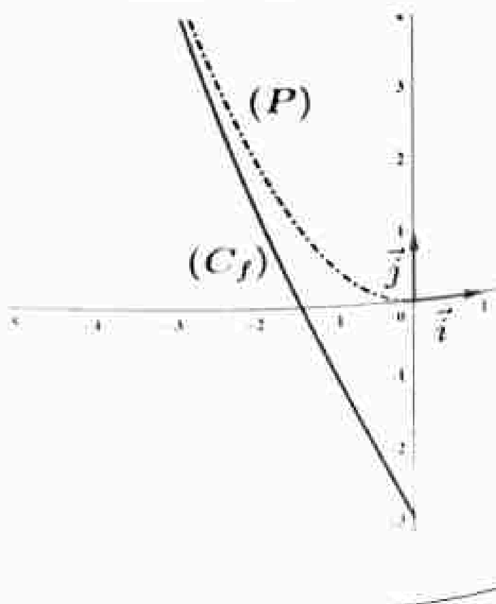
ندرس إشارة الفرق $f(x) - \frac{1}{2}x^2$ على المجال $]-\infty; 0]$.

$$f(x) - \frac{1}{2}x^2 = (x-3)e^x$$

$e^x > 0$ أي إشارة الفرق من إشارة $x - 3$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	3 $\quad$ $+\infty$
$x-3$	$-$ $\quad$ $-$	0 $\quad$ $+$
$f(x) - \frac{1}{2}x^2$	$-$	
الوضعية	(C_f) يقع تحت (P)	

ج- إنشاء (P) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$



5- المناقشة البيانية:

- الحلول البيانية للمعادلة $|f(x)| = e^m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = e^m$ (أفقية).

ومنحنى الدالة $|f|$ يقع فوق محور الفواصل $e^x > 0$.

-1

$0 < e^x \leq 3$ أي $\ln e^m \leq \ln 3$

$m \ln e \leq \ln 3$ أي $m \leq \ln 3$

للمعادلة حلان متمايزان.

-2

$e^m > 3$ أي $\ln e^m > \ln 3$

$m > \ln 3$ للمعادلة حل وحيد.

81. بكالوريا 2020 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شيقة وقيمة باك 2020 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

الدالّة العدديّة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)$$

ليكن (C_f) المنحنى البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$، ثمّ بيّن أنّ:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

1-ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

1-جـ) استنتج اتّجاه تغيّر الدالّة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

2) نعتبر الدالّة g المعرّفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$

2-أ) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

2-ب) بيّن من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0; +\infty[$ أن: $g'(x) = \frac{-9x^2+8}{(\sqrt{9x^2+1})(3+\sqrt{9x^2+1})}$

2-جـ) ادرس اتّجاه تغيّر الدالّة g على المجال $[0; +\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(نأخذ $g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \approx 0.8$)

3-أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلًّا وحيدًا α في المجال $]\frac{2\sqrt{2}}{3}; +\infty[$ ثمّ تحقّق أنّ:

$2.83 < \alpha < 2.84$.

3-ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3-جـ) حدّد الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$ والمنحنى (C_f) على المجال $]0;+\infty[$.

4) نعتبر الدالّة k المعرّفة على $]0;+\infty[$: $k(x)=\ln(6x)$ وليكن (γ) منحناها البياني في المعلم السابق.

4-أ) بيّن أنّ (γ) هو صورة منحنى الدالّة: $x\longmapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.

4-ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-k(x)]$ ثمّ فسّر النتيجة بيانيًا.

5-أ) بيّن أنّ الدالّة f فردية.

5-ب) أنشئ كلًا من (Δ)، (γ) و (C_f) على المجال $]0;+\infty[$ ثم استنتج إنشاء المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$.

الحل

1) الدالّة العدديّة f معرّفة على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)$$

1-أ-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)\right)=+\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)\right)=+\infty$

- البرهان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}(\ln(\sqrt{9x^2+1}+3x))$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\ln(\sqrt{9x^2+1}+3x))(\sqrt{9x^2+1}-3x)}{(\sqrt{9x^2+1}-3x)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1}-3x}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(-\ln(\sqrt{9x^2+1}-3x))$$

$$=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)=-\infty$

و $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$ مع $a>0$.

ب- البرهان أن مهما يكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)'}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{\frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}+1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{\frac{9x+3\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{9x^2+1}}}{\sqrt{9x^2+1}+3x}$$

$$=\frac{3\left(3x+\sqrt{9x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}\right)}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

ج- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}>0$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ ب:

$$g(x)=f(x)-x$$

أ- البرهان أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$:

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x^2(9+\left(\frac{1}{x^2}\right)}+3x\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(x\left[\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right]\right)-x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln x+\ln\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)-x\right)$$

$(\ln(a.b) = \ln a + \ln b)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x) - x + \ln\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)+\ln\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right)\right)$$

$$= -\infty$$

ب- البرهان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \frac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

لأن: $g(x) = f(x) - x$

$$g'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}} - 1$$

$$= \frac{(3-\sqrt{9x^2+1})(3+\sqrt{9x^2+1})}{3+\sqrt{9x^2+1}}$$

$$= \frac{9-(9x^2+1)}{(\sqrt{9x^2+1})(3+\sqrt{9x^2+1})}$$

$$g'(x) = \frac{-9x^2+8}{(\sqrt{9x^2+1})(3+\sqrt{9x^2+1})}$$

ج- دراسة اتجاه g على $[0;+\infty[$:

لدينا:

$$g'(x) = -\frac{9x^2+8}{(\sqrt{9x^2+1})(3+\sqrt{9x^2+1})}$$

$$(\sqrt{9x^2+1})(3+\sqrt{9x^2+1}) > 0$$

ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-9x^2+8)$

إذا كان $-9x^2+8=0$

$$-9x^2 = -8 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{-8}{-9}$$

$$x^2 = \frac{8}{9}$$

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ x_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$		0		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+8$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g'(x)$						$+$	0	$-$	

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right[$ ومتناقصة تماما على المجال $\left]\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$.

- جدول التغيرات:

x	0		$\frac{2\sqrt{2}}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

$$g(0) = f(0) = \ln\left(\sqrt{9(0)+1}+0\right) = 0$$

3-أ- البرهان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};-\infty\right[$:

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$.

$$\begin{cases} g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 0.8 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

$$g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \lim_{x\to+\infty} g(x) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};-\infty\right[$.

- التحقق أن $2.83 < \alpha < 2.8$:

$$\begin{cases} g(2.83) = 0.006 \\ g(2.84) = -0.001 \end{cases}$$

ومنه $2.83 < \alpha < 2.8$.

ب- تحديد وضعية (C_f) مع (Δ) :

لدينا $f(x) - x = g(x)$

و لدراسة وضعية المستقيم (Δ) مع (C_f) ندرس إشارة الفرق $g(x) = f(x) - x$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

4-أ-البرهان أن (γ) هو صورة الدالة $x \to \ln x$:

$$k(x) = \ln(6x)$$

نعلم أن $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$

مع $a > 0 \;;\; b > 0$

ومنه: $k(x) = \ln(6x) = \ln 6 + \ln x$

(γ) صورة منحنى الدالة $x \to \ln x$ بانسحاب شعاعه $V\binom{0}{\ln 6}$

ب- حساب $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - k(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right) - 6\ln(6x)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}+3x\right) - (\ln 6x + \ln 6)\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3x\right) - \ln x - \ln 6\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x) + \ln\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right) - \ln x - \ln 6\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+3\right) - \ln 6\right]$$

$$= \ln(\sqrt{9}+3) - \ln 6$$

$$= \ln 6 - \ln 6$$

$$= 0$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - k(x)] = 0$

التفسير الهندسي:

(γ) منحنى مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

5-أ- البرهان ان الدالة f فردية.

لدينا: $D_f = \mathbb{R}$

بما أن $x \in D_f \;;\; -x \in D_f$

$$f(-x) = ? -f(x)$$

$$f(-x) = \ln\left(\sqrt{9x^2+1}+3(-x)\right)$$

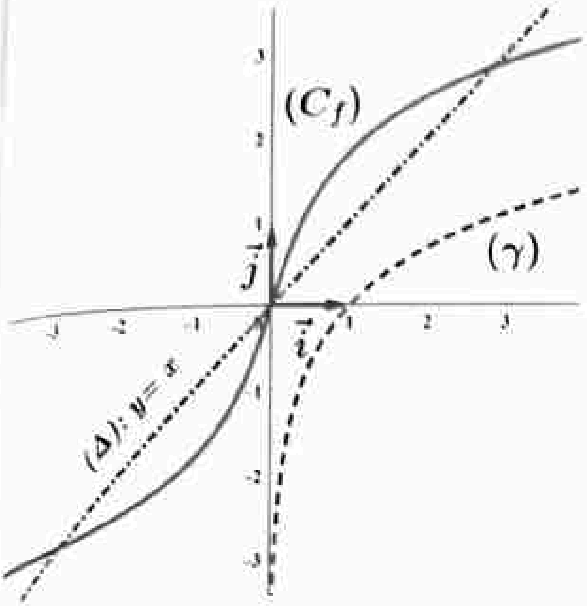
$$= \ln\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right) = -f(x)$$

لأن: $\left(-1 \times (f(x) = -\ln(\sqrt{9x^2+1}-3x)\right)$

$$-f(x) = \ln\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$$

ومنه f دالة فردية و (C_f) متناظر بالنسبة للمبدأ O.

5-ب- إنشاء (Δ) و (γ) و (C_f) :



.82 بكالوريا 2019 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2019 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

$f(x)$ الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x \;;\; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1- برهن أنه:

- إذا كان: $x > 1$ فإن: $1 - x - 2x\ln x < 0$
- إذا كان: $0 < x < 1$ فإن: $1 - x - 2x\ln x > 0$

2-أ- اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين ثم أكتب معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم.

ب- ادرس الوضع النسبي لـ: (Δ) و (C_f).

3-أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4-أ-اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) الموازي لـ (Δ) .

ب- اثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1;+\infty[$ حلا وحيدا α ثم تحقق أن: $1.76 < \alpha < 1.77$

جـ- اكتب معادلة المستقيم (d) الذي يوازي (Δ) ويشمل النقطة ذات الإحداثيين $(\alpha; 0)$.

د- ارسم كلا من (T) ، (Δ) و (d) ثم المنحنى (C_f) على المجال $[0; \alpha]$.

5- m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $x^2 lnx + m = 0$ في المجال $]0; \alpha]$

6- λ عدد حقيقي حيث: $0 < \lambda < 1$ نعتبر:

$$A(\lambda) = \int_\lambda^1 -x^2 lnx\, dx$$

أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ

ب- احسب $\lim_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

الحل

1- البرهان أنه إذا كان: $x > 1$ فإن:

$$\mathbf{1 - x - 2xlnx < 0}$$

لدينا $x > 1$

أي $lnx > 0$

$-2xlnx < 0 \quad (1)$

$1 - x < 0 \ldots\ldots (2)$

من (1) و (2) نجد: $1 - x - 2xlnx < 0$

2- إذا كان $0 < x < 1$ فإن: $1 - x - 2lnx > 0$

لدينا $0 < x < 1$

أي $lnx < 0$

$-2xlnx > 0 \ldots\ldots (1)$

$1 - x > 0 \ldots\ldots (2)$

من (1) و (2) نجد:

$$1 - x - 2xlnx > 0$$

أ- إثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - x^2 lnx}{x} = \lim_{x \to 0^+} (1 - xlnx) = 1$$

لأن $\lim_{x \to 0^+} (xlnx) = 0$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين حيث $f'(0) = 1$

- معادلة لنصف المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند مبدأ المعلم

$(\Delta): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$(\Delta): y = x$

ب- دراسة الوضع النسبي لـ: (Δ) و (C_f).

لدينا

$$f(x) - x = -x^2 lnx$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $-lnx$

جدول الوضعية

x	0		1		$+\infty$
$-lnx$		$+$	0	$-$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	تقاطع	(C_f) تحت (Δ)	

3-أ- حساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x(1 - xlnx) = -\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f

f قابلة لاشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = 1 - x - 2xlnx$$

-إشارة $f'(x)$: من السؤال 1

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0; 1]$

ومتناقصة تماما على $[1; +\infty[$

-جدول تغيرات $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4-أ كتابة معادلة (T)

(T) يوازي (Δ) أي لهما نفس الميل أي: $f'(x) = 1$ ومنه

$1 - x - 2xlnx = 1$

$x(1 + 2lnx) = 0$

ومنه $x = 0$

أو $1 + 2lnx = 0 \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$

ومنه $(T): y = x + \frac{1}{2}e^{-1}$

4-ب- إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1; +\infty[$ حلا وحيدا α

-لدينا $f(x)$ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

و $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ f(1) = 1 \end{cases}$

و $\lim_{x \to +\infty} f(x) \times f(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1; +\infty[$

-التحقق أن $1.76 < \alpha < 1.77$

$$\begin{cases} f(1.77) = -0.0188 \\ f(1.76) = 0.0089 \end{cases}$$

و $f(1.76) \times f(1.77) < 0$

ومنه $1.76 < \alpha < 1.77$

4-جـ-معادلة المستقيم (d)

-لدينا (d) يوازي (Δ) أي لهما نفس الميل $a = 1$

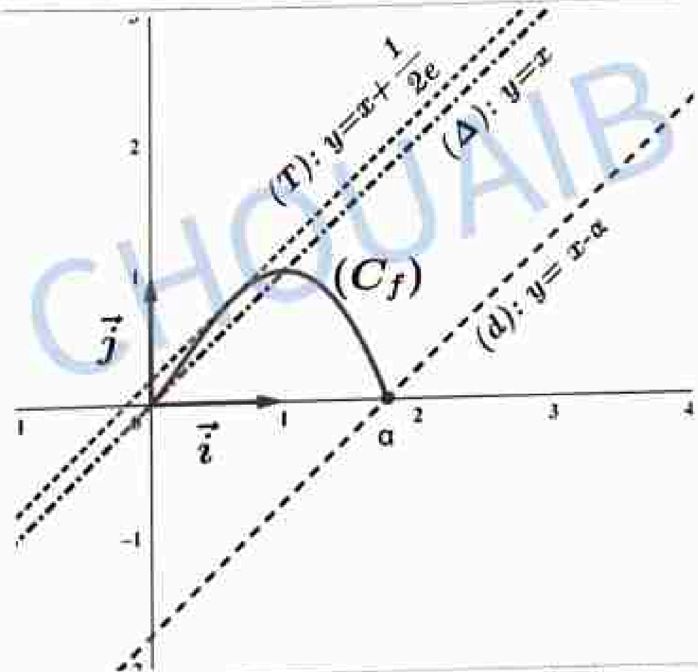
ومنه $(d): y = x + b$ حيث $b \in \mathbb{R}$

(d) يشمل النقطة $(\alpha\,;0)$ أي $0 = \alpha + b$ ومنه

$b = -\alpha$

ومنه $(d): y = x - \alpha$

رسم كلا من (T) ، (Δ) و (d) و (C_f) على $[0;\alpha]$.



5-المناقشة البيانية لحلول المعادلة في المجال $[0;\alpha]$

$x^2\ln x + m = 0$

$m = -x^2\ln x$

$x - x^2\ln x = m + x$

$f(x) = m + x$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f)مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$ ومنه

$m \in]-\infty; -\alpha[\cup]\frac{1}{2}e^{-1}; +\infty[$ ليس للمعادلة حل

$m \in [-\alpha; 0[$ للمعادلة حل وحيد

$m \in [0; \frac{1}{2}e^{-1}[$ للمعادلة حلان متمايزان

$m = \frac{1}{2}e^{-1}$ للمعادلة حل مضاعف

6-أ-حساب $A(\lambda)$

$A(\lambda) = \int_\lambda^1 -x^2\ln x\, dx$

نضع

$u(x) =$	$-\frac{x^3}{3}$	$u'(x) =$	$-x^2$
$v(x) =$	$\ln x$	$v'(x) =$	$\frac{1}{x}$

$A(\lambda) = \left[-\frac{x^3}{3}\ln x\right]_\lambda^1 - \int_\lambda^1 -\frac{x^2}{3}\, dx$

$A(\lambda) = \frac{\lambda^3}{3}\ln\lambda + \frac{1}{9} - \frac{\lambda^3}{9}\ (u.a)$

$A(\lambda) = \frac{1}{9}(3\lambda^3\ln\lambda + 1 - \lambda^3)\ cm^2$

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{1}{9}(3\lambda^3\ln\lambda + 1 - \lambda^3)\right) = \frac{1}{9}$

التفسير الهندسي :

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda) = \frac{1}{9}(u.a) = 1cm^2$

هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

83. بكالوريا 2019 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية بالوسيط الحقيقي باك 2019 رياضيات

الموضوع الثاني

I- f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_k(x) = (x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي ، (C_k)منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

2- احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$ (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k)

3-أ- احسب $f'_k(x)$ ثم حدد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k

3-ب- شكل جدول تغيرات الدلة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما

4-ناقش حسب قسم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_k) و (C_{k+1})

II- f الدلة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+1)^2e^{-2x}$

(C_f)منحناها البياني في م م م $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1- شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\frac{3}{2}; +\infty[$

2-أ- بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث $-1.28<\alpha<-1.27$

2-ب- عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا

3-g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$g(x)=(x+1)e^{-2x}$$

أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:
$$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$$

ثم استنتج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذان معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$

الحل

I- f_k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$$

1- إثبات أن أن جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين:

$$f_{k+1}(x)=f_k(x)$$
$$(x+1)^2e^{-(k+1)x}=(x+1)^2e^{-kx}$$
$$(x+1)^2e^{-kx-x}-(x+1)^2e^{-kx}=0$$
$$(x+1)^2e^{-kx}(e^{-x}-1)=0$$

وعليه:

$$\begin{cases}(x+1)^2=0\\(e^{-x}-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=0\end{cases}$$

ومنه جميع المنحنيات C_k تمر بنقطتين ثابتتين هما $A(-1;0)$ و $B(0;1)$

حساب النهايات

*لما $k>0$

$$\lim_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-kx}=0$$
$$\lim_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-kx}=+\infty$$

*لما $k=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f_0(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f_0(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

*لما $k<0$

$$\lim_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-kx}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2e^{-kx}=0$$

I-3- حساب المشتقة وتحديد اتجاه تغير الدالة f_k

f_k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$$
$$f_k'(x)=(x+1)e^{-kx}(-kx-k+2)$$

***لما $k=0$**

$$f_0'(x)=2(x+1)$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

***لما $k>0$**

$$f_k'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ \text{او}\\ x=\frac{-k+2}{k}=\frac{2}{k}-1\end{cases}$$

لدينا $k>0$ ومنه $\frac{2}{k}\geq 0$ ومنه $\frac{2}{k}-1\geq-1$

ولتعيين الإشارة لدينا

$$f_k'(x)=(x+1)e^{-kx}(-kx-k+2)$$
$$=e^{-kx}(-kx^2-2(kx-1)+(-k+2))$$

إذن معامل x^2 **موجب** لدينا $k>0$ ومنه $-k<0$

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{k}-1$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f_k متناقصة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[-1+\frac{2}{k};+\infty[$

ومتزايدة تماما على المجال $[-1;-1+\frac{2}{k}]$

***لما $k<0$**

$$f_k'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ \text{او}\\ x=\frac{2}{k}-1\end{cases}$$

لدينا $k<0$ ومنه $\frac{2}{k}\leq 0$ ومنه $\frac{2}{k}-1\leq-1$

ولتعيين الإشارة لدينا

$$f_k'(x)=e^{-kx}(-kx^2-2(kx-1)+(-k+2))$$

إذن معامل x^2 **موجب** لدينا $k<0$ ومنه $-k>0$

x	$-\infty$		$\frac{2}{k}-1$		-1		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f_k متناقصة تماما على المجال $[-1+\frac{2}{k};-1]$

ومتزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1+\frac{2}{k}]$ و $[-1;+\infty[$

3-ب- جدول التغيرات لما $k > 0$

x	$-\infty$	-1		$\frac{2}{k}-1$	$+\infty$
$f_k'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f_k(x)$	$+\infty$ ↘	$f_k(-1)$	↗	$f_k(\frac{2}{k}-1)$	↘ 0

4-مناقشة حسب قيم k الأوضاع النسبية لـ (C_k) و (C_{k+1})

لدينا:

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = (x+1)^2 e^{-kx}(e^{-x}-1)$$
$$= (x+1)^2 e^{-kx}\left(\frac{1-e^x}{e^x}\right)$$

نلاحظ أن إشارة الفرق هي من إشارة $1-e^x$ و $(x+1)^2$

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = 0$$

هذا يكافئ

$$\begin{cases}(x+1)^2 = 0\\ 1-e^x = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=0\end{cases}$$

ومنه

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f_{k+1}-f_k$	$+$	0	$+$	0	$-$

(C_{k+1}) فوق (C_k) على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$

(C_{k+1}) تحت (C_k) على المجال $]0;+\infty[$

(C_{k+1}) يمس (C_k) عند $x=-1$ ويقطعه عند $x=0$

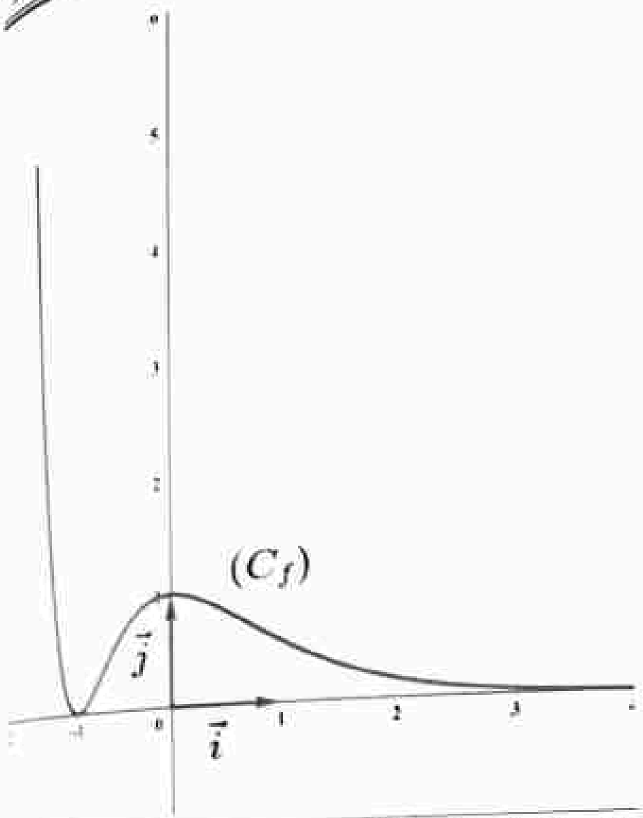
II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-2x}$$

1- تشكيل جدول تغيرات f

x	$-\frac{3}{2}$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\frac{e^3}{4}$ ↘	0	↗	1	↘ 0

-انشاء المنحنى



2- بيان أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

$f(x) = 1$ معناه $f(x) - 1 = 0$

بوضع $h(x) = f(x) - 1$

الدالة h مستمرة ومتناقصة على المجال $]-1.28;-1.27]$

و $\begin{cases}h(-1.27) = -0.08\\ h(-1.28) = 0.01\end{cases}$

و $h(-1.28)\times h(-1.27) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.28 < \alpha < -1.27$

ومن جدول التغيرات $f(0) = 1$ ومنه الحل الاخر معدوم

2-ب تعيين قيم m حتى تقبل المعادلة حلا وحيدا

لدينا $\left|\frac{x+1}{e^x}\right| = \left|\frac{m+1}{e^m}\right|$

بالتربيع $\frac{(x+1)^2}{e^{2x}} = \frac{(m+1)^2}{e^{2m}}$

ومنه $(x+1)^2 e^{-2x} = (m+1)^2 e^{-2m}$

أي $f(x) = f(m)$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = f(m)$ ومنه قيم m حتى تقبل المعادلة حلا وحيدا من البيان $m \in]-\frac{3}{2};\alpha[$

3-ب- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ب:
$$g(x) = (x+1)e^{-2x}$$

أ- بيان أن: $g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$

لدينا:
$$g'(x) + 2g(x) - e^{-2x}$$
$$= e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x} + 2(x+1)e^{-2x} - e^{-2x}$$
$$= 0$$

ومنه:
$$g'(x) + 2g(x) - e^{-2x} = 0$$

-استنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$

لدينا مما سبق $g(x) = -\frac{1}{2}g'(x) + \frac{1}{2}e^{-2x}$

اي أن الدالة الأصلية لـ g هي
$$G(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

ب- حساب مساحة الحيز A

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

$u'(x) =$	e^{-2x}	$u(x) =$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$
$v(x) =$	$(x+1)^2$	$v'(x) =$	$2(x+1)$

ومنه

$$A = -\frac{1}{2} + \int_{-1}^{0} g(x)\,dx$$
$$A = -\frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$$
$$A = \frac{-5+e^2}{4}(u.a)$$

.84 بكالوريا 2018 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2018 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

f الدالة العددية المعرفة على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ بـ:
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \frac{1}{\ln x}; & x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(يرمز بـ ln الى اللوغاريتم النيبيري)

(C_f) التمثيل البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- بين أن الدالة f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

1-ب- احسب $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2-أ- احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

4- بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل نقطة وحيدة ω فاصلتها α حيث $1{,}49 < \alpha < 1{,}5$

ثم بين أن معادلة المماس للمنحني (C_f) في النقطة ω تكتب على الشكل
$$y = \left(\alpha + 3 + \frac{1}{\alpha}\right)(x - \alpha)$$

5- ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f)

6- h الدالة العددية المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $h(x) = 1 - x + x\ln x$

6-أ- بين أن الدالة h متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ واستنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]1;+\infty[$

6-ب- بين أنه من اجل كل $x > 1$:
$$f(x) - x + \frac{1}{x\ln x} = \frac{h(x)}{x\ln x}$$

واستنتج أنه من أجل $x > 1$:
$$x - \frac{1}{x\ln x} < f(x) < x + 1$$

7- $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = \alpha$ و $x = e$ (e هو أساس اللوغاريتم النيبيري)

-بين أن
$$\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha+1) < \mathcal{A} < \frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$$

الحل

1-أ- بيان أن f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(x + 1 - \frac{1}{\ln x}\right)$$

لدينا: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ln x = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1 = f(0)$

ومنه الدالة f مستمرة عند 0 بقيم أكبر

1-ب- حساب $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{h+1-\frac{1}{\ln h}-1}{h}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{h - \frac{1}{\ln h}}{h}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{h}{h} - \frac{\frac{1}{\ln h}}{h}\right)$$

$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \left(1 - \frac{1}{h \ln h}\right)$$

لدينا $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} h \ln h = 0$

وكذلك $1 > h > 0$

$\ln 1 > \ln h$

$0 > \ln h$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

-التفسير الهندسي

بما أن $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = +\infty$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند 0 بقيم أكبر و (C_f) يقبل نصف مماس شاقولي معادلته $x = 0$

2-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left(x + 1 - \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left(x + 1 - \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty$$

-(C_f) يقبل مستقيما مقاربا شاقولي معادلته $x = 1$

2-ب- دراسة تغيرات f

f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0,1[$ و $]1; +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على D_f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3-البيان أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \frac{1}{\ln x} - (x + 1)\right)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x + 1$

-دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y$	‖	$+$	‖	$-$	
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)	

4- البرهان أن (C_f) يقطع (xx') في ω

معناه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.49 < \alpha < 1.5$

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1.49; 1.5[$

ولدينا $\begin{cases} f(1.49) = -0.015 \\ f(1.5) = 0.03 \end{cases}$

و $f(1.49) \times f(1.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.49 < \alpha < 1.5.$

ومنه بيانيا (C_f) يقطع (xx') في α

-معادلة المماس عند ω

لدينا $\omega(\alpha; 0)$

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$
$$y = \left(1 + \frac{1}{\alpha(\ln \alpha)^2}\right)(x - \alpha)$$

وبما أن $f(\alpha) = 0$ نجد بالتعويض في الدالة

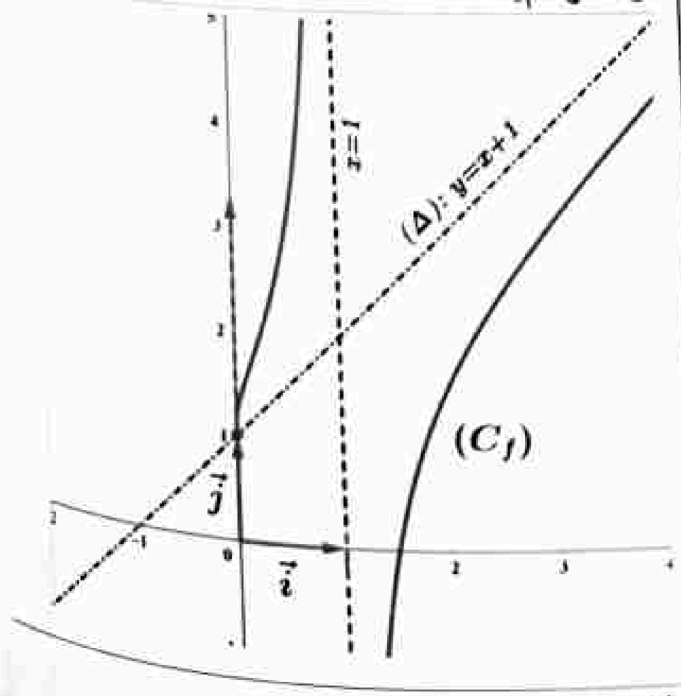
$$\ln \alpha = \frac{1}{\alpha + 1}$$

إذن: $\frac{1}{(\ln \alpha)^2} = (\alpha + 1)^2$

بالتعويض في معادلة المماس

$$y = \left(1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha + 1)^2\right)(x - \alpha)$$
$$y = \left(3 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)(x - \alpha)$$

5- الرسم:



6-أ-البرهان أن الدالة h متزايدة على $[1;+\infty[$

$$h'(x) = -1 + \ln x + 1 = \ln x$$

إذن $h'(x) > 0$ موجب على المجال $]1;+\infty[$

ومنه $h(x)$ متزايدة تماما على $]1;+\infty[$

-إشارة $h(x)$ باستعمال تغيرات $h(x)$

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$
$h(x)$	$+$

ومنه $h(x) \geq 0$ على المجال $]1;+\infty[$

6-ب- البرهان أن: $f(x) - x + \frac{1}{x\ln x} = \frac{h(x)}{x\ln x}$

$$f(x) - x + \frac{1}{x\ln x} = x + 1 - \frac{1}{\ln x} - x + \frac{1}{x\ln x}$$

$$= 1 - \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x\ln x}$$

$$= \frac{(x\ln x - x + 1)}{(x\ln x)}$$

$$= \frac{h(x)}{x\ln x}$$

-استنتاج أن $x - \frac{1}{x\ln x} < f(x) < x + 1$ من أجل $x > 1$:

لدينا من دراسة وضعية (C_f) و (Δ)

$f(x) - y < 0$ على المجال $x > 1$

أي

$. f(x) < x + 1 \ldots\ldots (1)$

ولدينا مما سبق

$$f(x) - x + \frac{1}{x\ln x} = \frac{h(x)}{x\ln x}$$

$\frac{h(x)}{x\ln x} > 0$ على المجال $]1;+\infty[$

ومنه $f(x) - x + \frac{1}{(x\ln x)} > 0$

$$f(x) > x - \frac{1}{x\ln x} \ldots\ldots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن

$$x - \frac{1}{x\ln x} < f(x) < x + 1$$

7-حصر $\mathcal{A}$

لدينا مما سبق $x - \frac{1}{x\ln x} < f(x) < x + 1$

والدالة موجبة تماما على المجال $]\alpha;e[$ إذن حسب خواص التكامل

$$\int_\alpha^e \left(x - \frac{1}{x\ln x}\right)dx < \int_\alpha^e f(x)dx < \int_\alpha^e (x+1)dx$$

الدالة الأصلية للدالة $\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$ هي الدالة $x \to \ln(\ln x)$

ومنه نجد

$$\left[\frac{x^2}{2} - \ln(\ln x)\right]_\alpha^e < \int_\alpha^e f(x) < \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_\alpha^e$$

$$\left(\frac{1}{2}e^2 - \ln(\ln e)\right) - \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \ln(\ln \alpha)\right)$$

$$< \int_\alpha^e f(x) < \left(\frac{e^2}{2} + e\right) - \left(\frac{\alpha^2}{2} + \alpha\right)$$

لدينا مما سبق $\ln \alpha = \frac{1}{\alpha+1}$ ومنه:

$$\frac{e^2-\alpha^2}{2} + \ln\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) < \int_\alpha^e f(x) < \frac{(e-\alpha)(e+\alpha)}{2} + (e-\alpha)$$

$$\frac{e^2-\alpha^2}{2} + \ln(\alpha+1) < \int_\alpha^e f(x) < (e-\alpha)\left(\frac{(e+\alpha)}{2} + 1\right)$$

ومنه نجد

$$\frac{1}{2}(e^2 - \alpha^2) - \ln(\alpha+1) < \mathcal{A} < \frac{1}{2}(e-\alpha)(e+\alpha+2)$$

.85 بكالوريا 2018 الرياضيات

اليوتيوب: دالة اسية شاملة باك 2018 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

I-g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = (1 + x + x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$$

1- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0{,}9 < \alpha < 1$ واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II-f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$

1-ب- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}} - x\right) = -1$

(يمكن وضع $t = -\frac{1}{x}$) ثم استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

II-3- h الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x) = \frac{1}{x} - 1 + e^{-\frac{1}{x}}$$

3-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$

3-ب- تحقق أن: $f(x) - x = (1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية بين (C_f) والمستقيم (Δ)

4-ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

(نأخذ $f(\alpha) \simeq 1,73$)

5-(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث:

$$u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$$

5-أ- اكتب u_n بدلالة n ثم بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1

5-ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

الحل

I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = (1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}} - 1$

1- البرهان من أجل $x \in]0;+\infty[$ أن: $g'(x) = \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$$g'(x) = (1+2x)e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(1+x+x^2)$$
$$= \left(\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \left(\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \left(\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

-استنتاج تغيرات الدالة g

ندرس إشارة $g'(x)$ لدينا $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ على المجال $]0;+\infty[$ و $2x^2+1 > 0$ محققة دائما و $x^2 > 0$ دائما

إذن إشارة $g'(x)$ من إشارة $x+1$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$x+1$	$+$
$g'(x)$	‖ $+$

ومنه g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2- اثبات أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $]0.9;1[$

ولدينا $\begin{cases} g(1) \simeq 0.1 > 0 \\ g(0.9) \simeq -0.1 < 0 \end{cases}$

$g(0.9) \times g(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,9 < \alpha < 1$

-استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات $g(x)$ ومما سبق نستنتج أن:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II- f معرفة على $]0;+\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x} + (1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right) = +\infty + (1\times e^{-\infty}) = +\infty$$

1-ب- بيان أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(x+1)$$
$$= \frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$
$$= \frac{-1+(x^2+x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

-جدول تغيرات $f(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

2- بيان أن $\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}} - x\right) = -1$

نضع $x = -\frac{1}{t} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{x}$

$x \to +\infty \Leftrightarrow t \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t}e^t + \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\left(-\frac{e^t-1}{t}\right) = -1$$

طريقة العدد المشتق $\lim_{t\to 0}\left(\frac{e^t-1}{t}\right) = 1$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$ معناه: $y = x$ مقارب مائل لـ(C_f)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right)$$
$$= 0+1-1=0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

II-3- $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$ و $D_h=]0;+\infty[$

3-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0$$

دراسة اتجاه تغير الدالة h

h قابلة للاشتقاق على $D_h=]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$

ندرس إشارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$

إذا كان $e^{-\frac{1}{x}}-1>0$ فإن $e^{-\frac{1}{x}}>1$

ومنه $e^{-\frac{1}{x}}>e^0$

وبالتالي $-\frac{1}{x}>0$ اي $\frac{1}{x}<0$

ومنه $x<0$

ومنه $h'(x)>0$ إذا كان $x<0$

و $h'(x)<0$ إذا كان $x>0$

ومنه h متناقصة تماما على D_h

-استنتاج إشارة

لدينا مما سبق الدالة h متناقصة تماما و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$

ومنه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل ومنه فإن $h(x)>0$ على المجال $]0;+\infty[$

3-ب- التحقق أن $f(x)-x=(x+1)h(x)$

$$f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x$$
$$=\frac{\left(1-x^2+(1+x)xe^{-\frac{1}{x}}\right)}{x}$$
$$=\frac{(1+x)(1-x)+(1+x)xe^{-\frac{1}{x}}}{x}$$
$$=(1+x)\left(\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right)$$
$$=(1+x)\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)$$

$f(x)-y=(1+x)h(x)$

-استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

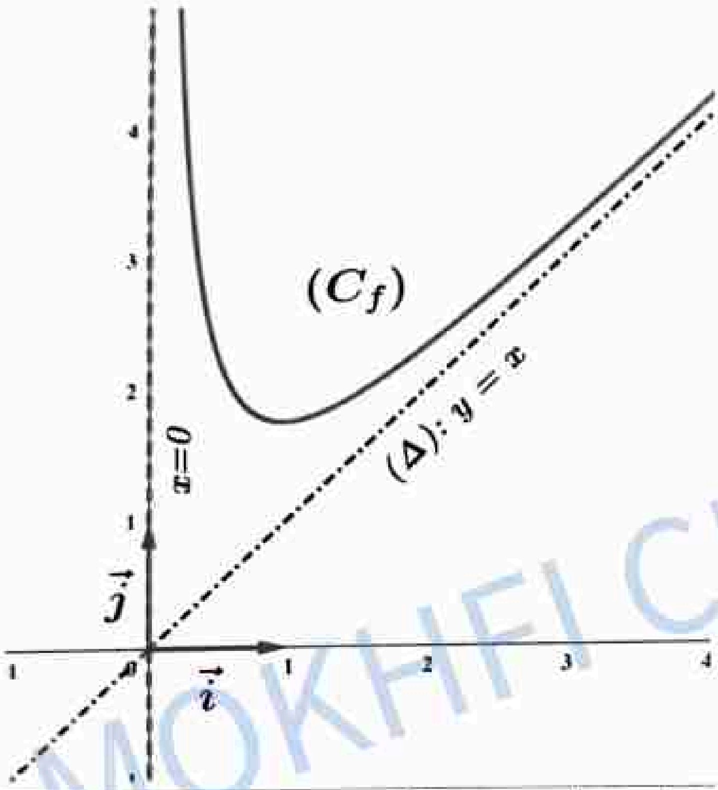
ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$ حيث

$f(x)-x=(x+1)h(x)$

لدينا $(x+1)>0$ و $h(x)>0$ لما $x>0$

ومنه $f(x)-x>0$ اذن (C_f) يقع فوق (Δ)

4- رسم المنحنى (C_f) (Δ)



5-أ- كتابة (u_n) بدلالة n

$$u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$$
$$u_n=\frac{n}{n+1}\left(n+\frac{n+1}{n}e^{-n}\right)-\frac{n^2}{n+1}$$
$$u_n=\frac{n^2}{n+1}+\frac{n}{n+1}\times\frac{n+1}{n}e^{-n}-\frac{n^2}{n+1}$$
$$u_n=e^{-n}$$

-اثبات أن (u_n) متتالية هندسية وتعين أساسها q و u_1

$$u_{n+1}=e^{-(n+1)}=e^{-n}e^{-1}=u_ne^{-1}$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=e^{-1}$

وحدها الأول $u_1=e^{-1}$

5-ب- حساب المجموع S_n بدلالة n

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}\right)$$

في المجاميع من هذا الشكل نقوم بالتعامل مع الحد

الأخير ونحاول تبسيطه للوصول إلى الشكل المبسط

$$\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left(n+\frac{n+1}{n}e^{-n}\right)-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n^2}{n+1}+e^{-n}-\frac{1}{n+1}$$
$$=u_n+(n-1)$$

نضع $w_n=n-1$

حيث (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$

وحدها الأول $w_1=0$ ومنه

$$S_n=(u_1+w_1)+(u_2+w_2)+\cdots+(u_n+w_n)$$

ومنه يصبح المجموع S_n مجموع متتاليتين حسابية و هندسية

$$S_n=(u_1+u_2\ldots+u_n)+(w_1+w_2+\cdots+w_n)$$
$$S_n=u_1\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{n}{2}(w_1+w_n)$$
$$S_n=e^{-1}\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}+\frac{n}{2}(0+n-1)$$
$$S_n=\frac{1-e^{-n}}{e-1}+\frac{n}{2}(n-1)$$

.86 بكالوريا 2017 الرياضيات 01

اليوتيوب: دالة أسية باك 2017 شعبة رياضيات

الموضوع الاول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$$
(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلة له

1-ب- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x،
$$f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$$
ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2

3- h الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:
$$h(x)=x^2e^{-x+2}-4$$
ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$

حدد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (T) على المجال $]0;+\infty[$

4- ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $]0;+\infty[$

5- نعتبر m وسيط حقيقي و المعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x)=m(x-2)\ldots(E)$

ناقش بيانيا قيم m عدد حلول المعادلة (E)

6- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

اعتمادا على السوال رقم (1)، شكل جدول تغيرات الدالة g

الحل

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$$

1-أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^3}{e^x}\right)e=0$$

ومنه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي لـ (C_f) عند $+\infty$

1-ب- إثبات عبارة المشتقة $f'(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:
$$f'(x)=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-e^{-x+1}(-x^3+2x^2)$$
$$=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}$$
$$f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$$

-استنتاج اتجاه تغير الدالة f

نقوم بدراسة إشارة $f'(x)$ لدينا e^{-x+1} موجب

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2-5x+4)$

لدينا (x^2-5x+4) له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$	0		1		4	$+\infty$
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-5x+4	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗	1	↘	$-32e^{-3}$	↗ 0

2- كتابة معادلة المماس لـ (C_f) عند 2

$$(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)$$
$$(T): y=-4e^{-1}(x-2)$$

و هي معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2

3-h دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ
$$h(x)=x^2e^{-x+2}-4$$

دراسة تغيرات $h(x)$

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و دالتها المشتقة

$$h'(x)=2xe^{-x+2}+x^2(-e^{-x+2})$$
$$=(-x^2+2x)e^{-x+2}$$
$$=x(2-x)e^{-x+2}$$

ومنه إشارة h' من إشارة $2-x$ على المجال $[0;+\infty[$

لأن في المجال $[0;+\infty[$ $xe^{-x+2}\geq 0$)

ندرس إشارة $2-x$

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	

تغيرات $h(x)$

h متزايدة على المجال $[0;2[$ ومتناقصة تماما على $]2;+\infty[$

استنتاج إشارة $h(x)$

من تغيرات الدالة $h(x)$ نلاحظ أنه لما $x\in[0;+\infty[$ فإن: $h(x)\leq h(2)\leq 0$

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T)

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]$ على المجال $[0;+\infty[$

$$f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}+4e^{-1}(x-2)$$
$$=[(-x^3+2x^2)e^{-x+2}+4(x-2)]e^{-1}$$
$$=[x^2(-x+2)e^{-x+2}-4(2-x)]e^{-1}$$
$$=(-x+2)e^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)$$
$$=(-x+2)e^{-1}(h(x))$$

x	0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$		$-$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	

الوضعية

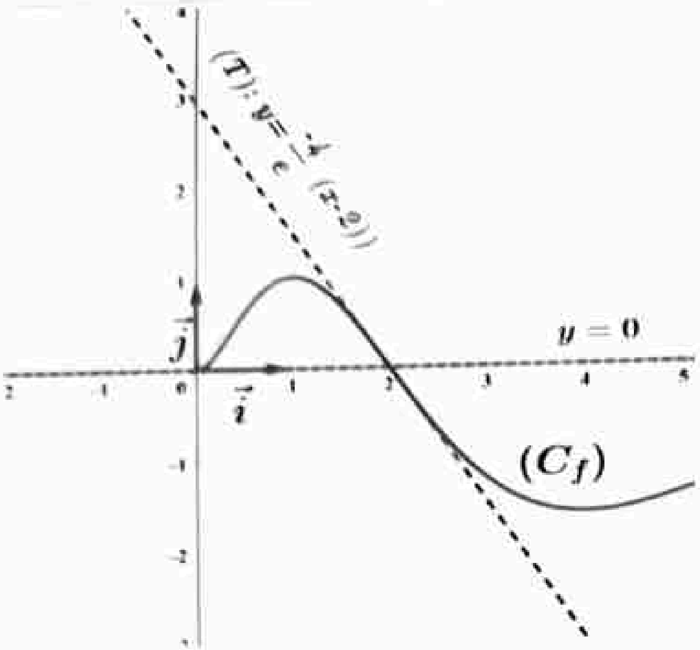
(C_f) تحت (T) على المجال $[0;2[$

(C_f) فوق (T) على المجال $]2;+\infty[$

(C_f) يقطع (T) عند $x=2$

ملاحظة: النقطة التي يقطع فيها المماس منحنى الدالة تسمى نقطة انعطاف للمنحى

4-رسم (C_f) و (T)



5-المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x)=m(x-2)$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (T_m) ذو المعادلة $y=m(x-2)$ على المجال $]0;+\infty[$

المناقشة هي مناقشة دورانية لأن معامل توجيه المستقيم متغير

لإيجاد نقطة الدوران $A_0(x_0;y_0)$ نضع:

$$y_0=m(x_0-2)$$
$$=mx_0-2m$$
$$mx_0-2m-y_0=0$$
$$m(x_0-2)-y_0=0$$

$-y_0=0$ و $x_0-2=0$

$y_0=0$ و $x_0=2$

ومنه $A_0(x_0;y_0)=(2;0)$

معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي

$$y=-4e^{-1}(x-2)$$

إذن **لما** $m=-4e^{-1}$ أو $m>0$ للمعادلة E حل وحيد

لما $m\in]-4e^{-1};0[$ أو لما $m<0$ للمعادلة E ثلاث حلول

لما $m=0$ للمعادلة (E) حلين

6-g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

اعتمادا على تغيرات الدالة f نشكل جدول تغيرات g

$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0} f(x)=0$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

الدالة g هي مركب الدالة مقلوب و الدالة f

اشتقاق دالة مركبة:

$$g'(x)=\left(f(u(x))\right)'=u'(x)f'(u(x))$$

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$-\frac{1}{x^2}<0$ ومنه إشارة $g'(x)$ عكس إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$

ندرس إشارة $f'\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا مما سبق جدول إشارة $f'(x)$

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

ولدينا أيضا تغيرات الدالة مقلوب $x\mapsto\frac{1}{x}$

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$+\infty$ ↘	0

نضع $t=\frac{1}{x}$

لما $x\in]0;\frac{1}{4}[\cup]1;+\infty[$ يكون:

$t\in]0;1[\cup]4;+\infty[$

إذن من جدول إشارة f يكون $f(t)>0$

لما $x\in]\frac{1}{4};1[$ يكون $t\in]1;4[$

من جدول إشارة الدالة f يكون $f(t)<0$

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$-\frac{1}{x^2}$		−		−		−	
$g'(x)$		−	0	+	0	−	
$g(x)$	0	↘	$-32e^{-3}$	↗	1	↘	0

.87 بكالوريا 2017 الرياضيات 01

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2017 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

1-I-ادرس اتجاه تغير الدالة g

2-I- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x)=\frac{x+1}{x-\ln x};x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-اثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين، ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة بيانيا

2- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$،

$$f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$$

3-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4-لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x-\ln x$

4-أ- بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $h(x)>0$، واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$

4-ب ارسم (C_f) (نأخذ $f(\alpha)\approx 2,31$)

5-لتكن الدالة F المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

-بين أن: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $1\le x$:

$+1\le f(x)\le f(\alpha)$

-اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصر

الحل

I- g دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

1- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على D_g

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)$$

ومنه $g'(x)<0$ على المجال $]0;+\infty[$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2- برهان أن للمعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α

بما أن g مستمرة ومتناقصة تماما على $]1,76;1,77[$

ولدينا $\begin{cases}g(1,.77)=-0.006\\ g(1,76)=0.002\end{cases}$

$g(1,76)\times g(1,.77)<0$

و

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $1,76<\alpha<1,77$

-إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	‖ +	0	−

II-f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+1}{x-\ln x};\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- اثبات أن الدالة f مستمرة على اليمين 0

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{(x+1)}{x-\ln x}\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{1}{\ln x}\frac{x+1}{\frac{x}{\ln x}-1}\right]=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$$

ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0

-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{x+1}{x(x-\ln x)}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{x+1}{x}\times\frac{1}{x-\ln x}\right]$$

لدينا:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{x+1}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)=+\infty$$

-التفسير الهندسي للنتيجة هو أن المنحني (C_f) يقبل مماسا موازٍ لمحور التراتيب على يمين النقطة $O(0;0)$

2- بيان أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$ حيث $x\epsilon]0;+\infty[$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=\frac{(x-\ln x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+1)}{(x-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x-\ln x-x+\frac{1}{x}+1-1}{(x-\ln x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{(x-\ln x)^2}=\frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$$

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

3-تغيرات الدالة f

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

-**التفسير الهندسي** : (C_f) يقبل مقاربا افقيا معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖ +	0	−
$f(x)$	0 ↗	$f(\alpha)$	↘ 1

II-4-لدينا h معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$h(x)=x-\ln x$$

4-أ- بيان أن $h(x)>0$

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

$$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	‖ −	0	+

الدالة h متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ولدينا

$h(1)=1>0$

ومنه $h(x)>h(1)>0$

-استنتاج وضعية (C_f) و(Δ) ذو المعادلة $y=1$

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{x+1}{x-\ln x}-1=\frac{(\ln x+1)}{(x-\ln x)}$$

$$f(x)-y=\frac{\ln x+1}{h(x)}$$

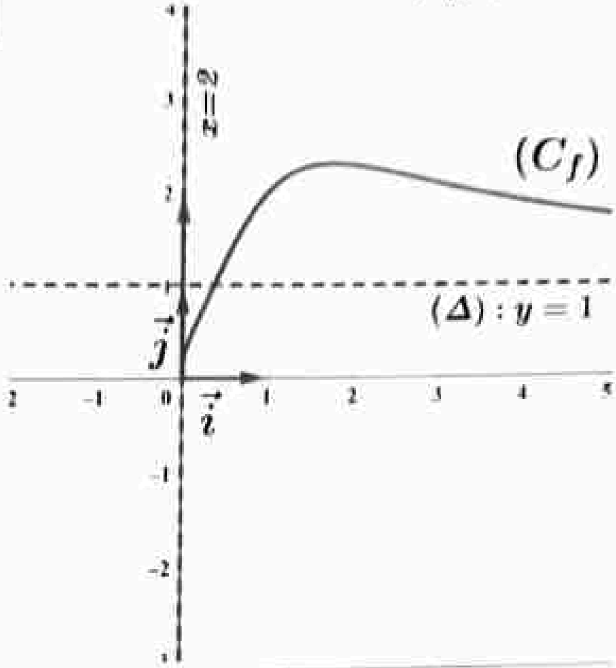
لدينا $h(x)>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $\ln x+1$

$\ln x+1=0$

$\ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$\ln x+1$	‖ −	0	+
الوضعية	‖ (C_f) أسفل (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

4-ب- رسم (C_f)



5-بيان أن من أجل $x \ge 1$ فإن

$$\frac{1}{x}+1 \le f(x) \le f(\alpha)$$

نعلم أن $f(\alpha)$ هي قيمة حدية كبرى للدالة f

$f(x) \le f(\alpha)$ ……………(1)

لإثبات أن $\frac{1}{x}+1 < f(x)$ ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

$$f(x)-\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{x+1}{x-\ln x}-\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

بعد التبسيط نجد:

$$f(x)-\left(\frac{1}{x}+1\right)=\frac{(x+1)\ln x}{x(x-\ln x)}$$

لدينا من أجل $x \ge 1$:

$x(x-\ln x)>0$ لأن $x \ge \ln x$

و $(x+1)\ln x > 0$ لأن $\ln x \ge 0$

ومنه فإن $f(x)-\left(\frac{1}{x}+1\right) \ge 0$

أي $f(x) \ge \frac{1}{x}+1$ ……………(2)

من (1) و (2) نجد أن $\frac{1}{x}+1 \le f(x) \le f(\alpha)$

-إعطاء تفسير هندسي للعدد $F(e)$

$F(e)$ هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

-استنتاج حصرا لـ $F(e)$

$$\int_1^e\left(\frac{1}{x}+1\right)dx \le \int_1^e f(x)dx \le \int_1^e f(\alpha)dx$$

ومنه:

$$[\ln x + x]_1^e \le F(e) \le [xf(\alpha)]_1^e$$

$$e \le F(e) \le f(\alpha)(e-1)$$

88. بكالوريا 2017 الرياضيات 02

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2017 شعبة رياضيات تقني

الموضوع الأول

I-نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$g(x)=x+2-\ln x$

-ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

II-لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(-x+e-\frac{\ln(x^2)}{x}\right)$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول ...)

1- بين أن من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$، $f'(x)=-\frac{g(x^2)}{2x^2}$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

2- أ- احسب من أجل $x\in\mathbb{R}^*$، $f(-x)+f(x)$ فسر النتيجة بيانيا.

2-ب- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\<}} f(x)$

2-جـ- شكل جدول تغيرات الدالة f

3-بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x+\frac{e}{2}$ مقارب مائل لـ(C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

4-أ- أثبت أنه يوجد مماسان للمنحنى (C_f) معامل توجيه كل منهما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ثم جد معادلة كل منهما.

4-ب- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث $2<\alpha<2.1$ و $-0.5<\beta<-0.4$

5-ارسم المماسين والمستقيم (Δ) ثم المنحنى (C_f)

6-باستعمال المنحنى (C_f)، عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $x(e-2m)=\ln(x^2)$ حلا وحيدا.

7-نرمز بـ $A(\alpha)$ الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x=\alpha$ و $x=1$ و $x+2y=e$

-تحقق أن $A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln\alpha)^2\ cm^2$

الحل

I-الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ :
$g(x) = x + 2 - \ln x$

-دراسة اتجاه تغير الدالة g واستنتاج إشارتها

g قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

لدينا $x > 0$

ومنه $g'(x) > 0 \Leftarrow x - 1 > 0 \Leftarrow x > 1$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$

ومتناقصة على المجال $]0; 1]$

-جدول تغيرات $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

-إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات g نجد أن $g(x) \geq g(1)$ ومنه $g(x) > 0$

II-1- f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(-x + e - \frac{\ln(x^2)}{x}\right)$$

البرهان أن من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ فإن:

$$f'(x) = -\frac{g(x^2)}{2x^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{2 - \ln x^2}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + 2 - \ln x^2}{x^2}\right) = -\frac{g(x^2)}{2x^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

لدينا $2x^2 > 0$

ولدينا مما سبق إذا كان $x > 0$ فإن $g(x) > 0$

وإذا كان $x^2 > 0$ على $\mathbb{R}^*$ فإن $g(x^2) > 0$

ومنه $-g(x^2) < 0$ أي $f'(x) < 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}^*$

2-أ-حساب $f(-x) + f(x)$

$$f(-x) + f(x)$$
$$= \frac{1}{2}\left[-(-x) + e - \frac{\ln(-x)^2}{-x}\right] + \frac{1}{2}\left[-x + e - \frac{\ln x^2}{x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[x + e + \frac{\ln(x^2)}{x} - x + e - \frac{\ln(x^2)}{x}\right]$$
$$= \frac{1}{2}(2e) = e$$

-التفسير البياني للنتيجة

(C_f) يقبل مركز تناظر $\omega\left(0; \frac{e}{2}\right)$

2-ب- حساب النهايات

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

استنتاج $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x)$

لدينا: كون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}^*$

$$f(-x) + f(x) = e$$
$$f(x) = e - f(-x)$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{-x \to +\infty}\left(e - f(-x)\right) = +\infty$$
$$\lim_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{-x \to 0}\left(e - f(-x)\right) = -\infty$$

2-جـ جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$

3-بيان أن (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

$$\lim_{|x| \to +\infty}(f(x) - y) = \lim_{|x| \to +\infty}\left(-\frac{x}{2} + \frac{e}{2} - \frac{\ln x^2}{2x} + \frac{x}{2} - \frac{e}{2}\right) = 0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = -\frac{\ln x^2}{x}$$

لكي يكون $\ln x^2 > 0$

يجب أن $x^2 > 1$ ومنه $x > 1$ أو $x < -1$

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]-\infty; -1[\cup]0; 1[$

(C_f) أسفل (Δ) على المجال $]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

(C_f) يقطع (Δ) عند $x = -1$ و $x = 1$

4-أ- إثبات أنه يوجد مماسان لـ (C_f) معامل توجيه كل منهما $-\frac{1}{2}$

نحل المعادلة $f'(x) = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{g(x^2)}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{-g(x^2)}{2x^2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 2 + \ln x^2 + x^2}{2x^2} = 0$$

$$-2 + \ln x^2 = 0$$

$$\ln x^2 = 2$$

$$x^2 = e^2$$

ومنه

$$u\begin{cases} x = \sqrt{e^2} = e \\ \text{او} \\ x = -\sqrt{e^2} = -e \end{cases}$$

ومنه (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما يساوي $\left(-\frac{1}{2}\right)$ عند النقطتين ذات الفاصلتين e ، $-e$ على الترتيب

-إيجاد معادلتهما

$$y_1 = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} - \frac{1}{e}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} + \frac{1}{e}$$

ب- بيان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين β و α

$$-0.5 < \beta < -0.4$$

1- بما أن f مستمرة ومتناقصة تماما على $]-0.5;-0.4[$

و $\begin{cases} f(-0{,}4) = -0.73 \\ f(-0.5) = 0.22 \end{cases}$

و $f(-0.5) \times f(-0{,}4) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد β على المجال $]-0{,}5;-0{,}4[$

2)- f مستمرة على المجال $]2;2.1[$ ومتناقصة تماما

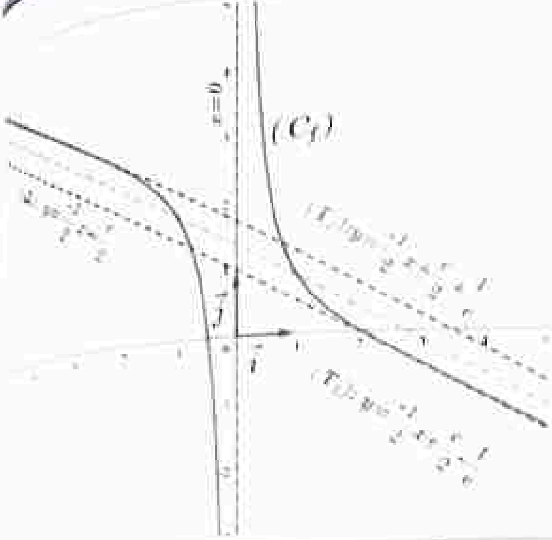
و $\begin{cases} f(2{,}1) = -0.02 \\ f(2) = 0.01 \end{cases}$

و $f(2) \times f(2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]2;2.1[$

من (1) (2) نجد ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β

5-الرسم:



6-تعيين قيم m حتى تقبل المعادلة حلا وحيدا

لدينا المعادلة $x(e-2m) = \ln(x^2)$

نحاول إظهار عبارة الدالة f في المعادلة

$$xe - 2xm = \ln(x^2)$$

$$xe - \ln x^2 = 2xm$$

$$\frac{xe - \ln x^2}{x} = 2m$$

نضيف $-x$ الى طرفي المعادلة ونقسم على 2

$$\frac{1}{2}\left(-x + e - \frac{\ln x^2}{x}\right) = \frac{2m - x}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + m$$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و (Δ_m) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + m$

ومنه من البيان (C_f) لدينا مجموعة قيم m هي

$$\left]-\infty;\frac{e}{2} - \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{e}{2} + \frac{1}{e};+\infty\right[$$

7-التحقق من قيمة $A(\alpha)$

لدينا: $x + 2y = e$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$$

وهي معادلة المستقيم (Δ)

لدينا $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد لـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \alpha$ ، $x = 1$ و $y = -\frac{1}{2}x + \frac{e}{2}$

اذن

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} \left(y - f(x)\right) dx$$

$$= \int_1^{\alpha} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{e}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{e}{2} + \frac{\ln x^2}{2x}\right) dx$$

$$= \int_1^{\alpha} \frac{2\ln x}{2x}\, dx = \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x}\, dx$$

$$u'u^n \xrightarrow{\text{الدالة الاصلية}} \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$A(\alpha) = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^{\alpha} = \frac{(\ln \alpha)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{(\ln \alpha)^2}{2} cm^2$$

89. بكالوريا 2017 الرياضيات 02

اليوتيوب: دالة اسية باك 2017 شعبة رياضيات للمقصيين

الموضوع الثاني

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x+1)^2e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني.

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيتيهما، احسب $f(-2)$، ثم ارسم (C).

II- ليكن m وسيط حقيقي، نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$

وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1- أثبت أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين يطلب تعيينهما

3- M_m نقطة ثابتة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m = 1 - m$.

اثبت أنه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي إلى منحنى يطلب تعيين معادلة له.

4- ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m، حيث $m \neq 2$، الوضعية النسبية للمنحنيين (C) و (C_m)

5- احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C) و (C_1) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = \alpha$. ثم احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

الحل

I- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = (x+1)^2e^{-x}$$

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)^2e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2e^{-x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= 0$$

2- اتجاه تغير الدالة f وجدول التغيرات

لدينا $f'(x) = (1-x^2)e^{-x}$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x^2)$

$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1$ ومنه $-1 < x < 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0

3- إثبات أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

حتى يقبل (C_f) نقطتي انعطاف يجب أن تنعدم $f''(x)$ وتغير اشارتها

f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f''(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$$
$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$
$$\Delta = 8$$

ومنه $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ و $x_2 = 1 + \sqrt{2}$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0		0	$+$	

ومنه (C_f) يقبل نقطتي انعطاف احداثيتهما

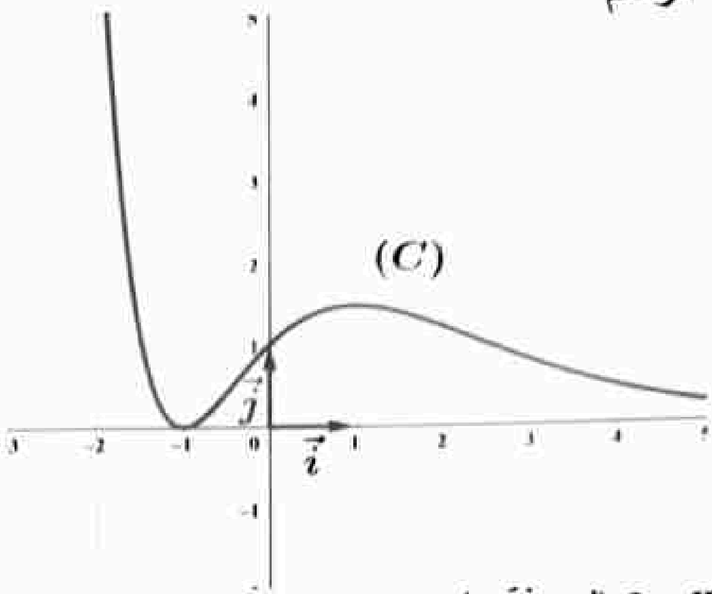
$$\left(1+\sqrt{2}; \left(2+\sqrt{2}\right)^2 e^{-1-\sqrt{2}}\right)$$

و $$\left(1-\sqrt{2}; \left(2-\sqrt{2}\right)^2 e^{\sqrt{2}-1}\right)$$

حساب $f(-2)$:

$$f(-2) = e^2 \simeq 7.4$$

الرسم



II- f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f_m(x) = (x^2 + mx + 1)e^{-x}$

1- إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω

لتكن $\omega(x_0;y_0)$ حيث $\omega \in C_m$

و $f_m(x_0) = y_0$

أي

$$y_0 = (x_0^2 + mx_0 + 1)e^{-x_0}$$

$$x_0^2e^{-x_0} + mx_0e^{-x_0} + e^{-x_0} - y_0 = 0$$

ومنه حتى تحقق المعادلة يجب

$$\begin{cases} mx_0e^{-x_0} = 0 & \ldots\ldots\ldots(1) \\ x_0^2e^{-x_0} + e^{-x_0} - y_0 = 0 & \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بتعويض قيمة x_0 في 2 نجد

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ e^0 \times 0 + e^{-0} - y_0 = 0 \end{cases}$$

ومنه $y_0 = 1$ ومنه $\omega(x_0;y_0) = \omega(0.1)$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f_m

f_m قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$\begin{aligned} f'_m(x) &= (2x+m)e^{-x} - e^{-x}(x^2+mx+1) \\ &= (2x+m-x^2-mx-1)e^{-x} \\ &= (-x^2+(2-m)x+m-1)e^{-x} \end{aligned}$$

-اشارة $f'_m(x)$

ندرس إشارة $-x^2+(2-m)x+m-1$

لدينا $\Delta = (2-m)^2 - 4(-1)(m-1)$

$\Delta = m^2$

1) اذا كان $m = 0$ أي $\Delta = 0$

$f'_0(x) = -(x-1)^2e^{-x}$

ومنه $f'_0(x) < 0$ أي الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

2) اذا كان $m > 0$ أي $\sqrt{\Delta} = m$

$$x_1 = \frac{m-2-m}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{m-2+m}{-2} = \frac{2m-2}{-2} = 1-m$$

x	$-\infty$		$1-m$		1		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f_m متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1-m[\cup]1;+\infty[$

ومتزايدة على المجال $[1-m;1]$

3) اذا كان $m < 0$ أي $\sqrt{\Delta} = -m$

$x_1 = 1-m$ $x_2 = 1$

x	$-\infty$		1		$1-m$		$+\infty$
$f'_m(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f_m متناقصة تماما على:

$]-\infty;1[\cup]1-m;+\infty[$

ومتزايدة على المجال $[1;1-m]$

-قيم m التي من اجلها تقبل الدالة f_m قيمتين حديتين

مما سبق لدينا لما $m = 0$ فإن f_m لا تقبل قيمة حـ

ومنه قيم m التي من اجلها تقبل f_m قيمتين حديتـ

هي $m \in \mathbb{R}^*$

3- إثبات أنه عندما $m \in \mathbb{R}$ فإن M_m تنتمي لـ المنحنى C_m .

$M(x_m;y_m) = (x_m; f_m(x_m))$

لدينا M_m تنتمي لـ C_m أي $y_m = f_m(x_m)$

ومنه $f_m(1-m) = (2-m)e^{m-1}$

$$\begin{cases} x_m = 1-m \ldots\ldots(1) \\ y_m = (2-m)e^{m-1} \ldots(2) \end{cases}$$

أي من (1) $m = 1-x$

بالتعويض قيمة m في y_m نجد: $y_m = (1+x)e^{-x}$

وبالتالي M_m تنتمي الى المنحنى الذي معادلته

$y_m = (1+x)e^{-x}$

4-دراسة حسب قيم m وضعية (C) و (C_m) حيث $m \neq 0$

ندرس إشارة الفرق $f_m(x) - f(x)$

$$\begin{aligned} f_m(x) - f(x) &= (x^2+mx+1)e^{-x} - (x^2+2x+1)e^{-x} \\ &= (x^2+mx+1-x^2-2x-1)e^{-x} \\ &= (m-2)xe^{-x} \end{aligned}$$

$e^{-x} > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(m-2)x$

الحالة 1: $m > 2$

* لما $x > 0$ (C_m) فوق (C) ولما $x < 0$ (C_m) تحت (C)

الحالة 2: $m < 2$

لما $x > 0$ (C_m) تحت (C) ولما $x < 0$ (C_m) فوق (C)

وفي الحالتين 1 و 2 (C_m) و (C) يتقاطعان في ω

5-حساب بدلالة العدد الحقيقي α الموجب المساحة $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} |f_3(x) - f(x)|\, dx$$

$$= \int_0^{\alpha} |(x^2 + 3x + 1)e^{-x} - (x^2 + 2x + 1)e^{-x}|\, dx$$

بعد التبسيط نجد

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} x e^{-x}\, dx$$

نستعمل المكاملة بالتجزئة

$u:$	x	$u':$	1
$v:$	$-e^{-x}$	$v':$	e^{-x}

$$A(\alpha) = [-xe^{-x}]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} -e^{-x}\, dx$$

$$A(\alpha) = [-xe^{-x}]_0^{\alpha} + [-e^{-x}]_0^{\alpha}$$

نعوض بـ α و 0 نجد

$$A(\alpha) = -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1$$

حساب $\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} (-\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1)$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \left[-\frac{\alpha}{e^{\alpha}} - \frac{1}{e^{\alpha}} + 1)\right] = 1$$

.90 بكالوريا 2016 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2016 شعبة رياضيات

الموضوع الاول

I- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0{,}52; 0{,}53[$ حلا وحيدا α

3-استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{3 + 2\ln x}{x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O ; \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

2-أ- بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$$

2-ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

2-جـ -تحقق أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$ ثم عين حصرا له

3-أ- احسب $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

3-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)

3-جـ- بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

4- نقبل أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما x_0 و x_1 حيث:

$0{,}22 < x_0 < 0{,}23$ و $2{,}11 < x_1 < 2{,}13$

أنشئ (T)، (Δ) و (C_f).

5- m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا وحسب قيم m، عدد حلول المعادلة:

$$3 + 2\ln x - mx = 0$$

III- من أجل كل عدد طبيعي n نضع:

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]dx$$

1- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

2- أعط تفسيرا هندسيا للعدد u_0

3-احسب u_n بدلالة n

4-نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

احسب S_n بدلالة n

الحل

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$$

1- دراسة اتجاه تغير g

$g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$ $\qquad D_g =]0; +\infty[$

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

$g'(x)$ موجبة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على D_g

2- بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α

الدالة g متزايدة ومستمرة على المجال $]0{,}52; 0{,}53[$

ولدينا
$$\begin{cases} g(0.53) = 0.011 \\ g(0{,}52) = -0.037 \end{cases}$$

و $g(0.52) \times g(0.53) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $0{,}53 > \alpha > 0{,}52$

3-استنتاج إشارة $g(x)$:

من تغيرات $g(x)$ ومما سبق نستنتج

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

f- الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$$

1- حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(-x+\frac{3+2\ln x}{x}\right)$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\frac{1}{x}(-x^2+3+2\ln x)\right]$$
$$=\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}\right)\times\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(-x^2+3+\ln x)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}-x+\frac{3+2\ln x}{x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right)$$

بالتزايد المقارن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

2-أ-بيان أنه مهما كان $x\in]0;+\infty[$ فإن:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=-1+\frac{2-3-2\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{-x^2-2\ln x-1}{x^2}$$
$$f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

2-ب- جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

2-جـ التحقق من أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{2\ln\alpha+3}{\alpha}$$

للوصول إلى العبارة المطلوبة نحاول التخلص من

لدينا مما سبق:

$g(\alpha)=0$ أي $1+\alpha^2+2\ln\alpha=0$

$$2\ln\alpha=-\alpha^2-1$$

ومنه:

بتعويض عبارة $2\ln\alpha$ في عبارة $f(\alpha)$ نجد

$$f(\alpha)=-\alpha+\frac{3-1-\alpha^2}{\alpha}$$
$$=-\alpha+\frac{2}{\alpha}-\alpha$$
$$f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$$

تعيين حصرا لـــه

$$0.52<\alpha<0,53$$
$$-1,06<-2\alpha<-1,.04\ \ldots\ldots(1)$$
$$3,77<\frac{2}{\alpha}<3,84\ \ldots\ldots(2)$$

بجمع (1) و(2) طرفا لطرف نجد:

$$2,71<f(\alpha)<2.81$$

3-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3+2\ln x}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x}\right]=0$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

التفسير البياني: المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

3-ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{3+2\ln x}{x}$$

$x>0$ في المجال $]0;+\infty[$ ومنه ندرس إشارة $3+2\ln x$

$$3+2\ln x>0$$
$$\ln x>-\frac{3}{2}$$
$$x>e^{-\frac{3}{2}}$$

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)-y$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

الوضعية

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]0,e^{-\frac{3}{2}}[$

(C_f) فوق (Δ) على المجال $]e^{-\frac{3}{2}};+\infty[$

(C_f) يقطع (Δ) عند $x = e^{-\frac{3}{2}}$

3-جـ برهان أن (C_f) يقبل مماس (T) يوازي (Δ)

أي أن معامل توجيه (T) يساوي معامل توجيه (Δ)

ومنه المعادلة $f'(x) = -1$ تقبل حلا ومنه

$$-\frac{g(x)}{x^2} = -1$$

$$-1 - x^2 - 2\ln x = -x^2$$

$$1 + 2\ln x = 0$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}}$$

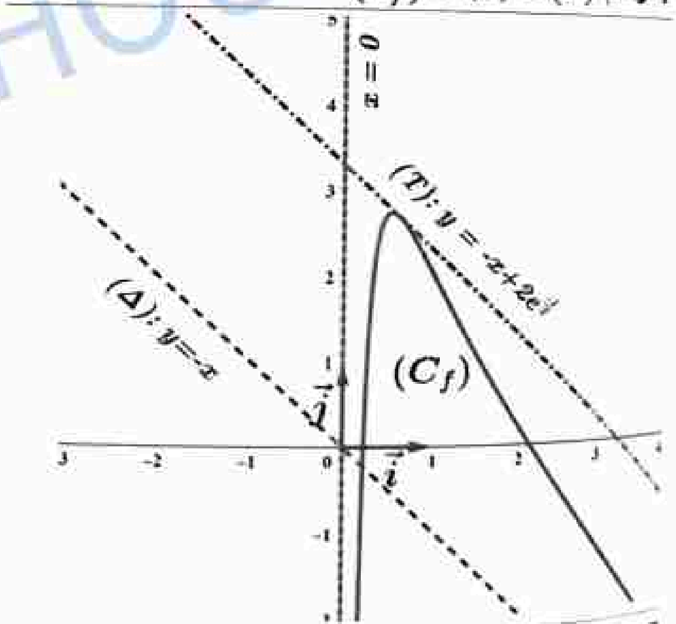
ومنه (C_f) يقبل مماسا يوازي (Δ)عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$

ولدينا $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}}$

$$y = -1\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) - e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}}$$

$$(T):\ y = -x + 2e^{\frac{1}{2}}$$

4-رسم (T) و (Δ) و (C_f)



5-المناقشة البيانية للمعادلة

$$3 + 2\ln x - mx = 0$$

$$3 + 2\ln x - mx = 0$$

$$3 + 2\ln(x) = mx$$

$$-x + \frac{3 + 2\ln x}{x} = m - x$$

$$f(x) = -x + m$$

حلول المعادلة $f(x) = -x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (Δ_m) ذو المعادلة

$$y = -x + m$$

نعتمد على $(T):\ y = -x + 2e^{\frac{1}{2}}$

-المناقشة:

لما $m \in]-\infty ; 0]$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة واحدة ومنه للمعادلة حلا وحيدا

لما $m \in]0; 2e^{\frac{1}{2}}[$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين ومنه للمعادلة حلين

لما $m = 2e^{\frac{1}{2}}$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان ومنه للمعادلة حلا مضاعف

لما $m \in]2e^{\frac{1}{2}}; +\infty[$ فإن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان ومنه المعادلة لا تقبل حلولا

III- لدينا $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]dx$

1- بيان أن $u_n > 0$

لدينا: $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]dx$

ولدينا: $f(x) + x = \frac{3+2\ln x}{x}$

وهو عدد موجب على المجال $[1; +\infty[$

ومنه فإن $f(x) + x$ موجبة على المجال $[e^n; e^{n+1}]$

أي: $u_n > 0$

2- التفسير الهندسي لـ u_0

$$u_0 = \int_1^{e^1} [f(x) + x]dx$$

ومنه التفسير الهندسي لـ u_0: هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمان ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = e$

3-حساب u_n بدلالة n

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3 + 2\ln x}{x}\right] dx$$

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right] dx$$

$$= [3\ln x + (\ln x)^2]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

لأن $\frac{3}{x}$ دالتها الأصلية $3\ln x$ و $\frac{2\ln x}{x}$ دالتها الأصلية $(\ln x)^2$

$$u_n = 3(n+1) + (n+1)^2 - 3n - n^2$$

$$u_n = 2n + 4$$

4-حساب S_n

S_n مجموع متتالية حسابية أساسها $r = 2$ و $u_0 = 4$

$$S_n = \frac{(n+1)}{2}(U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2}(2n+8)$$

$$= (n+1)(n+4)$$

91. بكالوريا 2016 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية باك 2016 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

I- φ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها

2- بين أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 ثم تحقق أن: $2{,}79 < \alpha < 2{,}80$

3-استنتج إشارة $\varphi(x)$ على$\mathbb{R}$

II- f و g الدالتان العدديتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x - 1)e^{-x+1}$

$$g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2- بين أن للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له

3-ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f)

4-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) - g(x) = \frac{(2x - 1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}$$

4-ب- ادرس إشارة الفرق $f(x) - g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g)

4-جـ- باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي x: $\int_1^x f(t)dt$

4-د-احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = 2$

III-1- احسب $f''(x)$، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$ أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم ($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f)

2- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$$f^n(x) = (-1)^n[2x - (2n + 1)]e^{1-x}$$

3-(u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^n(1)$

3-أ- احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k المجموع : $u_k + u_{k+1}$

3-ب- استنتج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$

الحل

I- φ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\varphi(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1$$

1-أ- حساب النهايات

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x\left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) - 1\right)$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

إذن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1$

1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة φ

الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$\varphi'(x) = (2x - 1)e^{-x+1} - e^{-x+1}(x^2 - x + 1)$

$\varphi'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x+1}$

إشارة المشتقة من إشارة $(-x^2 + 3x - 2)$

(لأن $e^{-x+1} > 0$)

المعادلة $-x^2 + 3x - 2 = 0$ لها جذرين هما 1 و 2

-جدول تغيرات $\varphi(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$3e^{-1}$	$\searrow$	-1

الدالة φ متناقصة على المجال $]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

الدالة φ متزايدة تماما على $[1; 2]$

2- بيان ان المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا مختلفا عن 1

لدينا $\varphi(1) = 0$ والدالة $\varphi(x)$ مستمرة ومتناقصة على $]2; +\infty[$

و $\begin{cases} \varphi(2) = 3 - e^{-1} - 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = -1 \end{cases}$

و $\varphi(2) \times \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حل وحيد في المجال $]2;+\infty[$

التحقق أن $2,79<\alpha<2,8$

بما أن $]2,79;2,8[\in]2;+\infty[$

ولدينا $\begin{cases}\varphi(2,8)=-0,001\\ \varphi(2,79)=0,001\end{cases}$

و $\varphi(2.79)\times\varphi(2.8)<0$

ومنه المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل حلا α حيث

$$2.79<\alpha<2,8$$

استنتاج إشارة $\varphi(x)$

x	$-\infty$		1		α		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

II- $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-1)e^{-x+1}=(-\infty)(+\infty)$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x+1}=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)\right]$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

1-ب- دراسة اتجاه تغير f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=2e^{-x+1}-e^{-x+1}(2x-1)$$
$$=(-2x+3)e^{-x+1}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(-2x+3)$

إشارة $f'(x)$ وجدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(-2x+3)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2e^{\frac{-1}{2}}$	$\searrow$	0

2- البرهان أن لـ (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا عند $x=1$

حتى يكون لـ (C_f) و (C_g) مماس مشترك عند $x=1$ بحيث

$(T_1): y_1=f'(1)(x-1)+f(1)$

$(T_2): y_2=g'(1)(x-1)+g(1)$

بما أن T_1 ينطبق على T_2 يعني أن $y_1=y_2$

أي: لدينا $f'(1)=g'(1)$ و $g(1)=f(1)$

لدينا $f'(1)=1$ و $f(1)=1$

و $g'(x)=\frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2}$

ومنه $g'(1)=1=f'(1)$ ومنه $f(1)=g(1)$

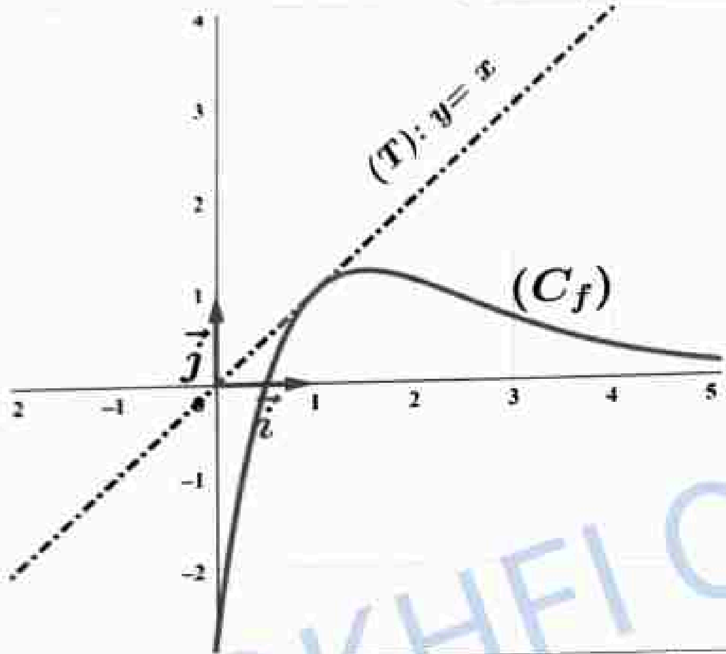
و $f'(1)=g'(1)$ اذن $y_1=y_2$

ومنه للمنحنى (C_f) (C_g) نفس المماس T

إيجاد معادلة المماس

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)$$
$$y=x-1+1$$
$$y=x$$

3-رسم (C_f) و (T)



4-أ- البرهان أن من اجل $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(2x-1)e^{-x+1}(x^2-x+1)-(2x-1)}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{(2x-1)[(x^2-x+1)e^{-x+1}-1]}{x^2-x+1}$$
$$f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)Q(x)}{x^2-x+1}$$

4-ب- دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$

إشارة الفرق من إشارة $\frac{(2x-1)Q(x)}{x^2-x+1}$

$x^2-x+1=0 \Leftarrow \Delta=-3<0$ ومنه إشارتها من إشارة (x^2)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C_g)

(C_f) فوق (C_g) على المجال $]\frac{1}{2};1[\cup]1;\alpha[$

(C_f) تحت (C_g) على المجال $]-\infty;\frac{1}{2}[\cup]\alpha;+\infty[$

(C_f) يمس (C_g) عند $x=1$

(C_f) يقطع (C_g) عند $x=\frac{1}{2}$ و $x=\alpha$

4-جـ- الحساب باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\int_1^x f(t)dx=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt$$

المكاملة بالتجزئة $\int uv'=[u.v]-\int u'v$

u:	$2t-1$	u':	2
v:	$-e^{-t+1}$	v':	e^{-t+1}

$$\int_1^x f(t)dx$$

$$=[-(2t-1)e^{-t+1}]_1^x-\int_1^x 2(-e^{-t+1})dt$$

$$=(-2x+1)e^{-x+1}-(-1)e^0+2[-e^{-t+1}]_1^x$$

$$=(-2x+1)e^{-x+1}+1+2[-e^{-x+1}+1]$$

$$=(-2x+1)e^{-x+1}+1-2e^{-x+1}+2$$

$$=(-2x-1)e^{-x+1}+3$$

4-د-حساب مساحة الحيز A

$$A=\int_1^2[f(x)-g(x)]dx$$

$$A=\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2 g(x)dx$$

لدينا

$$\int_1^2 f(x)dx=[(-2x-1)e^{-x+1}+3]_1^2=-5e^{-1}+3$$

ولدينا $g(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

دالتها الأصلية $G(x)=\ln(x^2-x+1)$

$$\int_1^2 g(x)dx=\ln(3)-\ln 1=\ln(3)$$

ومنه

$$A=-5e^{-1}+3-\ln 3$$

1-حساب $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$

$$f''(x)=(2x-5)e^{-x+1}$$

$$f^{(3)}(x)=-(2x-7)e^{-x+1}$$

$$f^{(4)}(x)=(2x-9)e^{-x+1}$$

التخمين حول عبارة $f^{(n)}(x)$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n[2x-(2n+1)e^{1-x}]$$

2- البرهان بالتراجع عن عبارة $f^{(n)}(x)$

نعتبر الخاصية $p(n)$ حيث

$$p(n): f^{(n)}=-(1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x}$$

من اجل $n=1$ لدينا

$$f^{(1)}=-1(2x-3)e^{1-x}=(-2x+3)e^{1-x}$$

$$=f'(x)$$

ومنه $p(n)$ محققة من اجل $n=1$

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n\in\mathbb{N}^*$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا:

$$f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}[2x-(2(n+1)+1)]e^{1-x}$$

$$=(-1)^{n+1}[2x-(2n+3)]e^{1-x}$$

ولدينا:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x}$$

$$(f^{(n)}(x))'=(-1)^n[-2x+2-2n+1]e^{1-x}$$

$$=(-1)^n[-2x+(2n+3)]e^{1-x}$$

$$=(-1)^{n+1}[2x-(2n+3)]e^{1-x}$$

ومنه $(f^n(x))'=f^{n+1}(x)$

ومنه الخاصية $p(n)$ محققة من أجل $n\in\mathbb{N}^*$

3-أ- حساب المجموع u_k+u_{k+1}

$$u_k+u_{k+1}=(-1)^k(-2k+1)+(-1)^{k+1}[-2k-1]$$

$$=(-1)^k(2)$$

3-ب- استنتاج S_n بدلالة n

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_{2n}$$

عدد الحدود S_n هو $2n-1+1=2n$

$$S_n=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots.+(u_{2n-1}+u_{2n})$$

لكن لدينا $u_k+u_{k+1}=2(-1)^k$

ومنه

$$u_1+u_2=2(-1)^1$$

$$u_3+u_4=2(-1)^3$$

$$u_{2n-1}+u_{2n}=2(-1)^{2n-1}$$

ومنه تصبح S_n

$$S_n=\underbrace{-2-2-2-\cdots-2}_{\text{متتالية ثابتة}}$$

$$S_n=-2\left(\frac{\text{عدد الحدود}}{2}\right)=-2n$$

92. بكالوريا 2015 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2015 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

f الدالة المعرفة بـ: $f(0)=1$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f(x)=1-x^2\ln x$$

(C_f) منحنى الدالة f الممثل في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين

1-ب- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\frac{f(x)-1}{x}$، ثم فسر النتيجة هندسيا

2-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3-أ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0; +\infty[$

3-ب- تحقق أن $1,531 < \alpha < 1,532$

4-نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = f(|x|)$

(C_g) المنحنى الممثل للدالة g في نفس المعلم $(O\,; \vec{i}; \vec{j})$

4-أ- ادرس شفعية الدالة g

4-ب- أنشئ المنحنى (C_g) على المجال $[-2; 2]$

5-باستعمال المكاملة بالتجزئة، عين الدالة الأصلية للدالة $x \to x^2 \ln x$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1

6-t عدد حقيقي ينتمي الى المجال $]0\,; \alpha]$ نضع

$$F(t) = \int_t^{\alpha} f(x)dx$$

6-أ-اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة t و α

6-ب-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $]0; \alpha]$،

$$F(t) = \frac{-3tf(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

6-جـ-احسب $\lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} F(t)$

7-m عدد حقيقي ينتمي الى المجال $]0; \alpha]$

$S(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ O ونصف القطر m، نفرض أن مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب:

$x = -\alpha$ و $x = \alpha$ ، هي: $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)ua$

(ua وحدة المساحات)

7-أ-عين القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون

$S(m) = 2\mathcal{A}$

7-ب-علما أن $3,140 < \pi < 3,142$ أعط حصرا للعدد m

الحل

f دالة معرفة بـ: $f(0) = 1$ ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$

$f(x) = 1 - x^2 \ln x$

1-أ- دراسة استمرارية f عند 0 من اليمين

تكون f مستمرة عند a إذا كان

$$\lim_{\substack{< \\ x \to a}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to a}} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} (1 - x^2 \ln x)$$

لدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} x^2 \ln x = 0$

ومنه

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 1 = f(0)$$

ومنه f مستمرة عند 0 من اليمين

1-ب- حساب $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x)-1}{x}$

$$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{(1 - x^2 \ln x) - 1}{x} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} -x \ln x = 0$$

-التفسير الهندسي:

أي (C_f) يقبل نصف مماس (T) معامل توجيهه 0 معادلته $y = 1$ و $x > 0$

2-أ- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [1 - x^2 \ln x] = -\infty$$

2-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = -x(2 \ln x + 1)$$

إشارة $f'(x)$ وتغيرات $f(x)$

$$x > e^{-\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow (2 \ln x + 1) > 0$$
$$x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x > 0$$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-x$		$-$		$-$	
$2\ln(x) + 1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2e}$	$\searrow$	$-\infty$

3-أ- البرهان أن $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]0; +\infty[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

و
$$\begin{cases} f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2e} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$$

و
$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \times \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0$$

و في المجال $]0; e^{-\frac{1}{2}}]$ $f(x) > 0$

ومنه حسب (مبرهنة القيم المتوسطة) المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

3-ب- التحقق:

لدينا $\begin{cases} f(1{,}532) = -0{,}001 \\ f(1{,}531) = 0{,}002 \end{cases}$

و $f(1{,}531) \times f(1{,}532) < 0$

ومنه $1{,}531 < \alpha < 1{,}532$

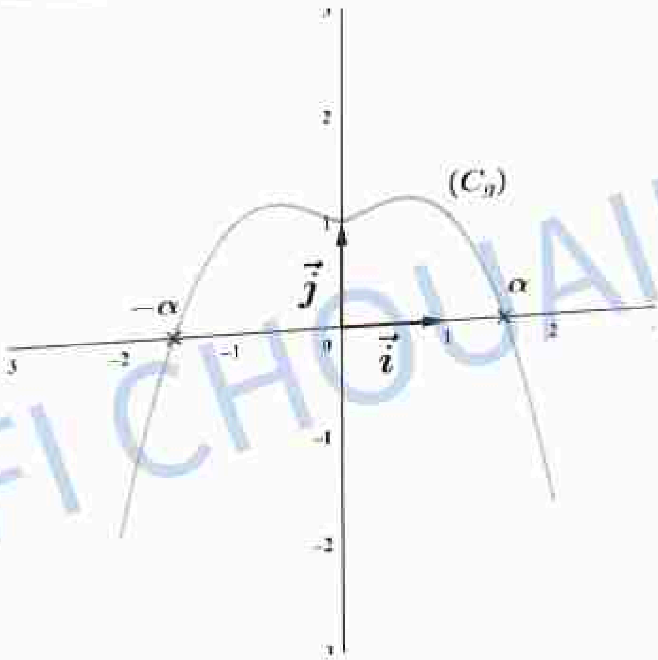
4-الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = f(|x|)$

-أ-شفعية الدالة g :

$$g(-x) = 1 - (-x)^2 \ln|-x| = 1 - x^2 \ln|x|$$
$$g(-x) = g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية و (C_g) يكون متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

4-أ- رسم (C_g) انطلاقا من (C_f)



$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln x = f(x) : x \geq 0 \\ -1 + x^2 \ln(-x) = -f(x) : x \leq 0 \end{cases}$$

(C_g) يكون مطابق لـ (C_f) لما $x \geq 0$

(C_g) يكون مناظر لـ (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب لما $x \leq 0$ لأن g دالة زوجية

5-تعيين دالة اصلية لـ $x \to x^2 \ln x$ بالمكاملة بالتجزئة

قانون المكاملة بالتجزئة

$$\int_b^a u(x).\, v'(x)dx$$
$$= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

نضع:

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{1}{3}x^3$	$v'(x) = x^2$

$$\int_1^x (t^2 \ln(t))dt = \left[\tfrac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^x - \int_1^x \tfrac{1}{t} \times \tfrac{1}{3}t^3\, dt$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^x - \tfrac{1}{3}\int_1^x t^2 dt$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}t^3 \ln t\right]_1^x - \left[\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)t^3\right]_1^x$$
$$= \left(\tfrac{1}{3}x^3 \ln x\right) - 0 - \left(\tfrac{1}{9}x^3 - \tfrac{1}{9}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{9}$$

وهي الدالة الأصلية لـ $x \to x^2 \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 1$

6-أ-عبارة $F(t)$ بدلالة α و t

$$F(t) = \int_t^\alpha f(x)dx$$
$$F(t) = \int_t^\alpha f(x)dx = \int_t^\alpha (1 - x^2 \ln x)dx$$
$$= \left[x - \left(\tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + \tfrac{1}{9}\right)\right]_t^\alpha$$
$$F(t) = \left(\alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha + \tfrac{1}{9}\alpha^3\right) - \left(t - \tfrac{1}{3}t^3 \ln t + \tfrac{1}{9}t^3\right)$$

6-ب- اثبات العبارة $F(t)$

$$F(t) = \alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 \ln\alpha + \tfrac{1}{9}\alpha^3 - t + \tfrac{1}{3}t^3 \ln t - \tfrac{1}{9}t^3$$
$$F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha^3 \ln\alpha + \alpha^3 - 9t + 3t^3 \ln t - t^3}{9}$$

مما سبق لدينا $f(\alpha) = 0$ أي $ln\alpha = \frac{1}{\alpha^2}$

نعوض قيمة $\ln\alpha$ في $F(t)$ يصبح لدينا

$$F(t) = \frac{9\alpha - 3\alpha + \alpha^3 - 9t + 3t^3 \ln t - t^3}{9}$$
$$F(t) = \frac{-3t(1 - t^3 \ln t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$
$$F(t) = \frac{-3tf(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

6-جـ- $\lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} F(t)$

$$\lim_{\substack{> \\ t \to 0}} F(t) = \lim_{\substack{> \\ t \to 0}} \left(\frac{-3tf(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}\right)$$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ t \to 0}} f(t) = 1$ ومنه:

$$\lim_{\substack{> \\ t \to 0}} F(t) = \frac{\alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

7-أ-تعيين القيمة المضبوطة لـ m حتى يكون $S(m) = 2A$

لدينا m هو نصف قطر الدائرة $S(m)$ أي:

$$S(m) = \pi m^2$$
$$S(m) = 2A$$
$$\Rightarrow \pi m^2 = \frac{4}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)$$
$$\Rightarrow m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}}$$

6-ب-تعيين حصرا لـ m

لدينا $3.140 < \pi < 3,142$

$$\Rightarrow \frac{1}{3.142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3,140} \ldots\ldots (1)$$

ولدينا

$$1.531 < \alpha < 1,532$$
$$9,186 < 6\alpha < 9.172$$
$$3,58 < \alpha^3 < 3,595$$
$$12,77 < 6\alpha + \alpha^3 < 12,78 \ldots\ldots (2)$$

بضرب (2) في (1) والتجذير والضرب في $\frac{2}{3}$ نحصل على

$$1,344 < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}} < 1,346$$
$$1,344 < m < 1,346$$

.93 بكالوريا 2015 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية + مناقشة دورانية باك 2015 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

f الدالة المعرفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; 0[$:

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1-ادرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليسار

2- احسب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

3-أ- احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

4-أ- بين أنه $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

4-ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلة له

5- g الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

5-أ-احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

5-ب-ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

6-أ- بين من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty; 0[$ أن: $f(x) > x$

6-ب- استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ)

6-جـ أنشئ المنحنى (C_f)

7-(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن اجل كل عد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

7-أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 0$

7-ب- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n)

7-جـ بين أن المتتالية (u_n) متقاربة.

ثم عين $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

8- m عدد حقيقي. h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ:

$$h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$$

8-أ- احسب $h'_m(x)$ حيث h'_m هي الدالة المشتقة للدالة h_m

8-ب- باستعمال المنحنى (C_f) ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ،عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

الحل

f دالة معرفة بـ: $\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}\,;\, x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- دراسة استمرارية f على يسار 0

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} (x-1)e^{\frac{1}{x}}$$

نضع $t = \frac{1}{x} \Leftarrow x = \frac{1}{t}$

ومنه لما $x \overset{<}{\to} 0$ فإن: $t \to -\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{1}{t} - 1\right)e^t$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{e^t}{t} - e^t = 0 = f(0)$$

ومنه الدالة f مستمرة عند 0 من اليسار

2- حساب $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)$$

نضع $x = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t = \frac{1}{x}$

ومنه لما $x \to 0$ فإن: $t \to -\infty$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \to -\infty} (e^t - te^t) = 0$$

الدالة f تقبل الاشتقاق على يسار 0

-التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل في المبدأ 0

3-أ- حساب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-1)e^{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - 1\right) e^t$$
$$= -\infty$$

3-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty;0[$ ودالتها المشتقة $f'(x)$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}(x-1)$$
$$= \left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}$$

-إشارة $f'(x)$

لدينا $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} > 0$ على المجال $]-\infty;0[$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x^2 - x + 1$

$x^2 - x + 1 = 0 \Leftarrow \Delta = -3 < 0$ ومنه إشارة $x^2 - x + 1$ موجبة أي f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

-جدول تغيرات f

x	$-\infty$	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0

4-بيان أن $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to -\infty} \left((x-1)e^{\frac{1}{x}} - x\right)$$

ح ع ت من الشكل $(+\infty - \infty)$

نضع $x = \frac{1}{t} \Leftarrow t = \frac{1}{x}$

لما $t \overset{<}{\to} 0 \Leftarrow x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - x) = \lim_{t \overset{<}{\to} 0} \left(\left(\frac{1}{t} - 1\right)e^t - \frac{1}{t}\right)$$

$$= \lim_{t \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{e^t}{t} - e^t - \frac{1}{t}\right)$$
$$= \lim_{t \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{(e^t-1)}{t} - e^t\right)$$

طريقة العدد المشتق $\lim_{t \to 0} \left(\frac{(e^t-1)}{t}\right) = 1$

ومنه: $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

4-ب- استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$

بما أن $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

إذن: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته $y = x$

5-أ-حساب $\lim_{x \to -\infty} g(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\right)$$

نضع $x = \frac{1}{t} \Leftarrow t = \frac{1}{x}$

ومنه لما $t \overset{<}{\to} 0 \Leftarrow x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{t \overset{<}{\to} 0} (e^t - te^t) = 1$$

5-ب-دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ ودالتها المشتقة

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x) - f(x)}{x^2}$$
$$g'(x) = \frac{\left(x\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} - (x-1)e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$$

-إشارة $g'(x)$: لما $x < 0$

لدينا $x^2 > 0$ و $e^{\frac{1}{x}} > 0$ و $\frac{1}{x} < 0$

ومنه $g'(x) < 0$ من اجل كل x من $]-\infty;0[$

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

-جدول تغيرات g

x	$-\infty$ $\qquad$ 0
$g'(x)$	$-$ $\qquad$ 0
$g(x)$	1 ↘ 0

6-أ-البرهان أن $f(x) > x$

من جدول تغيرات الدالة g نجد أن $0 < g(x) < 1$

و لدينا $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

ومنه $0 < \frac{f(x)}{x} < 1$

نضرب طرفي المتراجحة في x نجد:

$0 > f(x) > x$ أي $f(x) > x$ (لأن $x < 0$)

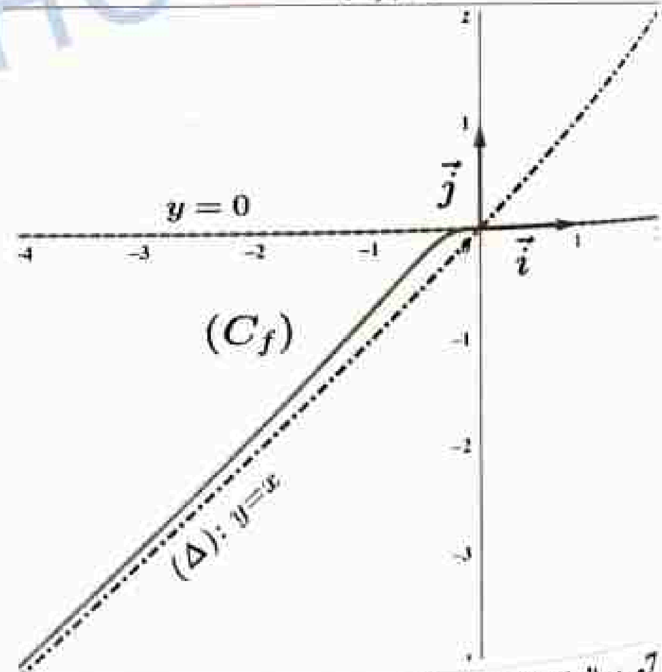
6-ب-استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

لدينا معادلة المستقيم $(\Delta): y = x$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ في المجال $]-\infty; 0[$

ولدينا من السؤال السابق $f(x) > x$ معناه $f(x) - x > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ)

6-جـ انشاء المنحنى (C_f):



7- u_n المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_n < 0$

لدينا $u_{n+1} = (u_n - 1)e^{\frac{1}{u_n}}$

.تحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = -3$ ومنه $-3 < 0$ ومنه الخاصية محققة

-نفرض أن $u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي ونبرهن صحة الخاصية من أجل u_{n+1}

$u_n < 0$ ومنه $f(u_n) < 0$

لأن $f(x)$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 0[$

ومنه فإن $u_{n+1} < 0$

ومنه: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $u_n < 0$

7-ب- تحديد اتجاه تغير المتتالية

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

ولدينا مما سبق $f(x) > x$ أي $f(x) - x > 0$

ومنه

$$f(u_n) - u_n > 0$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

-بيان أن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 فهي متقاربة نحو نهاية l

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

ومنه:

$$f(l) = l$$

بحل المعادلة نتحصل على $l = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

8- m عدد حقيقي h_m الدالة ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty, 0[$ بـ:

$$h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$$

أ-حساب $h'_m(x)$

لدينا

$$h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right) - m$$

$$= e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - m$$

$$= \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}} - m$$

$$h'(x) = \frac{f(x)}{x} - m$$

8-ب-المناقشة البيانية لحلول المعادلة $h'_m(x) = 0$

$$\frac{f(x)}{x} - m = 0$$

$$f(x) = mx$$

المناقشة البيانية لحلول المعادلة هي "فواصل " نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = mx$

-المناقشة:

-إذا كان $m \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ فإن المعادلة لا تقبل حلول

-إذا كان $m \in]0;1[$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد

94. بكالوريا 2014 الرياضيات

اليوتيوب: حل مسألة أسية شاملة باك 2014 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

I-g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2-x)e^{x} - 1$$

1- ادرس تغيرات الدالة g

2- بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$ و $1{,}8 < \beta < 1{,}9$

3-استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II-f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسر النتيجتين هندسيا

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^{x}-x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3-بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4-احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

5-λ عدد حقيقي أكبر او يساوي 1

5-أ-احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث:

$$a(\lambda) = \int_{1}^{\lambda} [f(x) - 1]dx$$

5-ب-احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ الى $+\infty$

الحل

I-g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$g(x) = (2-x)e^{x} - 1$$

1- دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2-x)e^{x} - 1$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (2e^{x} - xe^{x} - 1) = 0 - 0 - 1$$
$$= -1$$

لأن $\lim_{x\to-\infty} x^{n}e^{x} = 0$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ م م افقي لـ (C_g) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^{x} - 1$$
$$= -\infty$$

المشتقة $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$g'(x) = (-x+1)e^{x}$

$e^{x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-x+1)$

إشارة $g'(x)$ وجدول تغيرات $g(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	$-\infty$

2- بيان ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين α و β

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1{,}2\,;-1{,}1[$

و $\begin{cases} g(-1.1) = 0.031 \\ g(-1.2) = -0.036 \end{cases}$

و $g(-1{,}1) \times g(-1{,}2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1[$

بنفس الطريقة نتحقق من أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1;+\infty[$

3-استنتاج إشارة $g(x)$

من جدول تغيرات الدالة g والسؤال السابق لدينا

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II-f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}-x}$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}-1}{e^{x}-x} = 0$$

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب افقي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2- المشتقة

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$$

بعد التبسيط نجد

$$f'(x) = \frac{-xe^x+2e^x-1}{(e^x-x)^2} = \frac{(2-x)e^x-1}{(e^x-x)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

جدول تغيرات $f(x)$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	1

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha] \cup [\beta;+\infty[$.

الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\alpha;\beta]$

3-بيان أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha-1}{e^\alpha-\alpha}$$

نحاول التخلص من e^α
لدينا مما سبق:

$$g(\alpha) = 0$$
$$(2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0$$
$$e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$$

نعوض قيمة e^α في عبارة $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}$$

بنفس الطريقة نجد: $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1}$

-حصر $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

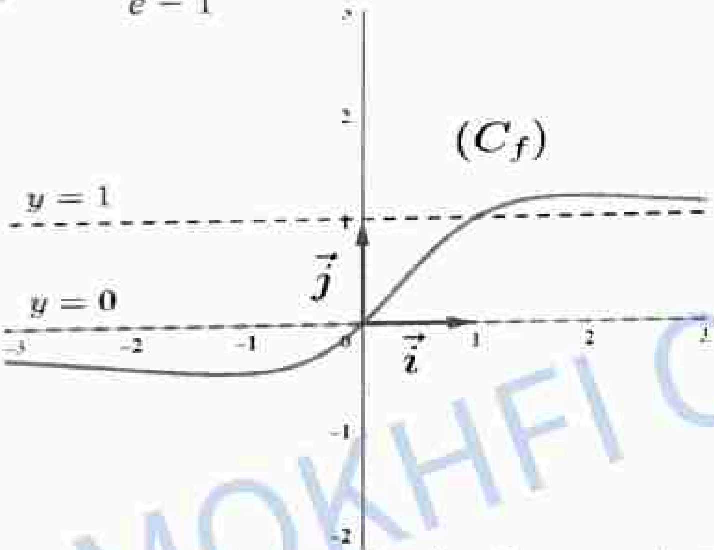
$$-1,2 < \alpha < -1,1$$
$$-2,2 < \alpha-1 < -2,1$$
$$-\frac{1}{2,1} < \frac{1}{\alpha-1} < -\frac{1}{2,2}$$
$$-0,48 < f(\alpha) < -0,45$$

بنفس الطريقة نقوم بحصر $f(\beta)$ فنجد

$$1,11 < f(\beta) < 1,25$$

4- حساب $f(1)$ والرسم

$$f(1) = \frac{e-1}{e-1} = 1$$



5-أ- λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

حساب $a(\lambda)$ حيث

$$a(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x)-1)dx$$
$$= \int_1^\lambda \frac{e^x-1}{e^x-x} - 1\, dx$$
$$= [\ln(e^x-x)-x]_1^\lambda$$
$$= \ln(1-\lambda e^{-\lambda}) - \ln(e-1) + 1$$

ب-حساب نهاية $a(\lambda)$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda)$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln(e^\lambda-\lambda)-\lambda-\ln(e-1)+1\right)$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}[\ln(e^\lambda-\lambda)+\ln e^{-\lambda}-\ln(e-1)+1]$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}[\ln[e^{-\lambda}(e^\lambda-\lambda)]-\ln(e-1)+1]$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\ln(1-\lambda e^{-\lambda})-\ln(e-1)+1\right)$$
$$= 1-\ln(e-1)$$

لأن: $\lim_{\lambda\to+\infty}(-\lambda e^{-\lambda}) = 0$

95. بكالوريا 2014 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية + التكامل باك 2014 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

ا- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = (1 + 2\ln x)(-1 + \ln x)$$
(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- ادرس تغيرات الدالة f

1-ب- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري)

1-جـ- عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$

2- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - \ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

2-أ- ادرس تغيرات الدالة g

2-ب- عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0;e^2]$

3-نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$h(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$$

3-أ- احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

3-ب- احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x) - g(x)]dx$

الحل

f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x) = (1 + 2\ln x)(-1 + \ln x)$$

1- دراسة تغيرات الدالة f

-1 النهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{x \to 0}[(1 + 2\ln x)(-1 + \ln x)] = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}[(1 + 2\ln x)(-1 + \ln x)] = +\infty$$

-2 المشتقة $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(-1 + \ln x) + \frac{1}{x}(1 + 2\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{(4\ln x - 1)}{x}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط لأن $x > 0$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 4\ln x - 1 > 0$$
$$\Rightarrow \ln x > \frac{1}{4} \Rightarrow x > e^{\frac{1}{4}}$$

إشارة $f'(x)$ وجدول تغيرات $f(x)$

x	0		$e^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	$+\infty$

1-ب- معادلة المماس (Δ) في النقطة ذات الفاصلة

$$y = f'(e)(x - e) + f(e)$$
$$y = \frac{3}{e}(x - e) + 0$$
$$y = \frac{3}{e}x - 3$$

1-جـ- تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل xx'

نحل المعادلة $f(x) = 0$

$$(1 + 2\ln x)(-1 + \ln x) = 0$$

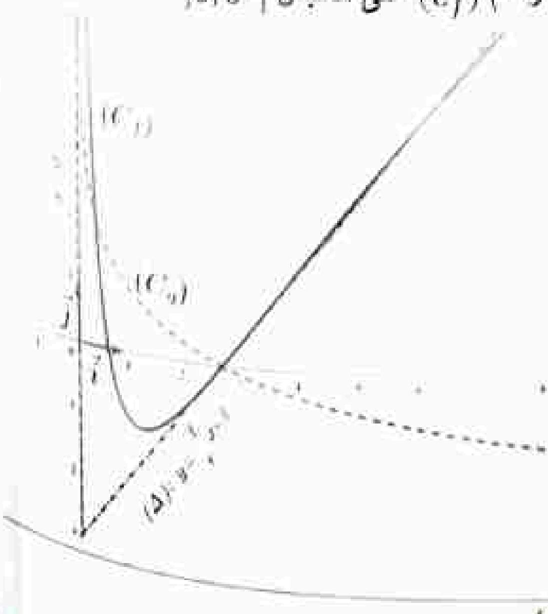
$(1 + 2\ln x) = 0$ أو $(-1 + \ln x) = 0$

$\ln x = -\frac{1}{2}$ أو $\ln x = 1$

$x = e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x = e$

ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين هما $A\left(e^{-\frac{1}{2}};0\right)$ و $B(e;0)$

رسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$



2- g دالة معرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ
$$g(x)=1-\ln x$$

دراسة تغيرات الدالة g

1-النهايات:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}(1-\ln x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-\ln x)=-\infty$$

2- المشتقة
g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة $g'(x)=-\frac{1}{x}$

لدينا $x>0$ ومنه $-\frac{1}{x}<0$ ومنه $g'(x)<0$

جدول تغيرات $g(x)$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

2ب- تعيين الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_g)

لدراسة وضعية منحنيين (C_f) و (C_g) ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-g(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)$$
$$=(1+2\ln x)(-1+\ln x)+(-1+\ln x)$$
$$=(-1+\ln x)(2+2\ln x)$$

$x>e \Leftarrow -1+\ln x>0$

$x>e^{-1} \Leftarrow 2+2\ln x>0$

ومنه الوضعية تكون كالآتي

(C_f) فوق (C_g) على المجال $]0;e^{-1}[\cup]e;+\infty[$

(C_f) تحت (C_g) على المجال $]e^{-1};e[$

(C_f) يقطع (C_g) عند $x=e^{-1}$ و $x=e$

رسم (C_g): (انظر التمثيل السابق)

3-أ- الدالة h معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$$

3-أ- حساب $h'(x)$:

الدالة h قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$h'(x)=(\ln x)^2+\frac{2\ln x(x)}{x}-2\left(\ln x+\frac{1}{x}(x)\right)+2$$
$$=(\ln x)^2+2\ln x-2\ln x-2+2$$

ومنه الدالة الأصلية للدالة
$$h'(x)=(\ln x)^2$$
$(\ln x)^2$ هي الدالة $h(x)$

3ب-حساب العدد $\int_{\frac{1}{e}}^{e}(f(x)-g(x))dx$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}(f(x)-g(x))dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}[(1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)]dx$$
$$=\int_{\frac{1}{e}}^{e}[2(\ln x)^2-2]dx=2\int_{\frac{1}{e}}^{e}[(\ln x)^2-1]dx$$
$$=2[x(\ln x)^2-2x\ln x+2x-x]_{\frac{1}{e}}^{e}$$
$$=2(-4e^{-1})=-8e^{-1}$$
$$=-\frac{8}{e}\,ua$$

96. بكالوريا 2013 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية شاملة باك 2013 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

1- الدالة u معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$u(x)=e^x-3x+4-e$$

1-أ- ادرس اتجاه تغير الدالة u

1-ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $e^x-e>3x-4$

2- الدالة v معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$$

2-أ- بين أن: $v'(1)=0$ (يرمز v' الى الدالة المشتقة للدالة v)

2-ب- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $v(x)\le 0$

2-جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0\,;+\infty[$: $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

3-أثبت أنه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$
$$e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$$

II-الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:
$$f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب: $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

3-احسب $f(1)$ ، ثم مثل المنحنى (C_f) على المجال $]0;\frac{5}{2}]$

(نأخذ: $f(2)\approx 2{,}3$ ، $f(1{,}64)\approx 1$
و $f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 5{,}75$)

4-احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$

الحل

u دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $u(x)=e^x-3x+4-e$

1- دراسة تغيرات الدالة u

1-النهايات

$$\lim_{x\to 0} u(x)=5-e$$

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-3x+4-e)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{3x}{e^x}+\frac{4}{e^x}-\frac{e}{e^x}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

إذن:

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$$

-المشتقة

$$u'(x)=e^x-3$$

إشارة $u'(x)$

$u'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-3>0$

$e^x>3 \Leftrightarrow x>\ln 3$

إشارة $u'(x)$ وتغيرات $u(x)$

x	0	$\ln 3$	$+\infty$
$u'(x)$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$5-e$ ↘	0.98	↗ $+\infty$

1-ب- البرهان أن $e^x-e>3x-4$

نلاحظ من جدول التغيرات أن $u(x)>0$ ومنه
أي $u(x)>0$

$e^x-e-3x+4>0$

$e^x-e>3x-4$

2- الدالة v معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$

2-أ- بيان أن $v'(1)=0$

نقوم باشتقاق الدالة v

$$v'(x)=-9x^2+8x+\frac{1}{x}=\frac{-9x^3+8x^2+1}{x}$$

$$v'(1)=-9(1)^2+8(1)+\frac{1}{1}=0$$

2-ب- إثبات أن $v(x)\le 0$ مهما يكن $x\in]0;+\infty[$

لدينا من السؤال السابق $v'(1)=0$ أي "1" هو جذر لـ $v'(x)$

إذن $v'(x)=\frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x}$

نقوم باستعمال القسمة الإقليدية نجد

$$v'(x)=\frac{(x-1)(-9x^2-x-1)}{x}$$

إذن إشارة $v'(x)$ من إشارة البسط لأن $x>0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$-9x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \Delta=-35<0$ ومنه إشارة العبارة من إشارة a و $a<0$ وبالتالي إشارة المشتقة من إشارة $-(x-1)$

وعليه فالدالة $v(x)$ متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$

لدينا الدالة v تقبل قيمة حدية عظمى عند $x=1$ في

$v(x)\le v(1)$ و $v(1)=0$

وبالتالي $v(x)\le 0$

2-ج- استنتاج أن $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$

لدينا $v(x)\le 0$

أي $-3x^3+4x^2-1+\ln x\le 0$

ومنه $-1+\ln x\le 3x^3-4x^2$

نقوم بقسمة طرفي المتباينة على x^2

$$\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$$

3-إثبات أن $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ من أجل $x\in]0;+\infty[$

لدينا $\frac{-1+\ln x}{x^2}\le 3x-4$ ......(1)

ولدينا $3x-4<e^x-e$ ......(2)

من (1) و (2) نستنتج أن

$$\frac{-1+\ln x}{x^2}<e^x-e$$

ومنه $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$

II- f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$$

1- حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-ex+\frac{\ln x}{x}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-ex)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-\frac{ex}{e^x}\right)$$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

2- البرهان أن الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}$$

لدينا مما سبق $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$

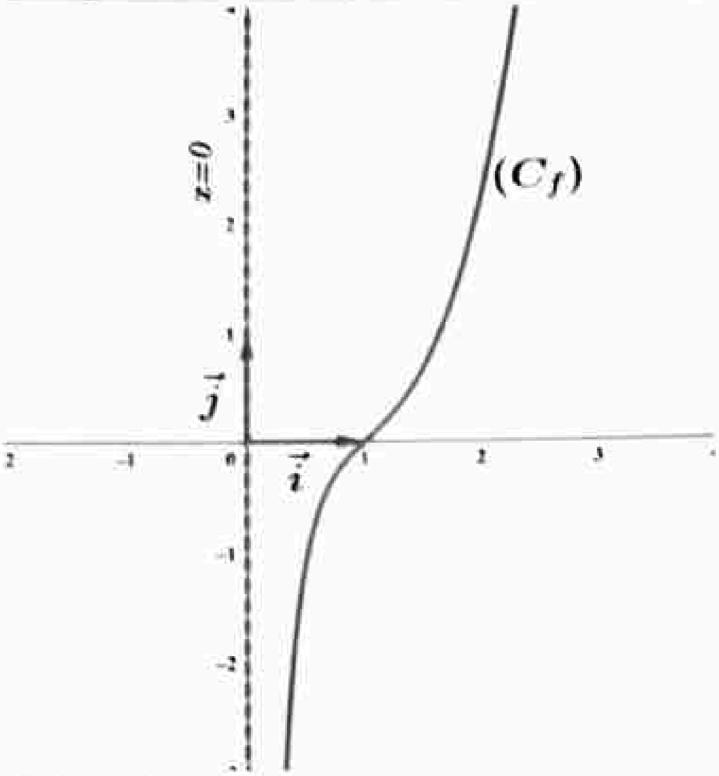
أي $f'(x)>0$

ومنه $f(x)$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

3-حساب $f(1)$ و تمثيل (C_f) على المجال $]0;\frac{5}{2}[$



$$f(1)=0$$

4-حساب المساحة A

لدينا من التمثيل البياني لـ (C_f)

$$A=A_1+A_2$$

حيث A_1 جزء المساحة الواقع تحت محور الفواصل أي في المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$

و A_2 جزء المساحة الواقع فوق محور الفواصل أي المجال $[1;2]$

لما (C_f) تحت محور الفواصل

$$A_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}-f(x)dx$$

ولما (C_f) فوق محور الفواصل

$$A_2=\int_1^2 f(x)dx$$

نقوم بالبحث عن الدالة الأصلية للدالة f

$$F(x)=e^x-\frac{e}{2}x^2+\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$

ومنه

$$A_1=-\left(F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$A_2=F(2)-F(1)$$
$$A=A_1+A_2=1{,}024\ u.a$$

97. بكالوريا 2013 الرياضيات

الموضوع: دالة أسية + المساحات + المتتاليات باك 2013 رياضيات 2

الموضوع الثاني

الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1-أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

1-ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1-\sqrt{2}) \simeq -0{,}25$ و $g(1+\sqrt{2}) \simeq 1{,}43$)

2-أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن أحدهما معدوم والأخر α، حيث: $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$

2-ب- استنتج إشارة $g(x)$، حسب قيم x

II-الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.(وحدة الطول $2cm$)

1-أ- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

1-ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$، مقارب مائل للمنحنى (C_f)عند $+\infty$

1-جـ- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

2-أ- بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = g(x)$.(يرمز بـ f' إلى الدالة المشتقة للدالة f)

2-ب- شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ (نأخذ: $f(\alpha) \simeq -0{,}9$)

3-أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما

3-ب- مثل (Δ) والمماسين والمنحنى (C_f)

3-جـ- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x:

$(x+1)^2 + me^x = 0$

4-الدالة H معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$

4-أ- بين أن H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$

4-ب- أحسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = -1$ و $x = 0$

III- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومنه أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$ (تذكر أن العدد α يحقق $g(\alpha) = 0$)

1- برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n، $-1 \le u_n \le \alpha$

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

3-استنتج أن (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

الحل

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1-أ- حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + (x^2-1)e^{-x}$

نضع $t = -x \Leftarrow x = -t$

لما $x \to -\infty \Leftarrow t \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{t\to+\infty} (1 + (t^2-1)e^{t}) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + (x^2-1)e^{-x}$

$= \lim_{t\to-\infty} (1 + (t^2-1)e^{t}) = 1$

1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$g'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2-1)$

$g'(x) = (-x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

$e^{-x} > 0$ على $\mathbb{R}$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-x^2 + 2x + 1)$

$-x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 8$

ومنه $\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ x_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$

اشارة $g'(x)$ وجدول تغيرات $g(x)$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-0.25	↗	$1,43$	↘	1

2-أ- البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين على $\mathbb{R}$

بما أن الدالة g معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ فإن المعادلة

$g(x) = 0$

تقبل حلا على المجال $]-\infty;1-\sqrt{2}[$ وحلا آخر في المجال $]1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}[$
التحقق أن أحدهما معدوم والآخر α

$g(0)=1+(0-1)e^{0}=0$

بما أن g دالة معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على $]-0,8;-0,7[$

و $\begin{cases} g(-0,7)=-0.027 \\ g(-0,8)=0.198 \end{cases}$

أي $g(-0,8)\times g(-0,7)<0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,8;-0,7[$

2-ب- استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات g ومما سبق

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II- f معرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$$

1-أ- حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-(x+1)^2e^{-x}\right)$$
$$=-\infty-(+\infty)(+\infty)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-(x+1)^2e^{-x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{(x+1)^2}{e^{x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x^2}{e^x}-\frac{2x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)$$
$$=+\infty$$

1-ب- البرهان أن (Δ) مقارب مائل لـ(C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}[x-(x+1)^2\times e^{-x}-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[(x+1)^2e^{-x}]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right]$$
$$=0$$

بما أن $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$ فإن (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

1-جـ دراسة وضعية (Δ) و(C_f)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=-(x+1)^2e^{-x}$$

إذن $f(x)-y<0$ ومنه (C_f) يقع أسفل (Δ) ويمسه في النقطة $A\left(-1;f(-1)\right)$

2-أ- البرهان أن $f'(x)=g(x)$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x)=1-[(2x+2)e^{-x}-e^{-x}(x^2+2x+1)]$$
$$=1-[e^{-x}(2x+2-x^2-2x-1)]$$
$$=1-(-x^2+1)e^{-x}$$
$$=1+(x^2-1)e^{-x}=g(x)$$

2-ب- جدول تغيرات f

لدينا $f'(x)=g(x)$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-0,9$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3-أ- البرهان أن (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما 1

نحل المعادلة $f'(x_0)=1$

$$1+(x_0^2-1)e^{-x}=1$$
$$(x_0^2-1)e^{x_0}=0$$
$$x^2-1=0$$ أي:

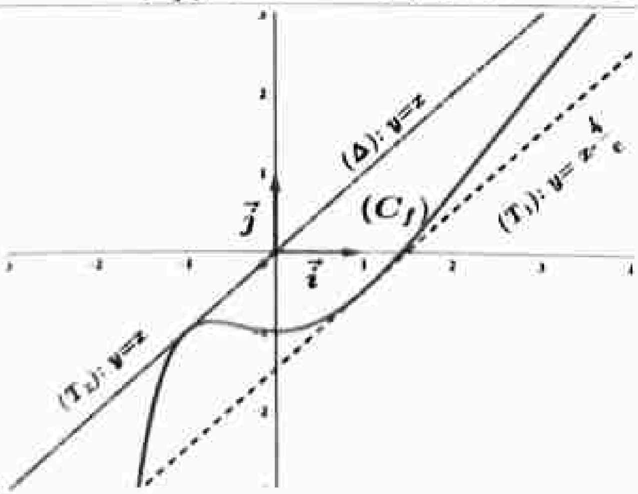
أي $\begin{cases} x_0=1 & \text{اما} \\ x_0=-1 & \text{او} \end{cases}$

معادلة المماسين

$1: y_1=x$

$2: y_2=x-\dfrac{4}{e}$

3-ب- تمثيل (Δ) والمماسين و (C_f)



3-جـ- المناقشة حسب قيم m لحلول المعادلة

$(x+1)^2 + me^x = 0$
$me^x = -(x+1)^2$
$m = -(x+1)^2 e^{-x}$

نضيف x الى طرفي المعادلة

$m + x = x - (x+1)^2 e^{-x}$

تصبح المعادلة: $f(x) = m + x$

حلول المعادلة $f(x) = m + x$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

المناقشة

1) $m \in]-\infty; -\frac{4}{e}[$ للمعادلة حلا وحيدا
2) $m = -\frac{4}{e}$ للمعادلة حلان
3) $m \in]-\frac{4}{e}; 0[$ للمعادلة ثلاث حلول
4) $m = 0$ للمعادلة حل وحيدا
5) $m > 0$ لا يوجد حلول

II-4-H دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$$

بيان أن H دالة اصلية للدالة $x \to (x+1)^2 e^{-x}$

H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$H'(x) = (-2x-4)e^{-x}$
$\quad - e^{-x}(-x^2 - 4x - 5)$
$H'(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$
$H'(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

ومنه H دالة أصلية للدالة $x \to (x+1)^2 e^{-x}$

4-ب- حساب مساحة الحيز (S) المحددة بـ (C_f) و (Δ) والمستقيم $x = -1$ و $x = 0$

$S = \int_{-1}^{0} (y - f(x))dx$
$S = \int_{-1}^{0} [x - (x - (x+1)^2 e^{-x})]$
$S = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x} dx$
$S = [(-x^2 - 4x - 5)e^{-x}]_{-1}^{0}$
$S = (-5 - (-1 + 4 - 5)e^{1})\,(4cm^2)$
$S = (-5 + 2e)(4cm^2)$

III-u_n متتالية معرفة بـ $u_0 = \alpha$ ومن اجل كل n طبيعي $u_{n+1} = f(u_n)$

1- البرهان بالتراجع أن $-1 \le u_n \le \alpha$

نسمي الخاصية $p(n)$

$p(n)$: $\quad -1 \le u_n \le \alpha$

1) من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \alpha$

$-1 \le \alpha \le \alpha$
$-1 \le u_0 \le \alpha$

$p(0)$ محققة

2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل كل n طبيعي

3) نبرهن صحة $p(n+1)$ أي $-1 \le u_{n+1} \le \alpha$

لدينا $-1 \le u_n \le \alpha$

ونعلم أن $f(x)$ متزايدة تماما على المجال $[-1;\alpha]$

ومنه

$f(-1) \le f(u_n) \le f(\alpha)$
$-1 \le u_{n+1} \le -0.9$
$-1 \le u_{n+1} \le \alpha$

ومنه $p(n)$ محققة

2- البرهان أن (u_n) متناقصة

لمعرفة أن (u_n) متناقصة نبرهن أن

$u_{n+1} - u_n < 0$
$u_{n+1} - u_n = u_n - (u_n+1)^2 e^{-u_n} - u_n$
$= -(u_n+1)^2 e^{-u_n}$

ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

إذن (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

3-استنتاج أن (u_n) متقاربة

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد -1 فهي متقاربة نحو نهاية l

-حساب النهاية l

بما أن (u_n) متقاربة فإن

$\lim u_n = \lim u_{n+1} = l$

نحل المعادلة

$u_n = f(u_n) = l$

أي

$l - (l+1)^2 e^{-l} = l$
$-(l+1)^2 e^{-l} = 0$
$(l+1)^2 = 0$
$l = -1$

ومنه $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = -1$

98. بكالوريا 2012 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية باك 2012 شعبة رياضيات (نسخة جديدة)

الموضوع الأول

I-g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2 - xe^x$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن: $0.8 < \alpha < 0.9$

3-عين حسب قيم x إشارة $g(x)$

II-f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

2-أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-ب- بين أن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f)

3-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى كل من (Δ') و (Δ) ، حيث (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

4-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x،

$f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

4-ب- بين أن: $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5-ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f)

6-ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

III-(U_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$U_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$U_{n+1} = f(U_n)$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n $0 \le U_n < \alpha$

2- باستعمال (Δ) و (C_f) مثل على محور الفواصل الحدود: U_0 و U_1 و U_2، ثم خمن اتجاه تغير (U_n)

3-برهن أن المتتالية (U_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها

الحل

I-g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2 - xe^x$$

1- دراسة تغيرات الدالة g

1- النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (2 - xe^x) = 2$$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (2 - xe^x) = -\infty$$

2- المشتقة:

$$g'(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$$

إشارة المشتقة من إشارة $-(x+1)$ لأن، $e^x > 0$

$x < -1 \Leftarrow -x - 1 > 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\nearrow$	$2+e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

2- البرهان أن $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α على $]-\infty; +\infty[$

الدالة g معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

- التحقق أن $0,8 < \alpha < 0,9$

الدالة مستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]0,8\,;0,9[$

$$\begin{cases} g(0,8) = 0.219 \\ g(0,9) = -0.213 \end{cases}$$

ولدينا $g(0,8) \times g(0,9) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,8 < \alpha < 0,9$

3- تعيين إشارة $g(x)$

حسب السؤال السابق وجدول تغيرات $g(x)$ نجد

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$

1- تبيان أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\cdot\frac{2+\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)$$

لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

-التفسير الهندسي:

المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب افقي لـ (C_f) في جوار $+\infty$

2) -حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+2}{e^x+2}=\frac{-\infty+2}{0+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

2-ب- بيان أن (Δ') مقارب لـ (C_f) (بجوار $-\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+1)\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x+2-xe^x-2x-e^x-2}{e^x+2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x-e^x}{e^x+2}\right]$$

بما أن $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

فإن $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$

ومنه (Δ') مقارب مائل لــ (C_f) بجوار $-\infty$

3- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) و (Δ')

1- وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ')

$$f(x)-y=\frac{2x+2}{e^x+2}-(x+1)=\frac{-xe^x-e^x}{e^x-2}=\frac{e^x(-x-1)}{e^x-2}$$

اشارة الفرق من إشارة $-x-1$

$f(x)-y>0$

$-x-1>0 \Leftrightarrow x<-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ')	(C_f) يقطع (Δ')	(C_f) تحت (Δ')	

2- وضعية (C_f) مع (Δ):

$$f(x)-y=\frac{2x+2}{e^x+2}-x=\frac{2x+2-xe^x-2x}{e^x+2}$$

$$f(x)-y=\frac{2-xe^x}{e^x+2}=\frac{g(x)}{e^x+2}$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $g(x)$

الوضعية

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

أ-البرهان ان عبارة $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{2(e^x+2)-e^x(2x+2)}{(e^x+2)^2}=\frac{2e^x+4-2e^x-2xe^x}{(e^x+2)^2}=\frac{4-2xe^x}{(e^x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(2-xe^x)}{(e^x+2)^2}=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

4-ب- بيان أن $f(\alpha)=\alpha$

لدينا $f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{e^\alpha+2}$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ أي $2-\alpha e^\alpha=0\Rightarrow e^\alpha=\frac{2}{\alpha}$

نعوض قيمة e^α في عبارة $f(\alpha)$ فنجد

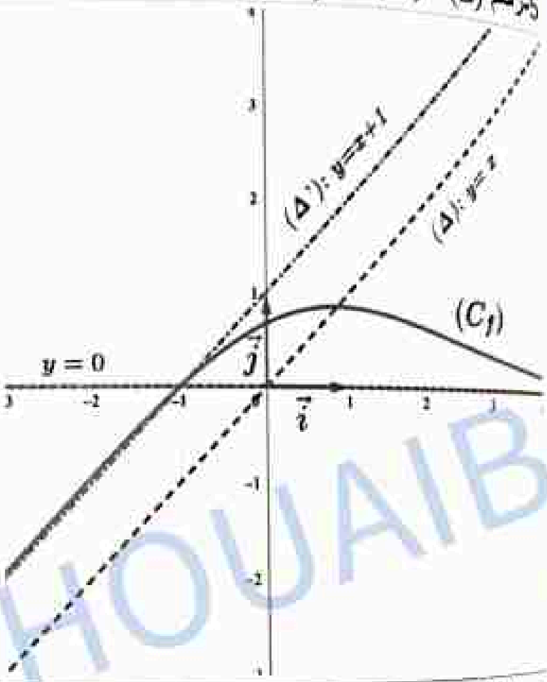
$$f(\alpha)=\frac{2\alpha+2}{\frac{2}{\alpha}+2}=\frac{2\alpha+2}{\frac{2+2\alpha}{\alpha}}$$

ومنه $f(\alpha)=\alpha$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

5-رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f)



مناقشة حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ بيانيا

حلول المعادلة $f(x)=f(m)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y=f(m)$

- إذا كان $m\in]-\infty;-1]$ للمعادلة حل وحيد
- إذا كان $m\in]-1;\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ للمعادلة حلين
- إذا كان $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف

III- (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$u_{n+1}=f(u_n) \text{ و } u_0=0$$

1- البرهان بالتراجع أن $0\leq u_n<\alpha$

1) نسمي الخاصية $p(n)$ حيث $p(n): 0\leq u_n<\alpha$

نبرهن على صحة الخاصية من أجل $n=0$

$u_0=0$ ومنه $0\leq 0<\alpha$

وبالتالي $0\leq u_0<\alpha$

ومنه: $p(0)$ محققة من أجل كل n طبيعي

2) نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن من اجل $n+1$ أي $p(n+1)$ أي: $0\leq u_{n+1}<\alpha$

لدينا من فرضية التراجع: $0\leq u_n<\alpha$

ولدينا f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$ ومنه:

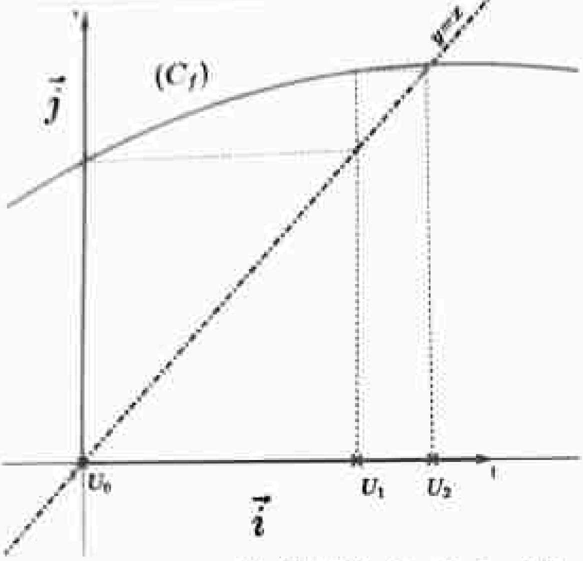
$$f(0)\leq f(u_n)<f(\alpha)$$

$$0\leq\frac{2}{3}\leq u_{n+1}<\alpha$$

ومنه: الخاصية $p(n+1)$ محققة.

ومنه: $0\leq u_n<\alpha$

2- تمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 :



-التخمين: (u_n) متزايدة تماما

3- برهان أن (u_n) متقاربة

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\frac{g(u_n)}{e^{u_n}+2}>0$$

ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

إذن (u_n) متزايدة تماما

بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ α فهي متقاربة نحو العدد α

-حساب $\lim u_n$

بما أن (u_n) متقاربة فإن:

$$\lim u_{n+1}=\lim u_n=l$$

ومنه:

$$f(l)=l$$

$$\frac{2l+2}{e^l+2}=l$$

$$\frac{2l+2-le^l-2l}{e^l+2}=0$$

$$\frac{-le^l+2}{e^l+2}=0$$

$$2-le^l=0$$

$$g(l)=0$$

$$g(l)=g(\alpha)$$

$$\lim u_n=l=\alpha$$

ومنه:

99. بكالوريا 2012 الرياضيات

الموضوع: دالة لوغاريتمية باك 2012 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي: $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

1- ادرس تغيرات الدالة g، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق: $-0.8<\alpha<-0.7$

3-عين حسب قيم x إشارة $g(x)$

4-h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x)=[g(x)]^2$

4-أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$

4-ب- عين إشارة $h'(x)$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h

II-f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{\ln(x+1)}\ ;\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i;j)$.

1- بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ(T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2-أ- بين أنه من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$، $f'(x)=\frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

2-ب- بين أن: $f(\alpha)=2\alpha(\alpha+1)$، ثم عين حصرا لـ$f(\alpha)$

2-جـ احسب $f(3)$ و $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات $f(x)$.

3-أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فان $x-\ln(x+1)\geq 0$

3-ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى المماس (T)

4- عين معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

5- ارسم (T)، (T') و (C_f)

6- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

الحل

I-g دالة معرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $g(x)=2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$

1- دراسة تغيرات الدالة g

النهايات:

$$\lim_{x\to-1} g(x)=\lim_{x\to-1} 2\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left[\frac{2(x+1)\ln(x+1)-x}{x+1}\right]$$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$

بوضع $t=x-1$ نجد $\lim_{t\to 0} t\ln t=0$

ومنه: $\lim_{x\to -1}(x+1)\ln(x+1)=0$

وبالتالي:

$$\lim_{x\to -1^+} g(x)=+\infty$$

المشتقة:

$$g'(x)=2\frac{1}{x+1}-\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2(x+1)-(x+1)+x}{(x+1)^2}=\frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$

لدينا $(x+1)^2\geq 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $2x+1$

حتى يكون $g'(x)\geq 0$

$x>-\frac{1}{2} \Leftarrow 2x+1>0 \Leftarrow$

-إشارة $g'(x)$ وجدول تغيرات $g'(x)$

x	-1		$-\frac{1}{2}$		3
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-2\ln 2$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}+2\ln 4$

الدالة g متناقصة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right]$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};3\right]$

2- بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين

الحل الأول معدوم $g(0)=0$

ولدينا الدالة متناقصة تماما ومستمرة على $]-0,8;-0,7[$

السلسلة القضية

$$\begin{cases} g(-0,8) = 0. \\ g(-0,7) = -0,074 \end{cases}$$ ولدينا

$g(-0,8) \times g(-0,7) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل α حيث $-0,7 > -0.8 < \alpha < -0,7$

خلاصة

المعادلة تقبل حلين أحدهما معدوم و الأخر α حيث:

$-0.8 < \alpha < -0,7$

3-تعيين إشارة $g(x)$

من السؤال السابق وجدول تغيرات $g(x)$:

x	-1		α		0		3
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

4- h دالة معرفة على $]-1;3]$ بـ:

$h(x) = [g(x)]^2$

أ- حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$

$h'(x) = \left[\left(g(x)\right)^2\right]' = 2g'(x) \times g(x)$

ب- تعين إشارة $h'(x)$ وجدول تغيرات $h(x)$

لدينا: $h'(x) = 2g'(x)g(x)$

x	-1		α		$-\frac{1}{2}$		0		3
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$h\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$h(3)$

f-I الدالة المعرفة على $]-1;3]$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)} : x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- بيان أن $f(x)$ تقبل الاشتقاق عند 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)} - 0}{x - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x\ln(x+1)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)}$$
$$= 1$$

لأن $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0

معادلة المماس (T) عند $x = 0$

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = 1(x - 0) + 0$

$y = x$

2-أ بيان أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1;0[\cup]0;3]$

$$f'(x) = \frac{2x\ln(x+1) - \frac{x^2}{x+1}}{[\ln(x+1)]^2}$$
$$= \frac{x\left(2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right)}{[\ln(x+1)]^2}$$
$$= \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $xg(x)$

x	-1		α		0		3
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha;0[\cup]0;3]$

2-ب- بيان أن $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$

$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)}$

نعلم أن: $g(\alpha) = 0$

أي: $2\ln(\alpha+1) - \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0$

ومنه: $\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$

نعوض قيمة $\ln(\alpha+1)$ في $f(\alpha)$ نجد:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} = 2\alpha(\alpha+1)$$

-تعيين حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا: $-0.8 < \alpha < -0,7$

$0,2 < \alpha + 1 < 0,3 \ldots\ldots (1)$

$-1,6 < 2\alpha < -1,4$

$1,4 < -2\alpha < 1,6 \ldots\ldots (2)$

نضرب (1) في (2) نجد

$0,28 < -2\alpha(\alpha+1) < 0,48$

ومنه: $-0,48 < f(\alpha) < -0,28$

2-جـ حساب $f(3)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$

$$f(3) = \frac{9}{2ln2}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = \frac{1}{\ln 0^+} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 0$$

جدول تغيرات f

x	-1		α		0		3
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$f(\alpha)$	↗			$\frac{9}{2ln2}$

3-أ- بيان أن $x - \ln(x+1) \geq 0$

نضع دالة $k(x)$ حيث

$$k(x) = x - \ln(x+1) \ ; x \in]-1;3]$$

ندرس تغيرات $k(x)$

$$k'(x) = \frac{x}{x+1}$$

-إشارة $k'(x)$

x	-1		0		3
$x+1$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$	
$k'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$k(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$3 - ln4$

من جدول تغيرات $k(x)$ نلاحظ أن $k(x) > 0$

3-ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T)

ندرس إشارة الفرق $f(\alpha) - y$

$$f(\alpha) - y = \frac{x^2 - x\ln(x+1)}{\ln(x+1)}$$
$$= \frac{x(x - \ln(x+1))}{\ln(x+1)}$$

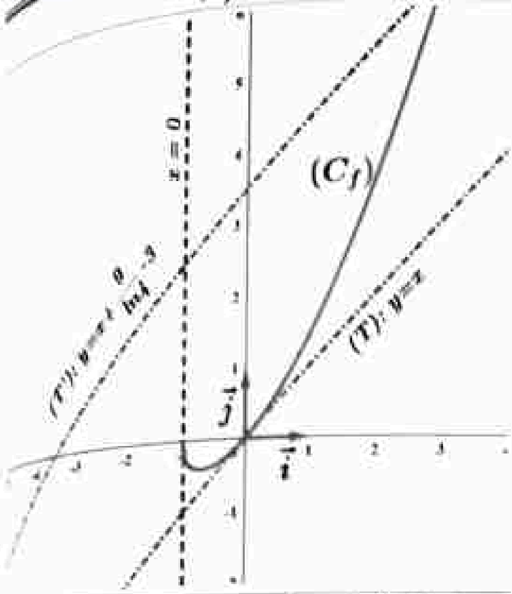
ومنه اشارة الفرق من اشارة $x - \ln(x+1)$ ومن السؤال السابق $x - \ln(x+1) > 0$

ومنه (C_f) يقع فوق (T)

4-تعيين معادلة (T') الموازي لـ (T) ويتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3

$$T': y = x - 3 + f(3)$$
$$y = x + \frac{9}{\ln 4} - 3$$

5-رسم (T) و (T') و (C_f)



6-المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x) = x + m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

لما $m < 0$ لا توجد حلول للمعادلة

لما $m = 0$ للمعادلة حل مضاعف

لما $m \in]0,1[$ يوجد حلان للمعادلة

لما $1 \leq m \leq \frac{9}{\ln 4} - 3$ للمعادلة حل واحد

لما $m > \frac{9}{\ln 4} - 3$ ليس للمعادلة حل

100. بكالوريا 2011 الرياضيات

الموضوع: الدوال الأسية + البرهان بالتراجع+المعادلات التفاضلية + التكاملات باك 2011 رياضيات

الموضوع الأول

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = (3x + 4)e^{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ- احسب f'، f'' ثم برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن:

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$$

حيث: f'، f''، ...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f

ب- استنتج حل المعادلة التفاضلية:

$$y'' = (3x + 16)e^{x}$$

2- أ- بين أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة هندسيا.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ- اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$.

ب- بين أن ω هي نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]-\infty; 0]$

4- أ- x عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$، باستعمال المكاملة بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^{t}dt$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 0]$.

ب- λ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

احسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$، $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$، ثم جد $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

الحل

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = (3x + 4)e^{x}$$

1- أ- حساب f' و f''

$$f'(x) = 3e^{x} + (3x + 4)e^{x} = (3x + 7)e^{x}$$

$$f''(x) = 3e^{x} + (3x + 7)e^{x} = (3x + 10)e^{x}$$

البرهان بالتراجع ان

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$$ حيث $n \in \mathbb{N}$

نسمي الخاصية $p(n)$ حيث:

$$p(n) : f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$$

2- نتحقق من صحة الخاصية من اجل $n = 1$

أي: $p(1)$

$$f^{1}(x) = (3x + 3(1) + 4)e^{x} = (3x + 7)e^{x}$$
$$= f'(x)$$

3- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $p(n + 1)$

لدينا من فرضية التراجع أن

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$$

$$\left(f^{(n)}(x)\right)' = (3)e^{x} + (3x + 3n + 4)e^{x}$$
$$= (3x + 3n + 4 + 3)e^{x}$$
$$= (3x + 3(n + 1) + 4)e^{x} = f^{(n+1)}(x)$$

ومنه $p(n + 1)$ محققة من اجل $(n + 1)$ وبالتالي $p(n)$ محققة أي

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$$

1-ب- استنتاج حل المعادلة التفاضلية:

$$y''(x) = (3x + 16)e^{x}$$

لدينا

$$f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^{x}$$
$$f^{4}(x) = (3x + 16)e^{x} = y''$$

ومنه

$$y' = f^{(3)}(x) + c_1$$

(y' هي الدالة الأصلية لـ y'')

$$y = f^{(2)} + c_1x + c_2$$

(y الدالة الأصلية لـ y')

$$y = (3x + 10)e^{x} + c_1x + c_2$$

حيث $(c_1; c_2) \in \mathbb{R}^2$

وهو حل المعادلة التفاضلية

2-أ- البرهان $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x + 4)e^{x} = \lim_{x \to -\infty} 3xe^{x} + 4e^{x}$$
$$= 0$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ م م أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

2-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

لدينا الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = (3x + 7)e^{x}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $3x + 7$ لأن $e^{x} > 0$

$$x > -\frac{7}{3} \Leftrightarrow 3x + 7 > 0$$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	$f\left(-\frac{7}{3}\right)$	$\nearrow +\infty$

3-أ- معادلة المماس (Δ) في النقطة ω التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$

$$y = f'\left(-\frac{10}{3}\right)\left(x+\frac{10}{3}\right) + f\left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$y = -3e^{-\frac{10}{3}}\left(x+\frac{10}{3}\right) - 6e^{-\frac{10}{3}}$$

بعد التبسيط نجد $y = -(3x+16)e^{-\frac{10}{3}}$

3-ب- بيان أن ω نقطة انعطاف لـ (C_f)

تكون ω نقطة انعطاف إذا وفقط إذا انعدمت المشتقة الثانية $f''(x)$ وغيرت اشارتها

$$f''(x) = (3x+10)e^x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x+10 = 0$$

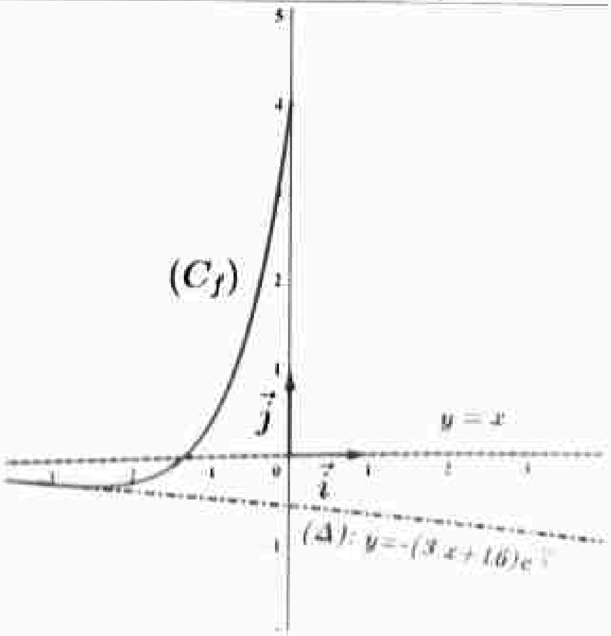
$$\Rightarrow x = -\frac{10}{3}$$

إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{10}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ومنه $\omega\left(-\frac{10}{3}; f\left(-\frac{10}{3}\right)\right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f)

3-ج- رسم (C_f) و (Δ)



4-أ- إيجاد $\int_{-1}^{x} te^t\,dt$ باستعمال التكامل بالتجزئة

نضع

$u =$	t	$u' =$	1
$v =$	e^t	$v' =$	e^t

$$\int_b^a (uv')dx = [uv]_b^a \int_a^b (vu')dx$$

$$\int_{-1}^{x} te^t dt = [te^t]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} e^t dt$$

$$= [te^t]_{-1}^{x} - [e^t]_{-1}^{x}$$

$$= (x-1)e^x + 2e^{-1}$$

استنتاج دالة أصلية F لـ الدالة f

$$f(x) = 3xe^x + 4e^x$$

$$F(x) = \int 3xe^x\,dx + \int 4e^x\,dx$$

$$F(x) = 3\int xe^x + 4\int e^x$$

$$= 3(x-1)e^x + 4e^x + c$$

$$F(x) = (3x+1)e^x + c \;\; ; \; c \in \mathbb{R}$$

4-λ عدد حقيقي حيث $\lambda < -\frac{4}{3}$

حساب $A(\lambda)$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} (y - f(x)dx$$

$$= -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x)dx$$

$$= -[(3x+1)e^x]_{\lambda}^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\left[\left(3\left(-\frac{4}{3}\right)+1\right)e^{-\frac{4}{3}} - (3\lambda+1)e^{\lambda}\right]$$

$$= 3e^{-\frac{4}{3}} + 3\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} \;(u.a)$$

حساب $\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty}\left[3e^{-\frac{4}{3}} + 3\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}\right]$$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 3e^{-\frac{4}{3}}$$

101. بكالوريا 2011 الرياضيات

البوتوب: الدالة اللوغاريتمية + التكامل + المساحات باك 2011 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

- g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+lnx^2-1$

1-أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

1-ب- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

2- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)lnx$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2-أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2-ب- (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto lnx$ على المجال $]0;+\infty[$.

-ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (δ) ثم جد $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}lnx$ ، ماذا تستنتج؟

-ارسم (δ) و (C_f).

3-أ- x عدد حقيقي من المجال $]1;+\infty[$، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x\frac{1}{t^2}\ln t\,dt$

-تحقق أن: $x\mapsto xlnx-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على المجال $]1;+\infty[$.

-استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

3-ب- α عدد حقيقي أكبر تماما من1.

احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_f) و (δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=\alpha$، ثم احسب $\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)$

الحل

1- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$:

$$g(x)=x^2+\ln x^2-1$$

1-أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g

النهايات

$$\lim_{x\to0}(x^2+\ln x^2-1)=\lim_{x\to0}(x^2+2\ln x-1)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2+\ln x^2-1)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+2\ln x-1)=+\infty$$

المشتقة

$$g'(x)=2x+\frac{2}{x}$$

ومنه $g'(x)>0$ أي الدالة $g(x)$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

1-ب- حساب $g(1)$: استنتاج إشارة $g(x)$:

$$g(1)=0$$

استنتاج إشارة $g(x)$: من جدول التغيرات والسؤال السابق

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	

2- f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=lnx\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

2-أ- البرهان الدالة أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

الدالة $x\to\ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

الدالة $x\to1-\frac{1}{x^2}$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ومنه فإن جداء الدالتين على المجال $]0;+\infty[$ هو دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

حساب $f'(x)$

لدينا

$$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}=\frac{x^2-1+\ln x^2}{x^3}$$

$$=\frac{g(x)}{x^3}$$

استنتاج اتجاه تغير f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $x^3>0$

ومنه الدالة متزايدة على المجال $]1;+\infty[$

ومتناقصة على المجال $]0;1]$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2-ب- (δ) المنحنى الممثل للدالة $x \to \ln x$

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - \ln x$ على $]0;+\infty[$

$$f(x) - \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x^2} - \ln x = -\frac{\ln x}{x^2}$$

ومن إشارة الفرق من إشارة $-\ln x$

نعلم أن في المجال $]1;+\infty[$ يكون $\ln x > 0$

ومنه $-\ln x < 0$

ومنه في المجال $]0;1[$ يكون $-\ln x > 0$

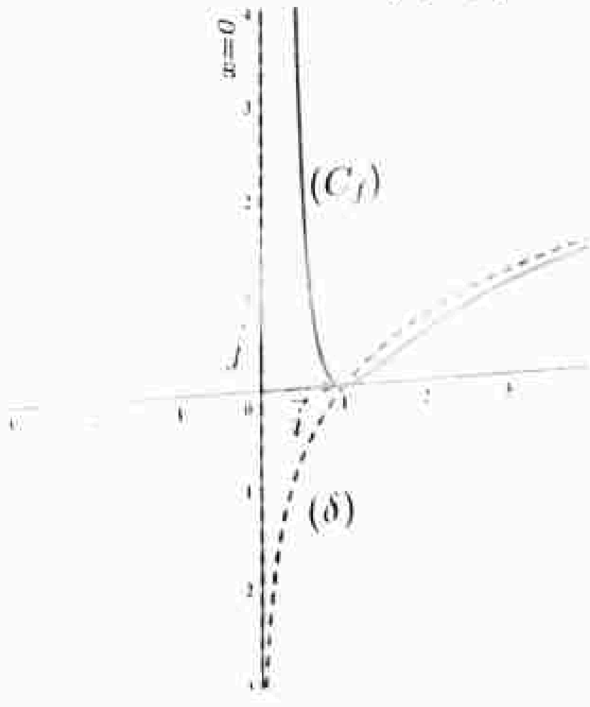
x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \ln x$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية	‖	(C_f) فوق (δ)	تقاطع	(C_f) تحت (δ)	

إيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \ln x)$$

نستنتج أن (δ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

رسم (C_f) و (δ)



3-أ- إيجاد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\,dt$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع الدالتين u و v حيث

$u = \ln t$	$u' = \frac{1}{t}$
$v = -\frac{1}{t}$	$v' = \frac{1}{t^2}$

$$\int_1^x uv'dx = [uv]_1^x - \int_1^x vu'dx$$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dx = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}dx$$

$$= \left[-\frac{\ln t}{t}\right] + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

-التحقق أن $x \to x\ln x - x$ دالة اصلية لـ $\ln x$

$$(x\ln x - x)' = \ln x + \frac{1}{x}x - 1 = \ln x$$

-استنتاج دالة اصلية لـ $f(x)$

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$F(x) = (x\ln x - x) - \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1\right)$$

$$= x\ln x - x + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - 1$$

3-ب- حساب $A(\alpha)$ بدلالة α

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha [\ln x - f(x)]dx$$

$$= \int_1^\alpha \left[\ln x - \ln x + \frac{\ln x}{x^2}\right]dx$$

$$= \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2}dx$$

$$A(\alpha) = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1\right]_1^\alpha$$

$$= -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1\ (u.a)$$

حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\left[-\frac{\ln\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 1\right] = 1\ (u.a)$$

102. بكالوريا 2010 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية باك 2010 شعبة رياضيات

الموضوع الأول

I- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (3 - x)e^x - 3$$

1- ادرس تغيرات الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2{,}82 < \alpha < 2{,}83$

3- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3}{e^x - 1} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1- بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$، اكتب معادلة لـــ (T) مماس (C_f) عند المبدأ O

2-أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-x} = 0$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-ب- بين أنه من أجل $x \neq 0$ فإن:

$$f'(x) = \frac{x^2}{(e^x - 1)^2} g(x)$$

2-جـ- تحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$ ثم عين حصرا له

2-د- انشئ جدول تغيرات الدالة f

3-أ- احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحنى الدالة $x \to -x^3$

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x^3] = 0$ فسر النتيجة هندسيا

4- انشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين (C) و (C_f)

الحل

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (3 - x)e^x - 3:$$

1- دراسة تغيرات الدالة g

النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} [(3 - x)e^x - 3] = \lim_{x\to-\infty} [3e^x - xe^x - 3] = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [(3 - x)e^x - 3] = -\infty$$

المشتقة:

$$g'(x) = -e^x + (3 - x)e^x = (2 - x)e^x$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $2 - x$

$x < 2 \Leftarrow 2 - x > 0 \Leftarrow g'(x) > 0$

-جدول إشارة $g'(x)$ وتغيرات $g(x)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	$g(2) = e^2 - 3$	$\searrow$	$-\infty$

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ ومتناقصة على المجال $[2; +\infty[$

2- البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين:

أحدهما معدوم أي $g(0) = 0$

والآخر α حيث $2{,}82 < \alpha < 2{,}83$

الدالة g مستمرة ومتناقصة على المجال $]2{,}82; 2{,}83[$

و $\begin{cases} g(2{,}83) = -0.019 \\ g(2{,}82) = 0.119 \end{cases}$

و $g(2.82) \times g(2.83) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$$2{,}82 < \alpha < 2{,}83$$

3-استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

من جدول تغيرات $g(x)$ والسؤال السابق نجد

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II-f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- البرهان أن f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^3}{e^x - 1} - 0\right)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{e^x - 1} \times \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$$

$$= 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0

كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند المبدأ O

$$y = f'(x)(x - 0) + f(0)$$

$$= 0(x - 0) + 0$$

$$y = 0$$

2- البرهان أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = 0$

نعلم أن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^x = 0$

نضع $x = -t \Leftarrow t = -x$

لما $t \to -\infty \Leftarrow x \to +\infty$

ومنه

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 e^{-x} = \lim_{t \to -\infty} (-t)^3 e^t$$

$$= \lim_{t \to -\infty} -t^3 e^t$$

$$= 0$$

حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$= \frac{x^3 e^{-x}}{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{-\infty}{0 - 1} = +\infty$$

2-ب- البرهان أن $f'(x) = \dfrac{g(x)\, x^2}{(e^x - 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(e^x - 1) - e^x(x^3)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2(3(e^x - 1) - xe^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2}{(e^x - 1)^2}(3e^x - 3 - xe^x)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(3e^x - 3 - xe^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^2 g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

2-جـ- التحقق أن $f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{e^{\alpha} - 1}$$

نعلم أن $g(\alpha) = 0$

ومنه $(3 - \alpha)e^{\alpha} - 3 = 0$

ومنه $e^{\alpha} = \dfrac{3}{3 - \alpha}$

نعوض قيمة e^{α} في عبارة $f(\alpha)$ نجد

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha} - 1} = \frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3-\alpha}}$$

$$f(\alpha) = \alpha^2(3 - \alpha)$$

تعيين حصر لـ $f(\alpha)$

لدينا

$$2{,}82 < \alpha < 2{,}83$$

$$7{,}95 < \alpha^2 < 8{,}009 \ldots\ldots (1)$$

ولدينا

$$2{,}82 < \alpha < 2{,}83$$

$$0{,}17 < 3 - \alpha < 0{,}18 \ldots\ldots (2)$$

نضرب (2) في (1) نتحصل على

$$1{,}35 < (3 - \alpha)\alpha^2 < 1{,}45$$

$$1{,}35 < f(\alpha) < 1{,}45$$

2-د- انشاء جدول تغيرات f

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

II-حساب $f(x) + x^3$

$$f(x) + x^3 = \frac{x^3}{e^x - 1} + x^3$$

$$= \frac{x^3 e^x + x^3 - x^3}{e^x - 1}$$

$$= \frac{x^3 e^x}{e^x - 1}$$

استنتاج وضعية (C_f) ومنحنى الدالة $x \mapsto -x^3$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-x^3)$ أي $\dfrac{x^3 e^x}{e^x - 1}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$f(x) + x^3$	$+$	$\Vert$	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (C)	(C_f) يمس (C)	(C_f)فوق (C)

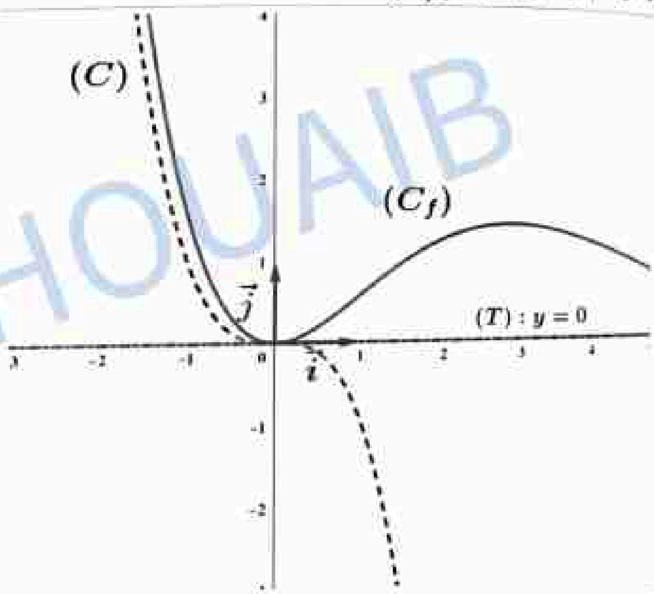
إثبات أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x^3 = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x^3] = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 e^x}{e^x - 1} = 0$$

لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0^+$

-التفسير الهندسي للنتيجة: (C) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

4-رسم $(C_f), (C), (T)$



103. بكالوريا 2010 الرياضيات

اليوتيوب: دالة لوغاريتمية باك 2010 شعبة رياضيات

الموضوع الثاني

g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - 1 - 2\ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول هي $4cm$)

1- احسب $\lim\limits_{x \to 0}^{>} g(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2-أ- بين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2-ب- ادرس تغيرات الدالة g

2-جـ احسب $g(1)$

2-د- برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α حيث: $3,5 < \alpha < 3,6$

2-هـ- استنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

3- f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \,;\, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

3-أ- احسب $\lim\limits_{x \to 0}^{>} \frac{f(x)}{x}$ وفسر النتيجة هندسيا

3-ب- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

3-جـ- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، فإن: $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة f

3-د- شكل جدول تغيرات الدالة f ، بين أن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4- ارسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f على $[0; 3]$

الحل

g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :
$g(x) = x - 1 - 2\ln x$

1- حساب النهاية

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x - 1 - 2\ln x) = (0 - 1 - (-\infty)) = +\infty$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب شاقولي لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2-أ- بيان أن $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x - 1 - 2\ln x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)\right] = +\infty$$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2-ب- دراسة تغيرات الدالة g

المشتقة $g'(x)$

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}$$

لدينا $x > 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $x - 2$

$g'(x) > 0 \Leftarrow x - 2 > 0 \Leftarrow x > 2$

اشارة $g'(x)$

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$ $-$	0	$+$

و منه g متزايدة على المجال $[2; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0; 2]$

-جدول تغيرات $g(x)$

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-2\ln 2$	↗	$+\infty$

2-جـ- حساب $g(1)$:

بالتعويض $x = 1$ في عبارة $g(x)$ نجد: $g(1) = 0$

2-د- برهان أن $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما α في المجال $]3,5;3,6[$:

لدينا g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال

$]3,5;3,6[$

و
$$\begin{cases} g(3,6) = 0.038 \\ g(3,5) = -0.005 \end{cases}$$

و $g(3.5) \times g(3.6) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث

$3,5 < \alpha < 3,6$

والحل الثاني 1 لأن مما سبق لدينا $g(1) = 0$

2-هـ- استنتاج إشارة $g(x)$ و $g\left(\frac{1}{x}\right)$

من جدول تغيرات الدالة g والسؤال السابق نجد

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

لدينا $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Leftarrow 0 < 1 < \frac{1}{x} < \alpha$

ومنه $\frac{1}{\alpha} < x < 1$

اذن تصبح إشارة $g(\frac{1}{x})$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

3- f الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

3-أ- حساب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{-x^2 + x + x^2 \ln x}{x}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [-x + 1 + x \ln x] = 1$$

لأن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x \ln x = 0$

-التفسير الهندسي للنتيجة :

الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 ومنه (C_f) يقبل نصف مماس على يمين 0 معامل توجيهه 1

3-ب- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [-x^2 + x + x^2 \ln x]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \left(-1 + \frac{1}{x} + \ln x\right)\right]$$
$$= +\infty$$

3-جـ- بيان من أجل $x \in]0;+\infty[$ أن:

$f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = -2x + 1 + (2x)\ln x + x$$
$$= -x + 1 + 2x \ln x$$
$$= x\left(-1 + \frac{1}{x} + 2\ln x\right)$$
$$f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

-استنتاج اتجاه تغير $f(x)$

لدينا $x > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	↘	0	↗	$+\infty$

الدالة f متزايدة على المجال $]0;\frac{1}{\alpha}] \cup [1;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]\frac{1}{\alpha};1[$

3-د- البرهان أن $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \ln\frac{1}{\alpha}$$
$$= -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \ln\frac{1}{\alpha}$$

نعلم أن $g(\alpha) = 0$

ومنه $\alpha - 1 - 2\ln\alpha = 0$

$\ln \alpha = \frac{\alpha - 1}{2}$

$$\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\ln\alpha = \frac{-\alpha+1}{2}$$

نعوض قيمة $\ln\frac{1}{\alpha}$ في عبارة $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{-\alpha+1}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{-\alpha+1}{2\alpha^2}$$
$$= \frac{-2+2\alpha-\alpha+1}{2\alpha^2}$$
$$= \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$$

-استنتاج حصرا لـ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

لدينا $3.5 < \alpha < 3,6$

ومنه (1)..... $\mathbf{2.5 < \alpha - 1 < 2.6}$

ولدينا $3,5 < \alpha < 3,6$

ومنه $24,5 < 2\alpha^2 < 25,92$

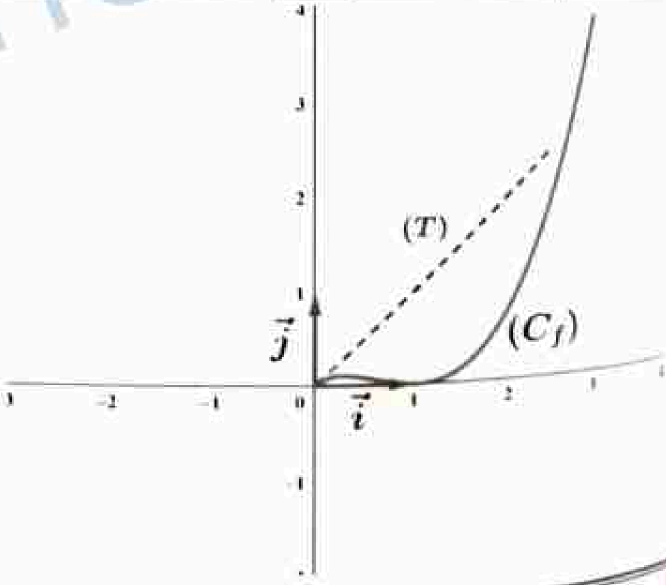
ومنه (2).... $\frac{1}{25,92} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{24.5}$

نضرب (1) في (2) نجد

$$\frac{2,5}{25,92} < \frac{\alpha-1}{2\alpha^2} < \frac{2,6}{24,5}$$

أي $0,096 < f(\alpha) < 0,106$

4-رسم (C_f) على المجال $[0,3]$



104. بكالوريا 2009 الرياضيات

البونيوب: الدالة الجذرية ، الدوال الأصلية ، المناقشة البيانية باك 2009 ش رياضيات

الموضوع الثاني

I/ الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f

2-أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y = x$

2-ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و(D)

3-أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$

3-ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

3-جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم

4-أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x

5-g الدالة العددية المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$$g(x) = |f(x)|$$

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق

-بين كيف يمكن إنشاء (C_g) من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق

6-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x:

$$g(x) = m^2$$

الحل

f الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

1- دراسة تغيرات الدالة f

-النهايات

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1}\left[x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right]$$
$$= \lim_{x \overset{>}{\to} -1}\left[x - 2\sqrt{\frac{1}{x+1}}\right]$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left[x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}\right]$$
$$= +\infty - \frac{2}{+\infty}$$
$$= +\infty$$

-المشتقة : الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = 1 - \left[2 \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}\right]$$
$$= 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على D_f

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2-أ- البرهان أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين

لدينا $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي بجوار $-\infty$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right) = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

2-ب- وضعية (C_f) بالنسبة الى (D) ذو المعادلة $y = x$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$

$$f(x) - y = -\frac{2}{\sqrt{x+1}} < 0$$

ومنه: (C_f) يقع تحت (D) على $]-1;+\infty[$

3-أ- تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة x_0

لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

ولدينا $\begin{cases} f(1{,}4) = 0.109 \\ f(1.3) = -0.018 \end{cases}$

و $f(1.3) \times f(1.4) < 0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد x_0

حيث $1{,}4 > x_0 > 1{,}3$

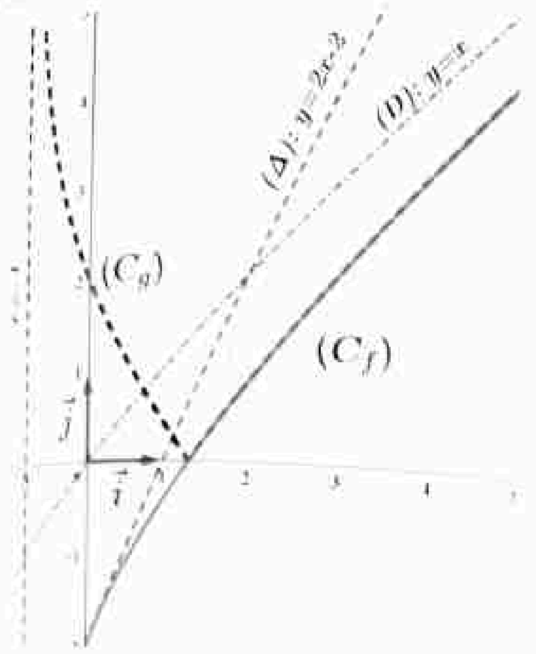
اي يقطع محور الفواصل في x_0

3-ب- معادلة المستقيم (Δ) مماس المنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب

أي معادلة المماس عند $x = 0$

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$
$$y = 2x - 2$$

3-جـ- رسم (Δ) و (C_f)



4- إيجاد الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم عند 0

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x t - \frac{2}{\sqrt{t+1}}dt$$
$$= \int_0^x t - \left(2 \times \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} - 4\sqrt{t+1}\right]_0^x$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + c$$
$$F(0) = 0 \Rightarrow -4 + c = 0 \Rightarrow c = 4$$

ومنه $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4\sqrt{x+1} + 4$

5- g الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$

$$g(x) = |f(x)|$$

انشاء (C_y) انطلاقا من (C_f)

نقوم بتفكيك $g(x)$ الى مجالين

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & : f(x) \geq 0 \\ -f(x) & : f(x) \leq 0 \end{cases}$$

ومنه (C_g) ينطبق على (C_f) لما يكون المنحنى فو... محور الفواصل

و (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون المنحني تحت محور الفواصل

-رسم (C_g)

تم الرسم في المعلم السابق

6-المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $g(x) = m^2$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_g) والمستقيم ذو المعادلة $y = m^2$

$m = 0$ للمعادلة حل وحيد موجب

$0 < |m| < \sqrt{2}$ أي $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$ للمعادلة حلين موجبين

$|m| = \sqrt{2}$ أي $m = \sqrt{2}$ او $m = -\sqrt{2}$ للمعادلة حلان أحدهما موجب والأخر معدوم

$|m| > \sqrt{2}$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

105. بكالوريا 2008 الرياضيات

الموضوع: الدوال الجذرية و المتتاليات العددية باك 2008 رياضيات 1

الموضوع الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بالعبارة:
$$f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$$
نرمز (C) الى منحنى f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة على المحورين $2cm$)

1- احسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسر النتيجة هندسيا

- ادرس تغيرات الدالة f

- باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي" أنشئ المنحنى (C)

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$

2- نعرف المتتالية (u_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي:
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$
2-أ- باستعمال (D) و (C)، مثل الحدود u_0، u_1، u_2 على محور الفواصل

2-ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3-أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:
$2 \le u_n \le 5$ و $u_{n+1} > u_n$

3-ب- استنتج أن (u_n) متقاربة، أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

f دالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة:
$$f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$$
1- حساب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{3+\sqrt{x-1}-3}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$
$$= +\infty \ne f(1)$$
لأن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{1}{x-1} = +\infty$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 1

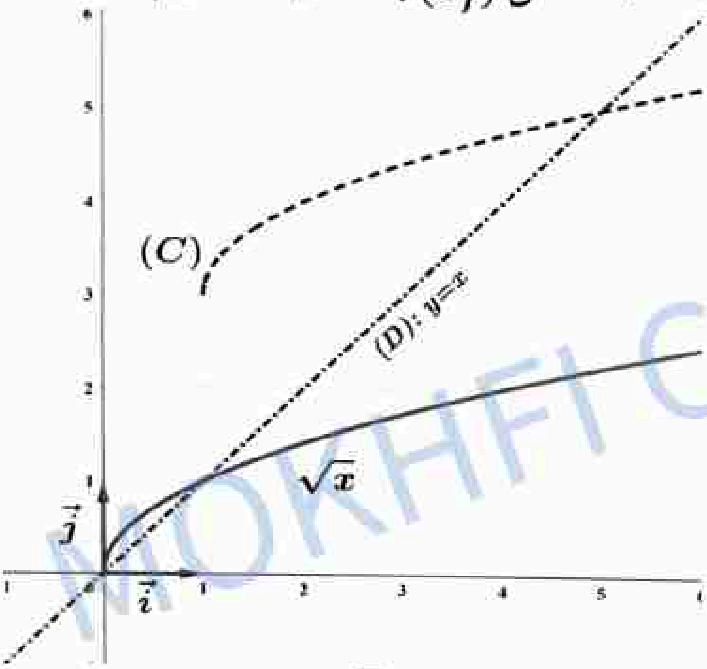
- **تفسير النتيجة هندسيا:** يوجد نصف مماس يوازي محور التراتيب.

- **دراسة تغيرات الدالة f**

المشتقة: f قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ ودالتها المشتقة
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$
لدينا $\sqrt{x-1} > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

اذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$

انشاء المنحنى (C_f) باستعمال الدالة $x \to \sqrt{x}$



تسمى الدالة $u(x)$ حيث $u(x) = \sqrt{x}$

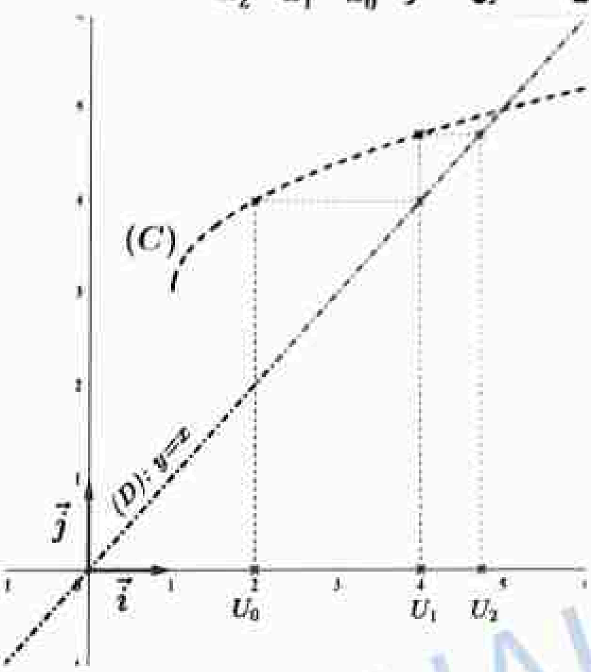
فإن $f(x) = u(x-1) + 3$

ومنه (C_f) هو نفسه منحنى الدالة u بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\binom{1}{3}$

2-(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

2-أ- تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2



2-ب- التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو فاصلة تقاطع (D) و (C_f)

3-أ- البرهان بالتراجع أن من اجل n طبيعي $2 \le u_n \le 5$ و $u_{n+1} > u_n$

1) نسمي الخاصية $p(n)$

حيث $p(n): 2 \le u_n \le 5$

2) نبرهن من اجل $n = 0$ أي u_0

لدينا $u_0 = 2$ ومنه $2 \le u_0 \le 5$

3) نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ محققة أي $p(n+1) \; : 2 \le u_{n+1} \le 5$

لدينا من فرضية التراجع $2 \le u_n \le 5$

نعلم أن $f(x)$ متزايدة تماما على المجال $[2;5]$

اذن $2 \le f(u_n) \le 5$ أي $2 \le u_{n+1} \le 5$;

ومنه $p(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

-البرهان أن $u_{n+1} > u_n$

1) نتحقق من اجل $n = 0$

$u_0 = 2$ و $u_1 = 4$ ومنه $u_1 > u_0$

2) نفرض أن $u_{n+1} > u_n$ صحيحة

3) نبرهن صحتها من اجل $n+1$

أي $u_{n+2} > u_{n+1}$

لدينا من فرضية التراجع $u_{n+1} > u_n$

وبما أن $f(x)$ متزايدة تماما فإن

$f(u_{n+1}) > f(u_n)$

أي $u_{n+2} > u_{n+1}$

ومنه فإن $u_{n+1} > u_n$

3-ب- استنتاج أن (u_n) متقاربة

لدينا من السؤال السابق $u_{n+1} > u_n$ ومنه

$u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

ولدينا كذلك $2 \le u_n \le 5$

ومنه بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 5 فإنها متقاربة نحو نهاية l

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

بما أن (u_n) متقاربة فإن

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$$

$3 + \sqrt{l-1} = l$

$\sqrt{l-1} = l - 3$

$l - 1 = (l-3)^2$

$l - 1 - (l-3)^2 = 0$

$-l^2 + 6l - 9 + l - 1 = 0$

$-l^2 + 7l - 10 = 0$

بحل المعادلة نجد $\Delta = 9$

إما $l = -7$ **مرفوض** لأن $2 \le l \le 5$

أو $l = 5$ **مقبول** ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$

106. بكالوريا 2008 الرياضيات

اليوتيوب: دالة أسية شاملة باك 2008 شعبة رياضيات رقم 3

الموضوع الثاني

I- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω واكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ω

-اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f)

3-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x+3)]$

-استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلتيهما

4-بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2{,}77;-2{,}76[$

احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج الى 10^{-2})

ثم ارسم (C_f) ومستقيميه المقاربين

II- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x+1}$ (C_g) منحنى الدالة g

1- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x فإن:

$$g(x) = f(-x)$$

استنتج انه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) الى (C_g)

2- أنشئ في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g) (دون دراسة الدالة g)

الحل

I- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$$

1- دراسة تغيرات الدالة f

النهايات

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

مشتقة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x} - 2e^x + 1$

لمعرفة إشارة العبارة نضع $t = e^x$

نحل المعادلة

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$
$$\Delta = 0 \Rightarrow t = 1 = e^0 \Rightarrow x = 0$$

ومنه اشارة العبارة من إشارة معامل t^2 ومنه

$$t^2 - 2t + 1 > 0$$
$$e^{2x} - 2e^x + 1 > 0$$
$$f'(x) > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات $f(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		↗		$+\infty$

2- تبيين ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω

ط1- لدينا $f'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{e^x}$

$f'(x)$ تنعدم عند $x = 0$ ولا تغير اشارتها فان (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند $\omega(0; f(0))$

ط2- ندرس إشارة $f''(x)$ نجدها تنعدم عند $x = 0$ وتغير اشارتها فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند $\omega(0; f(0))$

-كتابة معادلة المماس عند ω

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = 0(x-0) + 1$$
$$y = 1$$

-اثبات أن ω مركز تناظر لـ (C_f)

لدينا $\omega(0; 1)$

$$\begin{aligned} f(2(0)-x) + f(x) &= f(-x) + f(x) \\ &= -x - 1 + \frac{4}{e^{-x}+1} + x - 1 + \frac{4}{e^x+1} \\ &= -2 + \frac{4}{e^{-x}+1} + \frac{4}{e^x+1} \\ &= -2 + \frac{4}{\frac{1+e^x}{e^x}} + \frac{4}{e^x+1} \\ &= -2 + \frac{4e^x}{e^x+1} + \frac{4}{e^x+1} \\ &= -2 + \frac{4(e^x+1)}{e^x+1} \\ &= -2 + 4 = 2 \end{aligned}$$

$$f(2(0)-x) + f(x) = 2$$

ومنه $\omega(0; 1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

3- حساب $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x-1))$ و $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (x+3))$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x-1)) &= \lim_{x\to+\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - x + 1\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{4}{e^x+1}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (x+3)) &= \lim_{x\to-\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x+1} - x - 3\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[-4 + \frac{4}{e^x+1}\right] \\ &= \lim_{x\to-\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x+1}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيمين م م بجوار $+\infty$ و $-\infty$

معادلتيهما على التوالي $y_1 = x - 1$

و $y_2 = x + 3$

4- البرهان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 في المجال $]-2,77; -2,76[$

لدينا من جدول تغيرات $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-2,77; -2,76[$

ولدينا $\begin{cases} f(-2{,}76) = 0.003 \\ f(-2{,}77) = -0.004 \end{cases}$

و $f(-2.77) \times f(-2.76) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد x_0 في المجال $]-2{,}77; -2{,}76[$

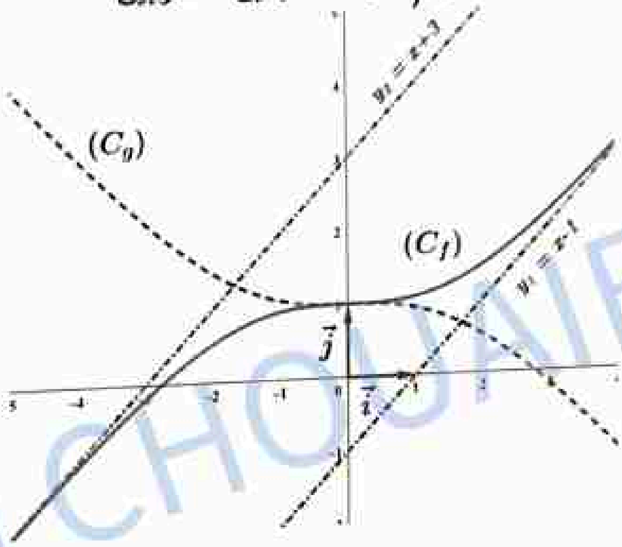
ومنه (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حساب $f(1)$ و $f(-1)$

$f(1) = 1{,}08$

$f(-1) = 0{,}98$

- رسم المنحنى C_f والمستقيمين المقاربين



II- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

1- تبين أن $g(x) = f(-x)$

$$f(-x) = -x - 1 + \frac{4}{e^{-x}+1}$$
$$= -x - 1 + \frac{4}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$
$$= -x - 1 + \frac{4e^x}{e^x+1}$$
$$= -x + \frac{3e^x-1}{e^x+1}$$
$$f(-x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x+1} = g(x)$$

-استنتاج وجود تحويل نقطي يحول (C_f) الى (C_g)

لدينا من السؤال السابق $f(-x) = g(x)$

ومنه (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب

2- انشاء (C_g)

تم الرسم في نفس المعلم.

جزء الدوال المقترحة

mo KHFi CHOUAIB

BAC 2022

107. دالة مقترحة رقم 01

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019 (ع ت ر ت د ا) رقم 1

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$$

1- احسب نهايات الدالة g عند 0 و $+\infty$

2- ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$

استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0;+\infty[$

الجزء الثاني

f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = 1 + (x-2)\ln x$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب نهاية الدالة عند 0 وعند $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين أن $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$ ثم اعط قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من اجل: $\alpha \simeq 1.45$

4- (T_{x_0}) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة M_0 ذات الفاصلة x_0

4-أ- اكتب المعادلة الديكارتية للمماس (T_{x_0})

4-ب- عين x_0 اذا علمت أن المماس (T_{x_0}) يمر بالنقطة $A(2,0)$

4-جـ-استنتج أن (C_f) يقبل مماسين يمران بالنقطة A ثم اكتب معادلة كلا منهما

5- ارسم كلا من المماسين والمنحنى (C_f)

-الجزء الثالث:

نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$ حيث m وسيط حقيقي

1- تحقق أن (d_m) يمر بالنقطة A

2- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة:

$$f(x) = mx - 2m$$

الحل

الجزء الأول:

الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = \ln x + \frac{x-2}{x}$$

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\left[\ln x + \frac{x-2}{x}\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to 0}\frac{x-2}{x} = \frac{0-2}{0^+} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln x + \frac{x-2}{x}\right] = +\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$

2- دراسة تغيرات الدالة g :

المشتقة:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1(x) - 1(x-2)}{x^2}$$
$$= \frac{1}{x} + \frac{x-x+2}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $0 < \frac{1}{x}$ و $\frac{2}{x^2} > 0$

ومنه: $g'(x) > 0$ على $]0;+\infty[$

إذن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

3- البرهان أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.4 < \alpha < 1.5$

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1{,}4\,;1{,}5[$

و $\begin{cases} g(1{,}4) = -0{,}09 \\ g(1{,}5) = 0{,}07 \end{cases}$

و $g(1.4)\times g(1.5) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:
$$f(x) = 1 + (x-2)\ln x$$

1- حساب نهاية الدالة f عند 0 و $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = \lim_{x \to 0^{>}} [1 + (x-2)\ln x]$$
$$= \lim_{x \to 0^{>}} [1 + x\ln x - 2\ln x]$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل م م شاقوليا معادلته من الشكل $x = 0$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} [1 + (x-2)\ln x] = +\infty$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = 0 + 1\ln x + \frac{1}{x}(x-2)$$
$$= \ln x + \frac{x-2}{x} = g(x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $-$	0	$+$

الدالة f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$

ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

3- البرهان أن $f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$

لدينا $f(\alpha) = 1 + (\alpha-2)\ln\alpha$

لدينا من الجزء الأول $g(\alpha) = 0$ أي:

$$\ln\alpha + \frac{\alpha-2}{\alpha} = 0$$

ومنه $\ln\alpha = -\frac{\alpha-2}{\alpha}$ نعوض في $f(\alpha)$ فنجد

$$f(\alpha) = 1 + (\alpha-2)\left(-\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)$$

ومنه:
$$f(\alpha) = 1 - \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha}$$

-اعطاء قيمة مقربة لـــ $f(\alpha)$ من أجل

$\alpha = 1;45$

$$f(\alpha) \simeq 1 + (1;45 - 2)\ln 1{,}45 = 0.8$$

4-أ- كتابة المعادلة الديكارتية للمماس (T_{x_0})

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = g(x_0) = \ln(x_0) + \frac{x_0 - 2}{x_0}$

$f(x_0) = 1 + (x_0 - 2)\ln x_0$

وعليه المعادلة الديكارتية للمماس (T_{x0}):

$$y = \left(\ln x_0 + \frac{x_0-2}{x_0}\right)(x - x_0) + 1 + (x_0-2)\ln x_0$$

4-ب- تعيين x_0 ليمر المماس (T_{x_0}) بالنقطة $A(2;0)$

$A \in (T_{x_0})$ معناه A تحقق معادلة (T_{x_0})

$$\left(\ln x_0 + \frac{x_0-2}{x_0}\right)(2 - x_0) + 1 + (x_0-2)\ln x_0 = 0$$
$$(2-x_0)\ln x_0 + \frac{(x_0-2)(2-x_0)}{x_0} + 1 + (x_0-2)\ln x_0 = 0$$
$$\frac{-x_0^2 + 4x_0 - 4}{x_0} + 1\left(\frac{x_0}{x_0}\right) = 0$$
$$\frac{-x_0^2 + 4x_0 - 4 + x_0}{x_0} = 0$$
$$= \frac{-x_0^2 + 5x_0 - 4}{x_0} = 0$$
$$= -x_0^2 + 5x_0 - 4 = 0$$
$$\Delta = 25 - 4(-1)(-4) = 9$$
$$x_1 = \frac{-5-3}{-2} = 4$$
$$x_2 = \frac{-5+3}{-2} = 1$$

ومنه قيم x_0 هي $\{1;4\}$

4-جـ - استنتاج أن (C_f) يقبل مماسين يمران بـ A

لدينا (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) عند النقطتين ذاتي الفاصلتين على الترتيب $x_0 = 4$; $x_0 = 1$

معادلة المماس (T) عند x_0

$$(T): y = \left(\ln x_0 + \frac{x_0-2}{x_0}\right)(x - x_0) + 1 + (x_0-2)\ln x_0$$

معادلة (T_2): $x_0 = 4$

$$(T_1): y = \left(2\ln 2 + \frac{2}{4}\right)(x-4) + 1 + 2\ln 4$$
$$= \left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)(x-4) + 1 + 4\ln 2$$
$$= \left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)x - 4\left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right) + 1 + 4\ln 2$$
$$= \left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)x - 4\ln 2 - 1$$
$$= \left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)x - 2\left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)x - 2\left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$(T_1): y = \left(2\ln 2 + \frac{1}{2}\right)(x-2)$$

السلسلة الفضية

معادلة (T_2): $x_0 = 1$

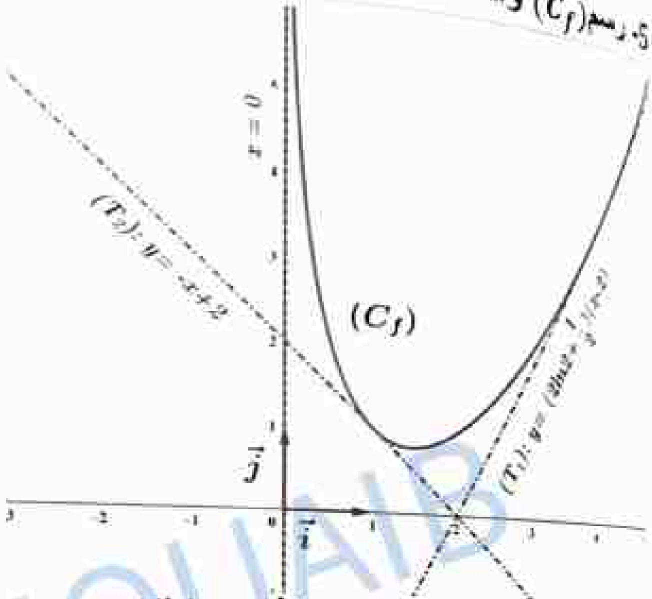
$(T_2): y = (\ln 1 + (-1))(x-1) + 1 + (1-2)\ln(1)$

$= (\ln 1 + (-1))(x-1) - \ln(1) + 1$

$= -1(x-1) + 1$

$(T_2) = -x + 2$

5- رسم (C_f) والمماسين



الجزء الثالث: المستقيم (d_m) الذي معادلته $y = mx - 2m$

1- التحقق أن (d_n) يمر بـ A

(d_m) يمر بـ A معناه $A \in (d_m)$

$y = mx - 2m$

$0 = m(2) - (2m)$

$0 = 0$

ومنه (d_m) يمر من A

2- المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$f(x) = mx - 2m$

حلول البيانية للمعادلة $f(x) = mx - 2m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم (d_m) ذو المعادلة $y = mx - 2m$

(مناقشة دورانية)

1) $m \in]-\infty; -1[$ للمعادلة حلان متمايزان

2) $m = -1$ للمعادلة حل واحد $x = 1$

3) $m \in]-1; 2\ln 2 + \frac{1}{2}[$ لا يوجد حلول للمعادلة

4) $m = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$ للمعادلة حل واحد $x = 4$

5) $m \in]2\ln 2 + \frac{1}{2}; +\infty[$ للمعادلة حلان متمايزان

108. دالة مقترحة رقم 02

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019 (ع ت ا ت ر) رقم 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ:

$$f(x) = x + \ln|e^x - 1|$$

نرمز بـ (C_f) للتمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا. ثم أحسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

1-أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x فإن: $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$

1-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2-أ- اثبت أنه (C_f) يقبل (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

2-ب- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ يكون $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$

2-جـ- استنتج أن (C_f) يقبل (Δ') مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ يطلب كتابة معادلة ديكارتية له

2-د-حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = x$

2-هـ-عين معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$

3-أ- برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق: $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ استنتج إشارة $f(x)$

3-ب- برهن أن العدد α يحقق $e^{2\alpha} - e^{\alpha} - 1 = 0$ ثم أرسم كلا من (Δ) ، (Δ') و (C_f)

3-جـ- m وسيط حقيقي، ناقش حسب قيم m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x) = |m|x$

الحل

الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$:

1) النهايات:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(x + \ln|e^x - 1|) = -\infty$

نضع $t = e^x$

لما $x \to 0$ فإن $t \to 1$

$\lim_{x \to 0} \ln|e^x - 1| = \lim_{t \to 1} \ln(t - 1)$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا شاقوليا
معادلته: $x = 0$ بجوار $-\infty$

-حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x + \ln|e^x - 1|) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x + \ln|e^x - 1|) = +\infty$$

1- أ-البرهان أن: $f'(x) = \frac{2e^x-1}{e^x-1}$

بما أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{e^x - 1 + e^x}{e^x - 1}$$
$$= \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إذا كان $f'(x) = 0$ فإن $2e^x - 1 = 0$

$$2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2}$$
$$x = \ln 1 - \ln 2$$
$$x = -\ln 2$$

x	$-\infty$	$-\ln 2$		0	$+\infty$
$2e^x-1$	$-$	0	$+$		$+$
e^x-1	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

الدالة f متزايدة تماما على المجال
$]-\infty;-\ln 2[\cup]0;+\infty[$
ومتناقصة تماما على المجال $[-\ln 2;0[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\ln 2)$	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- البرهان أن (C_f) يقبل م م مائل بجوار $-\infty$

يجب أن يتحقق:
$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - y] = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} [x + \ln|e^x - 1| - x] = 0$$
ومنه: $y = x$ مستقيم م مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

2-ب- البرهان أن: $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$

لدينا $f(x) = x + \ln|e^x - 1|$
لكن من أجل $x \in]0;+\infty[$ يكون لدينا
$|e^x - 1| = e^x - 1$

ومنه : $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$
من أجل $x \in]0;+\infty[$ لدينا

$$x + \ln(e^x - 1) = x + \ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)$$
$$= x + \ln e^x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= x + x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$$
$$= f(x)$$

2-جـ- استنتاج أن (C_f) يقبل (Δ')مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} [f(x)] = +\infty$

$$f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - y]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[2x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - 2x\right]$$

حيث $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = 0$
ومنه نستنتج أن (C_f) يقبل (Δ') م مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = 2x$

2-د- تحديد نقط تقاطع (C_f)و (Δ')

نحل المعادلة $f(x) = y$

$$x + \ln|e^x - 1| = x$$
$$\ln|e^x - 1| = 0 = \ln 1$$
$$\ln|e^x - 1| = \ln 1$$
$$|e^x - 1| = 1$$

بنزع القيمة المطلقة يكون لدينا:
$e^x - 1 = 1 \Rightarrow e^x = 2$
$e^x - 1 = -1 \Rightarrow e^x = 0 \Rightarrow$ مستحيلة
$$e^x = 2$$
$$x = \ln 2$$
ومنه $(C_f) \cap (\Delta') = \{(\ln 2;\ln 2)\}$

2-هـ-تعيين معادلة لــ (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$

$$y = f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2)$$
$$f'(\ln 2) = 3$$
$$f(\ln 2) = \ln 2$$
$$y = 3(x - \ln 2) + \ln 2$$
ومنه : $(T): y = 3x - 2\ln 2$

3-أ- البرهان أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,4<\alpha<0,5$

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,4;0,5[$

و $\begin{cases} f(0,5)=0,006 \\ f(0,4)=-0,3 \end{cases}$

و $f(0.4)\times f(0.5)<0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$0.4<\alpha<0,5$

استنتاج إشارة $f(x)$

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

3-ب- البرهان أن α يحقق $e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$

لدينا $f(\alpha)=0$

$$\alpha+\ln|e^{\alpha}-1|=0$$
$$\ln|e^{\alpha}-1|=-\alpha$$
$$|e^{\alpha}-1|=e^{-\alpha}$$

لأن: $e^{\alpha}-1>0$

ولأن: $0,4<\alpha<0,5$

$$e^{0,4}<e^{\alpha}<e^{0,5}$$
$$e^{0,4}-1<e^{\alpha}-1<e^{0,5}-1$$

أي

$$\ln(e^{\alpha}-1)=-\alpha$$
$$e^{\ln(e^{\alpha}-1)}=e^{-\alpha}$$
$$e^{\alpha}-1=e^{-\alpha}$$

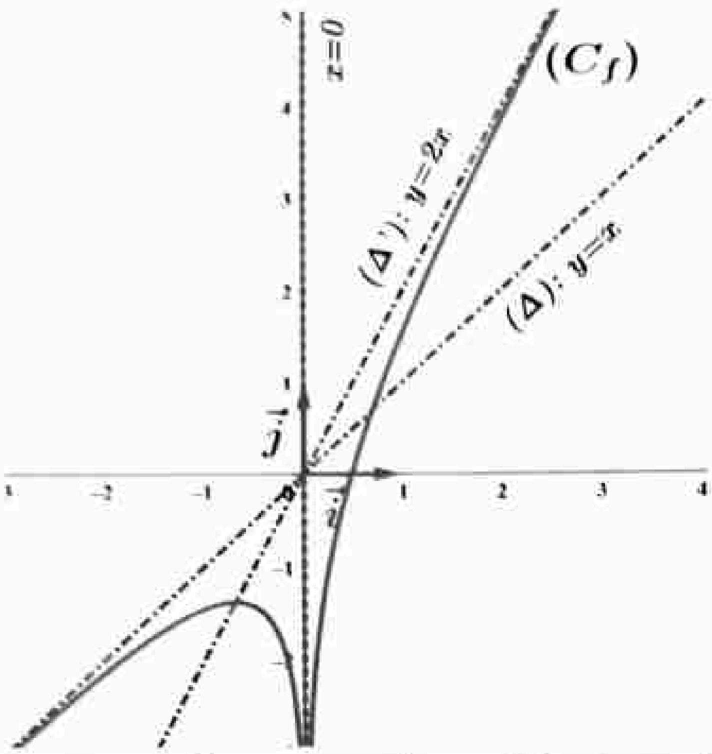
نضرب في e^{α}

$$e^{\alpha}.e^{\alpha}-e^{\alpha}=e^{-\alpha}.e^{\alpha}$$
$$e^{2\alpha}-e^{\alpha}=1$$

ومنه:

$$e^{2\alpha}-e^{\alpha}-1=0$$

- رسم (Δ)، (Δ')، (C_f)



3-جـ- المناقشة البيانية لحلول المعادلة: $f(x)=|m|x$

الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=|m|x$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=|m|x$

1) $0\le|m|\le1$ أي $-1\le m\le1$: للمعادلة حل واحد موجب

2) $1<|m|<2$ أي $m\in]-2;-1[\cup]1;2[$: للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

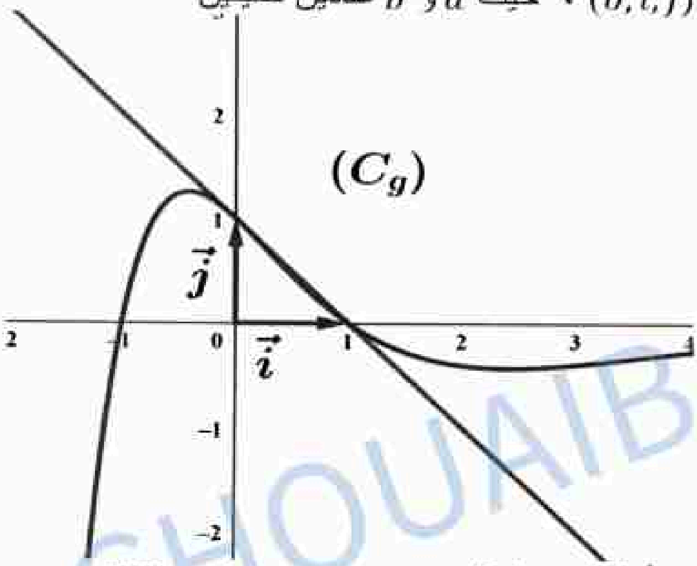
3) $|m|\ge2$ أي $m\in]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$ للمعادلة حل واحد سالب

109. دالة مقترحة رقم 03

البوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019(ع ت+ تر +ر) رقم 3

الجزء الأول

الشكل المقابل هو للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(1+ax^2)e^{bx}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، حيث a و b عددين حقيقين



1-أ-بقراءة بيانية جد: $g(-1)$, $g(0)$, $g'(0)$

1-ب- استنتج قيمة كل من a و b

2- عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$

3- اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

-الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=(x+1)^2e^{-x}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

2-أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=g(x)$

2-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول التغيرات

3-أ- عين دون حساب $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا

3-ب- استنتج معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

4- أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f)

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة $f(x)=|m+1|$

6-نعتبر h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=f(x^2)-1$$

باستعمال مشتق دالة مركبة: احسب $h'(x)$ ثم استنتج تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

الحل

الجزء الأول

1-أ-تعيين $g(-1)$ ، $g(0)$ ، $g'(0)$ بقراءة بيانية

$g(0)=1 \quad g(-1)=0$

$g'(0)$ هو معامل توجيه المماس عند 0

$$g'(0)=\frac{0-1}{1-0}=-1$$

1-ب- استنتاج قيمة كل من a و b

لدينا $g(-1)=0$

$g(-1)=(1+a(-1)^2)e^{b(-1)}=0$

$(1+a)e^{-b}=0$

$e^{-b}>0$ ومنه $1+a=0$

$a=-1$

$g'(0)=-1$

نشتق الدالة g

$g'(x)=-2xe^{bx}+be^{bx}(1-x^2)$

$g'(0)=-2(0)e^{b(0)}+be^{b(0)}(1-0)=-1$

$b=-1$

حسب قيم a و b فإن عبارة الدالة g هي:

$g(x)=(1-x^2)e^{-x}$

2- تعيين إشارة $g(x)$:

ندرس إشارة $(1-x^2)e^{-x}$

لدينا $e^{-x}>0$ أي إشارة $g(x)$ من إشارة $(1-x^2)$

$1-x^2=(1-x)(1+x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3- كتابة معادلة المماس لـ(C_g) عند النقطة ذات الفاصلة 0

$y=g'(0)(x-0)+g(0)$

نشتق الدالة g

$g'(x)=-2xe^{-x}-e^{-x}(1-x^2)$

$g'(x)=e^{-x}(x^2-2x-1)$

$g'(0) = -1; g(0) = 1$
$y = -1(x) + 1$
$y = -x + 1$

4- دراسة اتجاه تغير $g(x)$:

$g'(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 1)$

إذا كانت $g'(x) = 0$ فإن $x^2 - 2x - 1 = 0$
لأن $e^{-x} > 0$

$\Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8$
$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$
$x_1 = 1 - \sqrt{2}$
$x_2 = 1 + \sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال
$]-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty[$
ومتناقصة تماما على المجال $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(1-\sqrt{2})$	↘	$g(1+\sqrt{2})$	↗	0

$\lim_{x\to-\infty} (1 - x^2)\, e^{-x} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (1 - x^2)\, e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x^2}{e^x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{x^2}{e^x}\right) = 0$

الجزء الثاني:

1- حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} (x + 1)^2 e^{-x} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x + 1)^2 e^{-x} =$ ح ع ت

الإزالة

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي لـ (C_f) عند $+\infty$

2-أ- بيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

نشتق الدالة f :

$f'(x) = (2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$
$= (2x + 2 - x^2 - 2x - 1)e^{-x}$
$= (1 - x^2)e^{-x} = g(x)$

لاستنتاج اتجاه تغير $f(x)$: ندرس إشارة $f'(x)$
ولدينا $f'(x) = g(x)$ ومنه إشارة $f'(x)$
من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال:
$]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
ومتزايدة تماما على المجال $[-1; 1]$
$f(-1) = 0$
$f(1) = 4e^{-1}$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-1}$	↘	0

3-أ- تعيين دون حساب $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-1}{x}$

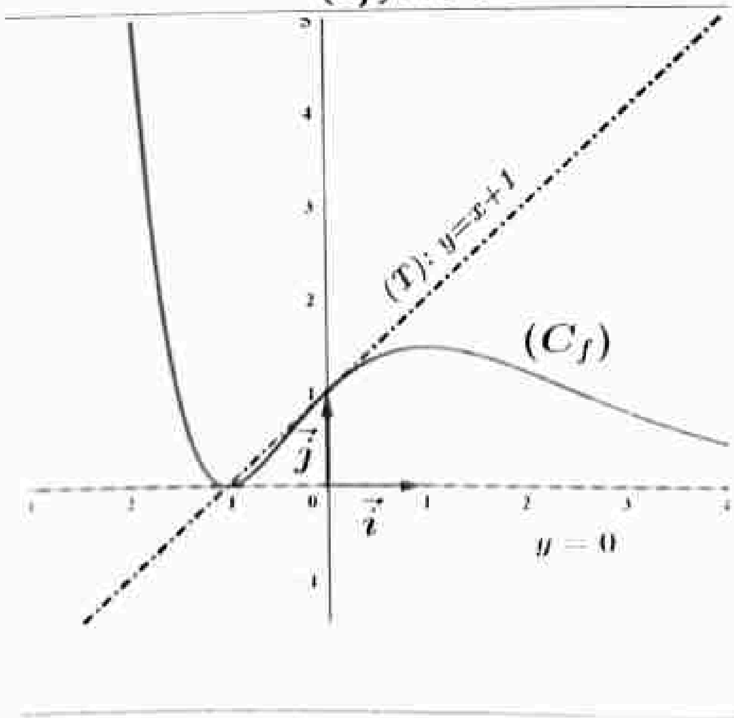
$$\lim_{x\to0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= f'(0) = g(0) = 1$$

التفسير: 1 هو معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3-ب- معادلة المماس (T) عند $x_0 = 0$:

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$y = 1(x) + 1$
$y = x + 1$

4- انشاء كل من (T) و (C_f)



5- المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$$f(x) = |m + 1|$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = |m + 1|$

1) $y = 0$ أي $|m + 1| = 0$ أي $m = -1$

للمعادلة حل مضاعف سالبا

2) $0 < |m + 1| < 1$ أي

$m + 1 \in]-1; 0[\cup]0; 1[$

أي $m \in]-2; -1[\cup]-1; 0[$

للمعادلة 3 حلول اثنان سالبان وواحد موجب

3) $|m + 1| = 1$ أي $\begin{cases} m + 1 = 1 \\ m + 1 = -1 \end{cases}$ أي

$\begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$ للمعادلة 3 حلول واحد موجب وواحد سالب والأخر معدوم

4) $1 < |m + 1| < 4e^{-1}$ أي

$m + 1 \in]-4e^{-1}; -1[\cup]1; 4e^{-1}[$

أي $m \in]-4e^{-1} - 1; -2[\cup]0; 4e^{-1} - 1[$

للمعادلة 3 حلول (2) موجبان وواحد سالب

5) $|m + 1| = 4e^{-1}$ أي

$m + 1 = 4e^{-1}$ أو $m + 1 = -4e^{-1}$

ومنه $m = 4e^{-1} - 1$ أو $m = -4e^{-1} - 1$

للمعادلة حلان أحدهما موجب والأخر سالب

6) $|m + 1| > 4e^{-1}$ أي

$(m + 1) \in]-\infty; -4e^{-1}[\cup]4e^{-1}; +\infty[$

أي $m \in]-\infty; -4e^{-1} - 1[\cup]4e^{-1} - 1; +\infty[$

للمعادلة حل واحد سالب

6- حساب $h'(x)$:

$$h'(x) = 2xf'(x^2) - 0$$

لاستنتاج اتجاه تغير $h(x)$: ندرس إشارة $h'(x)$

اشارتها من إشارة الجداء $2xf'(x^2)$

$f'(x^2) \geq 0$ إذا كان $-1 \leq x^2 \leq 1$

لكن $0 \leq x^2$ أي $0 \leq x^2 \leq 1$

$\sqrt{0} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1}$

أي $0 \leq |x| \leq 1$ أي $|x| \leq 1$

ومنه $-1 \leq x \leq 1$

و $f'(x^2) \leq 0$ اذا كان $x^2 \geq 1$

أي: $\sqrt{x^2} \geq \sqrt{1}$:أي $|x| \geq 1$

أي $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

الدالة h :

متزايدة تماما على المجال: $]-\infty; -1] \cup [0; 1]$

ومتناقصة تماما على المجال: $[-1; 0] \cup [1; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	-1	↗	$4e^{-1} - 1$	↘	0	↗	$4e^{-1} - 1$	↘	-1

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (f(x^2) - 1) = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (f(x^2) - 1) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 1) = 0 - 1 = -1$$

110. دالة مقترحة رقم 04

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019 ...

الجزء الأول:

1- نعتبر الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ:

$g(x) = 2x - (x - 1)\ln(x - 1)$

1-أ- أحسب $\lim_{x \to +\infty} g(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} g(x)$

1-ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]1; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

1-جـ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $10 < \alpha < 10{,}5$

2- h دالة معرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي

$$h(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$$

2-أ- أحسب نهايتي الدالة h

2-ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$

$$h'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2 - 1)}$$

2-جـ- ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

-الجزء الثاني-

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$ و (C_f) منحنى الدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

حيث: $\|\vec{i}\| = 3cm$

أ- تحقق من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ أن: $f(x) = h(e^x)$

ب- استنتج $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسر النتيجتين هندسيا

جـ- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

د- برهن انه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ أن: $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

هـ- احسب معادلة المماس (T) عند النقطة تقاطع (C_f) حامل محور الفواصل

و- ارسم (T) و (C_f) ، نقبل أن $\ln(\sqrt{\alpha}) \simeq 1,17$ و $f(\ln\sqrt{\alpha}) \simeq 0,7$

ي- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = |m|x - |m|\ln\sqrt{2}$

الحل

الجزء الأول:

1-أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} [2x - (x-1)\ln(x-1)]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} [\frac{2x}{x-1} - \ln(x-1)](x-1)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^{>}} g(x) = \lim_{x\to 1^{>}} [2x - (x-1)\ln(x-1)] = 2$$

نضع $t = x-1 \Leftarrow x = t+1$

لما $x \xrightarrow{>} 1$ فإن $t \xrightarrow{>} 0$

$$\lim_{t\to 0^{>}} 2(t+1) - t\ln(t) = 2$$
$$\lim_{t \to 0^{>}} t\ln(t) = 0$$

1-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة g على $]1;+\infty[$

$$g'(x) = 2 - \left[1\ln(x-1) + \frac{1}{x-1}(x-1)\right]$$
$$= 2 - \ln(x-1) - 1$$
$$= 1 - \ln(x-1)$$

ندرس إشارة $g'(x)$ اذا كان $g'(x) > 0$ يكون $1 - \ln(x-1) \geq 0$

$$1 - \ln(x-1) \geq 0$$
$$-\ln(x-1) \geq -1$$
$$\ln(x-1) \leq 1$$
$$e^{\ln(x-1)} \leq e^1$$
$$x - 1 \leq e^1$$
$$x \leq e+1$$

x	1	$e+1$	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+$	0	$-$

الدالة g متزايدة تماما على المجال : $]1;e+1]$

ومتناقصة تماما على المجال: $[e+1;+\infty[$

-تشكيل جدول التغيرات:

x	1	$e+1$	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $+$	0	$-$
$g(x)$	‖ 2 ↗	$e+2$	↘ $-\infty$

1-جـ- البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن الدالة g متناقصة تماما ومستمرة على المجال $]10;10,5[$

و
$$\begin{cases} g(10,5) = -0,3 \\ g(10) = 0.22 \end{cases}$$

و $g(10) \times g(10.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث
$$10 < \alpha < 10.5$$

5- استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]1;+\infty[$

x	1	α	$+\infty$
$g(x)$	‖ $+$	0	$-$

الجزء الثاني:

2-أ- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to 1^{>}} h(x) = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 1^{>}} \frac{\ln(x-1)(x+1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 1^{>}} \frac{\ln(x-1) + \ln(x+2)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 1^{>}} \frac{\ln(x-1)}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

د. البرهان أن $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

من جدول التغيرات نجد أن الدالة تقبل قيمة حدية محلية عظمى عند $\ln\sqrt{\alpha}$ حيث

$$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(e^{2\ln\sqrt{\alpha}} - 1)}{e^{\ln\sqrt{\alpha}}} = \frac{\ln\left(e^{\ln\sqrt{\alpha}^2} - 1\right)}{\sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{\ln(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

ولدينا $g(\alpha) = 0$

ومنه $2\alpha - (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1) = 0$

$$2\alpha = (\alpha - 1)\ln(\alpha - 1)$$

$$\ln(\alpha - 1) = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}$$

نعوض

$$f(\ln\sqrt{\alpha}) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)} = \frac{2\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} \geq f(x)$$

د- حساب معادلة المماس عند نقطة تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

حل المعادلة $f(x) = 0$

$$\frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x} = 0$$

$e^x > 0$ ومنه

$$\ln(e^{2x} - 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 1 = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow e^{2x} = 2$$

$$\Rightarrow 2x = \ln 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$$

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(\frac{\ln 2}{2}; 0\right)\right\}$$

$$\frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \ln\sqrt{2}$$

$$(C_f) \cap (xx') = \{(\ln\sqrt{2}; 0)\}$$

$$y = f'(\ln\sqrt{2})(x - \ln\sqrt{2}) + f(\ln\sqrt{2})$$

$$f'(\ln\sqrt{2}) = e^{\ln\sqrt{2}}h'\left(e^{\ln\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}h'(\sqrt{2})$$

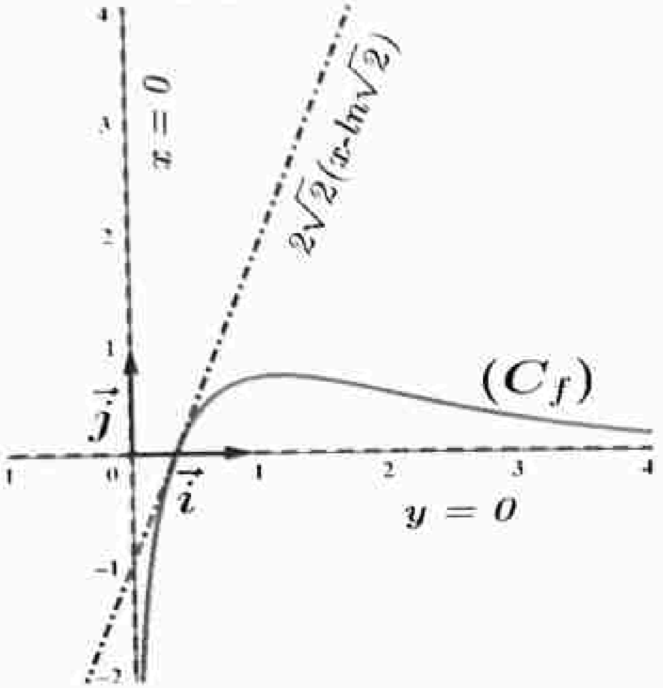
$$h'(\sqrt{2}) = \frac{g\left(\sqrt{2}^2\right)}{(\sqrt{2})^2\left(\sqrt{2}^2 - 1\right)}$$

$$= \frac{g(2)}{2(2-1)} = \frac{g(2)}{2}$$

$$g(2) = 4$$

$$y = 2\sqrt{2}(x - \ln\sqrt{2})$$

و -رسم (T) و (C_f)



ي- المناقشة البيانية لحلول المعادلة :

$$f(x) = |m|x - |m|\ln\sqrt{2}$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة

$$y = |m|x - |m|\ln\sqrt{2}$$

أي $y = |m|(x - \ln\sqrt{2})$

1) $|m| = 0$ لأن: $|m| \geq 0$ أي $m = 0$

للمعادلة حل وحيد $x_0 = \ln\sqrt{2}$

2) $0 < |m| < 2\sqrt{2}$ أي

$m \in]-2\sqrt{2}; 0[\cup]0; 2\sqrt{2}[$

للمعادلة حلان موجبان

3) $|m| = 2\sqrt{2}$ أي $\begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$

للمعادلة حل مضاعف $x_0 = \ln\sqrt{2}$

4) $|m| > 2\sqrt{2}$ أي:

$m \in]-\infty; -2\sqrt{2}[\cup]2\sqrt{2}; +\infty[$

للمعادلة حلان موجبان

111. دالة مقترحة رقم 05

الموضوع : مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019 رقم 5

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-3;2\}$ بالعبارة:

$$f(x)=\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|$$

(C_f) منحناها البياني الممثل في المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ-احسب نهايات الدالة f على أطراف مجموعة تعريفها وفسر النتائج المحصل عليها بيانيا

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

جـ-برهن أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيها

د-اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة الانعطاف السابقة

هـ-ماذا يمكن القول عن المماس (T) والمنحنى (C_f) عند نقطة الانعطاف السابقة؟

و-ارسم (T) والمستقيمات المقاربة، (C_f) في المعلم السابق

ي-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=m\left(x+\frac{1}{2}\right)$

الحل

أ-حساب النهايات :

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|=\lim_{t\to1}\ln(t)$$
$$=0$$

نضع $t=\left|\frac{x+3}{x-2}\right|$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left|\frac{x+3}{x-2}\right|=\lim_{|x|\to+\infty}\left|\frac{x}{x}\right|=1$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$

$$\lim_{\substack{x\to-3\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-3\\ >}}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|=\lim_{\substack{t\to0\\ >}}\ln t$$
$$=-\infty$$
$$t=\left|\frac{x+3}{x-2}\right|$$
$$\lim_{\substack{x\to-3\\ >}}\left|\frac{x+3}{x-2}\right|=\left|\frac{0}{-5}\right|=0^+$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=-3$ كمقارب عمودي بجوار $-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to2\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\ >}}\ln\left|\frac{x+3}{x-2}\right|=\lim_{t\to+\infty}\ln t$$
$$=+\infty$$
$$t=\left|\frac{x+3}{x-2}\right|$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ب-دراسة اتجاه التغير :

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=-\frac{5}{(x-2)(x+3)}$$

x	$-\infty$	-3		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
-5	$-$		$-$		$-$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$

الدالة f:

متزايدة تماما على المجال $]-3;2[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

جـ-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

حتى يقبل (C_f) نقطة انعطاف يجب أن تنعدم المشتقة الثانية مغيرة اشارتها

$$f''(x)=(f'(x))'=\left(-\frac{5}{x^2+x-6}\right)'$$
$$=\frac{0(x^2+x-6)-(2x+1)(-5)}{(x^2+x-6)^2}$$
$$=\frac{10x+5}{(x^2+x-6)^2}$$

أي $10x+5=0$ منه $x=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$

لأن $(x^2+x-6)^2>0$

x	$-\infty$	-3		$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف $A\left(-\frac{1}{2};f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

أي: $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

كتابة معادلة المماس عند نقطة الانعطاف السابقة:

$$y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

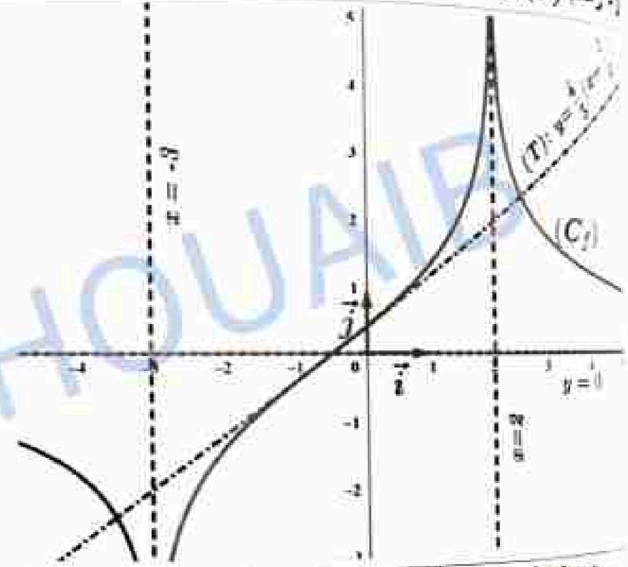
$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{\left(-\frac{1}{2}+3\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)} = -\frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{5}{\frac{25}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$(T): y = \frac{4}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

- الاستنتاج

يمكن القول أن (T) يخترق (C_f) عند A

- رسم (T) والمستقيمات المقاربة و (C_f)



- المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$$f(x) = m\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذو المعادلة: $y = m(x+\frac{1}{2})$

- $m \in]-\infty;0]$ للمعادلة حل وحيد
- $m \in]0;\frac{4}{5}]$ للمعادلة ثلاث حلول
- $m \in]\frac{4}{5};+\infty[$ للمعادلة خمس حلول متمايزة

112. دالة مقترحة رقم 06

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019 ، د. 7

I-لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 1-(1+2x)e^{2x}$$

1- احسب نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$

2- أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها

3- أحسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x) = x+3-xe^{2x}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

2-أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

2-ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$f'(x) = g(x)$$

3-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4-أ- بين ان (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث

$-3{,}05 < \alpha < -3$ و $0{,}75 < \beta < 0{,}8$

4-ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

4-جـ- أرسم (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f)

5- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(E): f(x) = x+m$

6- h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$h(x) = \frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$$

6-أ-بين انه من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا : $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

6-ب-أحسب $h'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها (دون حساب عبارة الدالة h')

الحل

ب-1- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-(1+2x)e^{2x})$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (1-e^{2x}-2xe^{2x})$$
$$= 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-(1+2x)e^{2x})$$
$$= -\infty$$

أ-2- دراسة اتجاه التغير :

$$g'(x) = 0 - [2e^{2x} + 2e^{2x}(1+2x)]$$
$$= -2e^{2x} - 2e^{2x}(1+2x)$$
$$= (-2-2(1+2x))e^{2x}$$
$$= (-2-2-4x)e^{2x}$$
$$= (-4-4x)e^{2x}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $(-4-4x)$ لأن $e^{2x} > 0$

$$-4x-4=0$$
$$\Rightarrow -4x = 4$$
$$\Rightarrow \quad x=-1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-1]$

ومتناقصة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	$-\infty$

3- حساب $g(0)$

$$g(0) = 1-(1+2(0))e^{2(0)} = 0$$

استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II-1- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+3-xe^{2x}) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{3}{x}-e^{2x}\right) = -\infty$$

2-أ- بيان أن (C_f) يقبل م م مائل (Δ)

$$\lim_{x\to-\infty} [x+3-xe^{2x}-(x+3)]$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (-xe^{2x}) = 0$$

ومنه (Δ) ذو المعادلة $y = x+3$ م م مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

2-ب- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y = x+3-xe^{2x}-x-3 = -xe^{2x}$$

لكن $e^{2x} > 0$ فإشارته من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضع		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	

3-أ- البرهان أن :

نشتق $f(x)$:

$$f'(x) = 1+0-(1e^{2x}+2e^{2x}x)$$
$$= 1-(2x+1)e^{2x}$$
$$= g(x)$$

3-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها

ندرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

و لدينا $f'(x) = g(x)$ ومنه : فإشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;0]$

ومتناقصة على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

4-أ- بيان أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث : $-3.05 < \alpha < -3$ و $0.8 < \beta < 0.9$

أ-الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-3.05;-3[$

و
$$\begin{cases} f(-3) = 0,007 \\ f(-3,05) = -0,04 \end{cases}$$

و $f(-3.05)f(-3.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث
$-3{,}05<\alpha<-3$

ب-الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على $]0{,}75;0{,}8[$

و $\begin{cases} f(0{,}8)=-1{,}6 \\ f(0{,}75)=0{,}38 \end{cases}$

و $f(0.75)\times f(0.8)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β

حيث $0{,}75<\beta<0{,}8$

من (-أ-ب-)نجد أن (C_f) يقطع (xx') في نقطتين فاصلتاهما على الترتيب α و β

ب-بيان أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)

نحل المعادلة $f'(x)=1$

حيث معادلة (Δ) $y=x+3$

ومنه $1-(2x+1)e^{2x}=1$

$-(2x+1)e^{2x}=0$

أي $-(2x+1)=0$ لأن $e^{2x}>0$

$-2x-1=0$

$x=-\frac{1}{2}$

ومنه (C_f) يقبل مماسا موازيا لــ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=-\frac{1}{2}$

-معادلة المماس (T)

$$y=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

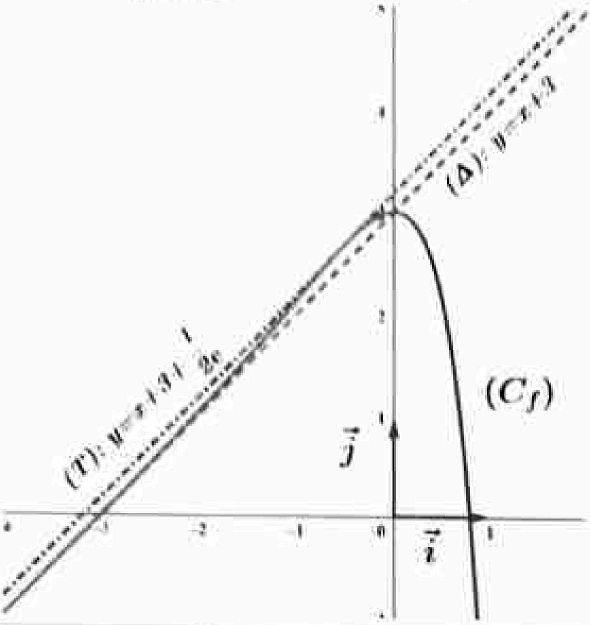
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{3(2)}{2}+\frac{1}{2}e^{2\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$y=1\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$(T): y=x+3+\frac{1}{2}e^{-1}$$

4 -جــ رسم (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f)



5- المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$f(x)=x+m$

الحلول هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ (مناقشة مائلة):

1) $m<3$: للمعادلة حل وحيد موجب تماما

2) $m=3$: للمعادلة حل وحيد معدوم

3) $3<m<3+\frac{1}{2}e^{-1}$

للمعادلة حلان متمايزان وسالبان

4) $m=3+\frac{1}{2}e^{-1}$: للمعادلة حل مضاعف

5) $m>3+\frac{1}{2}e^{-1}$: لا توجد حلول للمعادلة.

6-أ-البرهان أن $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{3x}{x}-\frac{1}{x}e^{2\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+3x-\left(e^{\frac{2}{x}}\right)}{x}$$
$$=h(x)$$

6-ب-حساب $h'(x)$:

$$h'(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

استنتاج اتجاه تغير $h(x)$:

ندرس إشارة **$h'(x)$:**

لكن لدينا $h'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$

و $-\frac{1}{x^2}<0$ على $\mathbb{R}^*$

1) اذا كانت $f'(x)>0$ أي $x<0$

ومنه $f'\left(\frac{1}{x}\right)>0$ إذا كان $\frac{1}{x}<0$ ومنه $x<0$

2) $f'(x)<0$ إذا كان $x>0$

$x > 0$ ومنه $\frac{1}{x} > 0$ إذا كان $f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$	$+$	||	$-$
$-\frac{1}{x^2}$	$-$	||	$-$
$h'(x)$	$-$	||	$+$

الدالة h متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

والدالة h متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = -\infty$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	||	$+$
$h(x)$	$3 \searrow -\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$

113. دالة مقترحة رقم 07

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019 رقم 8

I-لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)$$

وليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و فسر النتيجة هندسيا

1-ب- احسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$$g'(x) = -\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

2-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة g ، وشكل جدول تغيراتها

3-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x$$

3-ب- بين أن $\lim_{x\to+\infty}[g(x)+x] = 1$ ، ثم استنتج أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معينا معادلة له

4- أرسم (Δ) و (C_g)

II- f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = e^{-x}\ln(e^x+1)$$

1- برهن أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

- ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = e^{-x} \times g(x)$$

2-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f و جدول تغيراتها

3- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ثم أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} \frac{1}{e^x+1}dx$

4- أحسب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)dx$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لهذا العدد

الحل

1-أ-حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)\right) = 0$$

ومنه (C_g) يقبل م م أفقي معادلته $y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)\right)$$

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x(1)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x+1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\ln(e^x+1) = -\infty$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2-أ- بيان أن $g'(x) = -\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ من اجل كل x حقيقي

الدالة g قابلة للاشتقاق على D_g ودالتها المشتقة:

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} - \frac{e^x(e^x+1)}{(e^x+1)(e^x+1)}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}-e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$g'(x) = -\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} < 0$$

2-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة g

لدينا : $g'(x) = -\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} < 0$ ومنه الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$

3-أ- البرهان أن :

$$g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x$$

$$g(x) = \frac{e^x(e^{-x})}{(e^x+1)(e^{-x})} - \ln(e^x+1)$$

$$= \frac{e^{x-x}}{e^{x-x}+e^{-x}} - \ln\left[e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right]$$

$$= \frac{e^0}{e^0+e^{-x}} - \ln e^x - \ln(1+e^{-x})$$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}} - x - \ln(1+e^{-x}) = g(x)$$

3-ب- بيان أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+x) = 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^{-x}) - x + x\right]$$

$$= 1 - \ln 1 = 1$$

-استنتاج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب

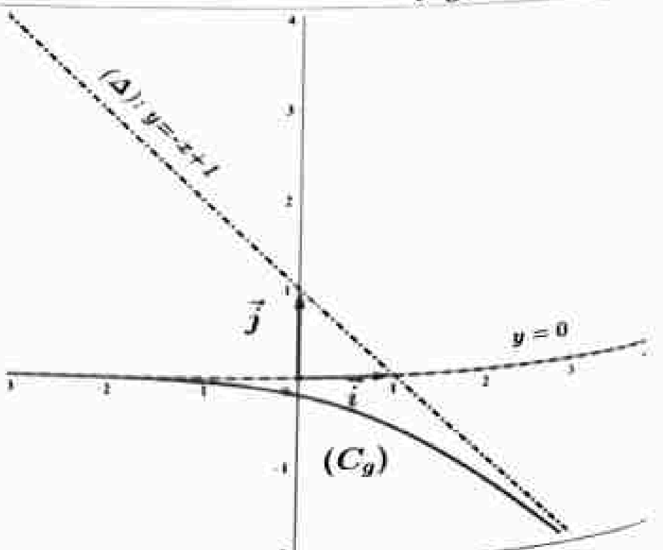
لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+x = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)+x-1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-y) = 0$$

ومنه : (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = (-x+1)$ بجوار $+\infty$.

4- رسم (Δ) و (C_g)



II-1- البرهان أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$$

نضع $t = e^x$

$$x \to -\infty \Rightarrow t \to 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0}\frac{h(t)-h(0)}{t-0} = h'(0)$$

حيث الدالة h قابلة للاشتقاق عند 0 :

$$h(t) = \ln(t+1)$$

و $h(0) = 0$ و $h'(t) = \frac{1}{t+1}$

أي $h'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

-حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$$

نضع $y = e^x$

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y+1)}{y} = 0$$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2-أ- البرهان أن $f'(x) = e^{-x}\times g(x)$

نشتق الدالة f :

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1}e^{-x}$$

$$= e^{-x}\left[-\ln(e^x+1) + \frac{e^x}{e^x+1}\right] = e^{-x}.g(x)$$

2-ب- استنتاج اتجاه تغير $f(x)$:

لدينا : $f'(x) = e^{-x}\,g(x)$

لكن $g(x) < 0$ و $e^{-x} > 0$ أي $f'(x) < 0$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

3- التحقق أن $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$:

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{(e^{-x})(1)}{(e^{-x})(e^x+1)}$$

$$= \frac{e^{-x}}{e^{-x+x}+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

-حساب $\int_{-\ln 3}^{0} \frac{1}{e^x+1}dx$

لدينا $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx = \int_{-\ln 3}^{0} -\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$
$$= -[\ln(e^{-x}+1)]_{-\ln 3}^{0}$$

$$\frac{u'}{u} \xrightarrow{\text{دالتها الاصلية}} \ln|u|$$

ولأن $e^{-x}+1>0$ يجوز كتابتها بدون رمز القيمة المطلقة

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx = -[\ln(e^{-x}+1)]_{-\ln 3}^{0}$$
$$= -[\ln 2 - \ln(e^{\ln 3}+1)]$$
$$= -\ln 2 + \ln 4$$
$$= -\ln 2 + \ln 2^2$$
$$= -\ln 2 + 2\ln 2 \quad = \ln 2$$

4- حساب $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx$

$$\int_{-\ln 3}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\ln 3}^{0}\frac{\ln(e^x+1)}{e^x}dx$$

نستعمل التكامل بالتجزئة

$u(x) =$	$\ln(e^x+1)$	$u'(x) =$	$\frac{e^x}{e^x+1}$
$v(x) =$	$-e^{-x}$	$v'(x) =$	$\frac{1}{e^x} = e^{-x}$

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x}\ln(e^x+1)\,dx$$
$$= [-e^{-x}\ln(e^x+1)]_{-\ln 3}^{0} + \int_{-\ln 3}^{0}\frac{e^x.e^{-x}}{e^x+1}dx$$

ولدينا أن :

$$\int_{-\ln 3}^{0}\frac{1}{e^x+1}dx = \ln 2$$
$$= -\ln 2 + 3\ln\left(e^{\ln\frac{1}{3}}+1\right) + \ln 2$$
$$= 3\ln\left(\frac{1}{3}+1\right)$$
$$= 3\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

-التفسير الهندسي للعدد:

العدد $\int_{-\ln 3}^{0} f(x)dx$ هو مساحة الحيز المحدد بمنحنى الدالة f والمستقيمات التي معادلاتها $y=0$ و $x=0$ و $x=-\ln 3$

السلسلة القص...

114. دالة مقترحة رقم 08

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2018 ...

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x) = e^x + x + 2$

1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $-2.2<\alpha<-2.1$

3- استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x) = \frac{1-xe^x}{e^x+1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o};\vec{i};\vec{j})$.

1-أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:
$$f'(x) = \frac{-e^{-x}g(x)}{(e^x+1)^2}$$

حيث: f' هي مشتقة f.

ب- أدرس اتجاه التغير للدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3-أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f(x)+x = \frac{1+x}{e^x+1}$

ب – استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f).

ج- استنتج الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f)

د-بين أن: $f(\alpha) = -(\alpha+1)$

ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

4-أ- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $0.5<\beta<0.6$.

ب- أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f).

ج- ليكن m عدد حقيقي موجب تماما.

-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(x+\ln m)e^x - \ln m = 0$ ...

الحل

II-الدالة g المعرفة $g(x)=e^x+x+2$

1- اتجاه تغير g

ندرس إشارة المشتقة g'

$$g'(x)=e^x+1$$

لكن

$$e^x>0$$
$$e^x+1>1>0$$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2- البرهان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

بما أن الدالة g متزايدة تماما ومستمرة على $\mathbb{R}$

و

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty\end{cases}$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)\times\lim_{x\to+\infty} g(x)<0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

-البرهان أن $-2,2<\alpha<-2,1$

لدينا $g(-2,2)=-0,09$

و $g(-2,1)=0,02$

ومنه $-2,2<\alpha<-2,1$

3- استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II-الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\frac{1-xe^x}{e^x+1}$

1-أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-xe^x}{e^x+1}=1$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل م مقاربا أفقيا معادلته $y=1$ بجوار $-\infty$

1-ب- البرهان أن: $f(x)=\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$

$$f(x)=\frac{1-xe^x}{e^x+1}=\frac{e^x\left[\frac{1}{e^x}-x\right]}{e^x\left[1+\frac{1}{e^x}\right]}=\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}=-\infty$$

2-أ- البرهان على عبارة $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{-(e^x+xe^x)(e^x+1)-e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^{2x}-2e^x-xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^x(e^x+2+x)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

2-ب- دراسة اتجاه تغير الدالة f

لدينا $f'(x)=-\frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$

وبما أن

$e^x>0$ و $(e^x+1)^2>0$

فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

جدول التغيرات الدالة f

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3-أ- التحقق أن $f(x)+x=\frac{1+x}{e^x+1}$ من أجل $x\in[0;+\infty[$

$$f(x)+x=\frac{1-xe^x}{e^x+1}+x$$
$$=\frac{1-xe^x+xe^x+x}{e^x+1}=\frac{1+x}{e^x+1}$$

ب-استنتاج أن (Δ) م م مائل لــ (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{e^x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=0$$

ومنه (Δ) م م مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

جــاستنتاج وضعية (C_f) مع (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x) - y = \frac{1+x}{e^x+1}$$

لكن: $e^x + 1 > 0$

ومنه إشارة الفرق من إشارة $x+1$

$x + 1 = 0$

$x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)

د-البرهان أن $f(\alpha) = -(\alpha+1)$

لدينا

$$f(\alpha) = \frac{1 - \alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$$

ولدينا

$g(\alpha) = 0$

$g(\alpha) = e^\alpha + \alpha + 2 = 0$

$e^\alpha = -\alpha - 2$

نعوض في $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{1 - \alpha(-\alpha-2)}{(-\alpha-2)+1}$$

$$= \frac{1+\alpha^2+2\alpha}{-(\alpha+1)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)^2}{-(\alpha+1)}$$

$$= -\frac{\alpha+1}{1}$$

$$f(\alpha) = -(\alpha+1)$$

-استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا $-2{,}2 < \alpha < -2.1$

$-1{,}2 < \alpha + 1 < -1.1$

ومنه

$1{,}1 < -(\alpha+1) < 1{,}2$

$1{,}1 < f(\alpha) < 1{,}2$

4-أ- البرهان أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β:

$(0{,}5 < \beta < 0{,}6)$

لبرهان ذلك نبرهن أن $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

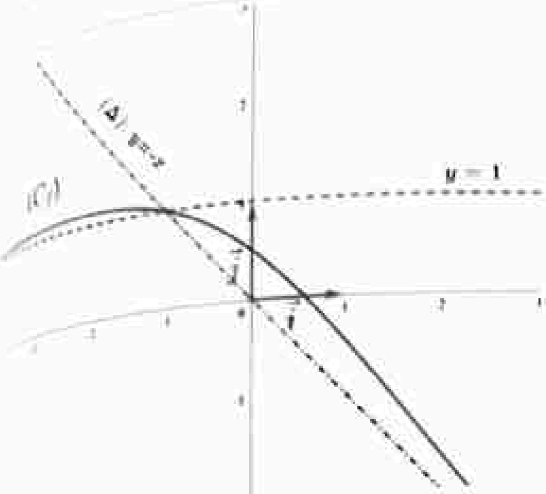
بما أن الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$ ومنه هي مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0.5; 0.6[$.

و

$$\begin{cases} f(0{,}6) = -0{,}03 \\ f(0{,}5) = 0{,}06 \end{cases}$$

و $f(0.5) \times f(0.6) < 0$ إذن وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $0{,}5 < \beta < 0{,}6$

4-ب- رسم (Δ) و (C_f)



4-جـ- المناقشة البيانية لحلول المعادلة

$1 - (x + \ln m)\, e^x - \ln m = 0$

حلها يكافئ حل المعادلة $f(x) = \ln(m)$

حلول المعادلة $(f(x) = \ln m)$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = \ln m$

- $\ln(m) < \frac{1}{2}$ أي : $m < \sqrt{e}$: للمعادلة حل وحيد موجب

- $\ln(m) = \frac{1}{2}$ أي $m = \sqrt{e}$: للمعادلة حل معدوم

- $\frac{1}{2} < \ln(m) \leq 1$ أي : $\sqrt{e} < m < e$: للمعادلة حل سالب

- $1 < \ln(m) < f(\alpha)$ أي: $e < m < e^{f(\alpha)}$: للمعادلة حلان سالبان

- $\ln(m) = f(\alpha)$ أي: $m = e^{f(\alpha)}$: للمعادلة حل مضاعف سالب

- $\ln(m) > f(\alpha)$ أي: $m > e^{f(\alpha)}$: لا توجد حلول للمعادلة.

115. دالة مقترحة رقم 09

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال للبكالوريا

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - x\ln x$

1-أ- أحسب النهايتين التاليتين:

$\lim_{x \to 0^>} g(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا

حيث $3.6 > \alpha > 3.5$.

3- استنتج إشارة العبارة $g(x)+1$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما: $x=0$ و $y=0$.

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

د- أحسب $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3-أ- بين أن: $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}$.

ب- استنتج حصرا العدد $f(\alpha)$ ؛ (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

ج- أنشئ (C_f) .

4- نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما x و m وسيط حقيقي:

$$x^2+x-2m(x+1)=\ln(x^2) \ldots\ldots(E)$$

- تحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها إلى حل المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}x-m$

- عين بيانيا قيم m التي من أجلها تقبل االمعادلة (E) حلين متمايزين.

5- h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$h(x)=\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$$

(C_h) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

- بين أن h دالة زوجية.

- ارسم في نفس المعلم السابق المنحنى (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) .

الحل

I- g الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=x-x\ln x$$

1-أ- حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}(x-x\ln x)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(1-\ln x)]=-\infty$$

1-ب- اتجاه تغير الدالة g

ندرس إشارة المشتقة $g'(x)$

$$g'(x)=-\ln x$$
$$g'(x)=0$$
$$-\ln x=0$$
$$\ln x=0$$

أي $\ln x=\ln 1$

ومنه $x=1$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

2- البرهان أن المعادلة $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا

بما أن الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]3,5;3,6[$

و $\begin{cases} g(3,6)=-1,01 \\ g(3,5)=-0,88 \end{cases}$

و $g(3.6)<-1<g(3.5)$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $g(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $3,5<\alpha<3,6$

3- استنتاج إشارة $g(x)+1$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)+1$		$+$	0	$-$	

II- f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{\ln x}{x+1}$

1- بيان أن (C_f) يقبل م م $x=0$ و $y=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x+1}=\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

ومنه (C_f) يقبل م م عمودي $x=0$ بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

ومنه (C_f) يقبل م م أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$

2-أ- بيان أن $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - 1\ln x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{x+1-x\ln x}{x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x+1-x\ln x}{x}\,\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$$

2-ب- اتجاه تغير الدالة f

بما أن $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

و $x(x+1)^2 > 0$ على $]0;+\infty[$

فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)+1$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0;\alpha]$

ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

2-ج- كتابة معادلة المماس (T) عند $x = 1$

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

2-د-حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = 0$$

التفسير البياني:

المنحنى (C_f) يقبل مماسا أفقيا (معامل توجيهه 0) عند النقطة ذات الفاصلة 1

3-أ- البرهان أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

لدينا $f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{\alpha+1}$

ولدينا من الجزء الأول: $g(\alpha) = -1$

$g(\alpha) + 1 = 0$

$g(\alpha) + 1 = 0$

$\ldots + \alpha\ln\alpha + 1 = 0$

$\ln\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$

نعوض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{1}{\alpha}$$

ومنه $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

3-ب- استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$

لدينا $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

$\ldots < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3{,}5}$

$0{,}28 < f(\alpha) < 0{,}29$

4- التحقق أن المعادلة (E) يؤول حلها الى $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)$

بما أن $x > 0$:

$x(x+1) - 2m(x+1) = 2\ln x$

$(x+1)[x - 2m] = 2\ln x$

$x - 2m = \frac{2\ln x}{x+1}$

نضرب طرفي المعادلة في $(\frac{1}{2})$: $\frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x+1}$

ومنه (E) يؤول حلها الى $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

4-ب- تعيين بيانيا قيم m التي تقبل عندها (E) حلين متمايزين

حتى يكون للمعادلة (E) حلان يجب:

$m \in]\frac{1}{2};+\infty[$

5- h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $\frac{\ln|x|}{-|x|-1}$

5-أ- بيان أن الدالة h زوجية:

حتى تكون h زوجية يجب:

أن يكون $x \in D_h$ و $-x \in D_f$

أن يكون $h(-x) = h(x)$

$$h(-x) = \frac{\ln|-x|}{-|-x|-1} = \frac{\ln|x|}{-|x|-1} = h(x)$$

ومنه الدالة h زوجية

5-ب- شرح طريقة رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) :

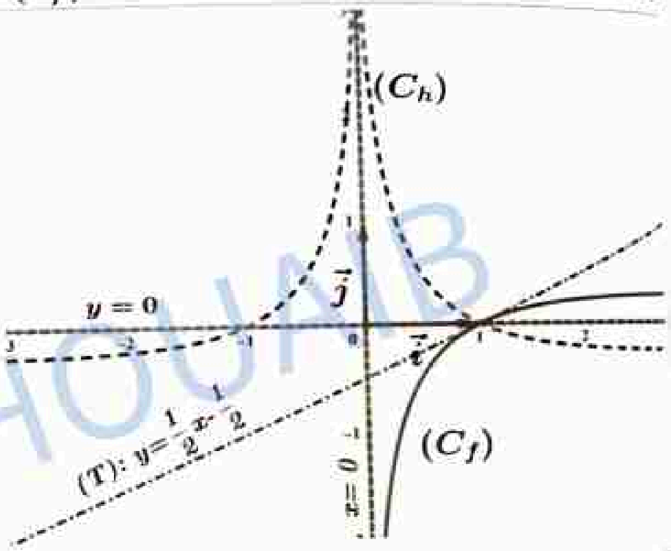
$$h(x) = -\frac{\ln|x|}{|x|+1}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\ln x}{x+1} = -f(x) & : x > 0 \\ -\dfrac{\ln(-x)}{(-x)+1} & : x < 0 \end{cases}$$

(C_h) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $]0; +\infty[$ لأن: $h(x) = -f(x)$

وبما أن الدالة h زوجية فمنحناها متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

5-ب- رسم (C_h) في نفس المعلم مستعينا بـ (C_f)



116. دالة مقترحة رقم 10

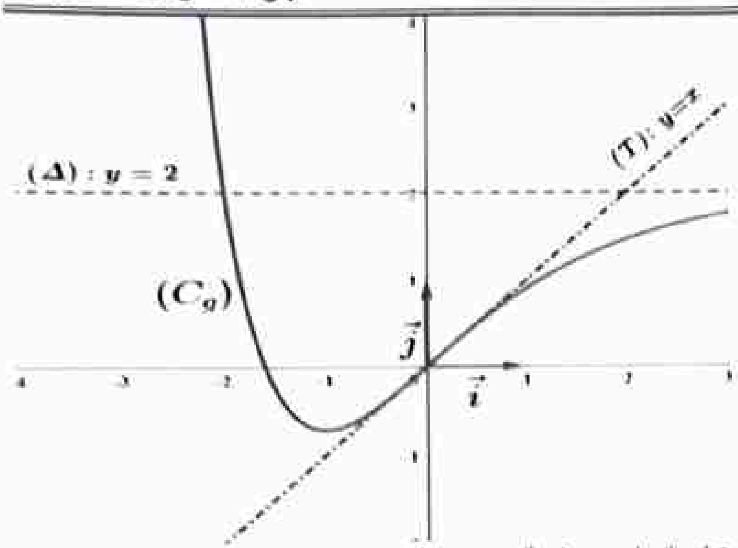
اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2018 رقم 3

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{o}; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (ax+b)e^{-x} + c$

حيث $a; b; c$ أعداد حقيقية.

المنحنى (C_g) يمر من النقطتين $A(-2;2)$ و $O(0;0)$ ويقبل في النقطة $O(0;0)$ مماسا (T) يمر من النقطة $B(-2;-2)$.

المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته: $y = 2$ بجوار $+\infty$.



1) بقراءة بيانية عين كل من $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $g'(0); g'(-1); g(-2); g(0)$

2) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

3) أحسب عبارة $g'(x)$ بدلالة كل من العددين الحقيقيين $b; a$.

4) باستعمال المعطيات السابقة عين كل من الأعداد الحقيقية $c; b; a$ ، ثم استنتج عبارة $g(x)$.

5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x التالية: $(E): g(x) = mx$

الحل

1- بقراءة بيانية تعيين النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

تعيين $g(0)$ ، $g'(-1)$ ، $g'(0)$ و $g(-2)$

$$g(0) = 0$$
$$g(-2) = 2$$
$$g'(-1) = 0$$
$$g'(0) = \frac{y_0 - y_B}{x_0 - x_B} = \frac{0-(-2)}{0-(-2)} = \frac{2}{2} = 1$$

2- تعيين معادلة ديكارتية للمماس (T) عند $x = 0$:

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$
$$y = x$$

3- كتابة عبارة $g'(x)$ بدلالة a و b:

$$g'(x) = ae^{-x} + (-e^{-x})(ax + b) + 0$$
$$= (a - ax - b)e^{-x}$$
$$= (-ax + a - b)e^{-x}$$

4- تعيين a، b و c:

لدينا $g(0) = 0$ أي $(a(0) + b)e^0 + c = 0$

$b + c = 0$

ولدينا $g'(0) = 1$

$(-a(0) + a - b)e^0 = 1 \Rightarrow a - b = 1 \; ......(1)$

ولدينا:

$g'(-1) = 0$

$(-a(-1) + a - b)e^1 = 0$

$(2a - b)e = 0$

$2a - b = 0 \; .....(3)$ لأن $e \neq 0$

من (2) نجد: $a = 1 + b$ ونعوض في (3)

$2(1 + b) - b = 0$

$2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$

ولدينا

$a = 1 + b$

$a = 1 + (-2)$

$a = -1$

وليدنا $b + c = 0$

$c - 2 = 0$

$c = 2$

فتصبح عبارة $g(x)$

$$g(x) = (-x - 2)e^{-x} + 2$$

5- المناقشة البيانية لحلول المعادلة:

$(E): g(x) = mx$

الحلول البيانية للمعادلة $g(x) = mx$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (T_m) ذي المعادلة $y = mx$.

- $m \in]-\infty; 0]$ للمعادلة حلان أحدهما معدوم والآخر سالب تماما.
- $m \in]0; 1[$ للمعادلة 3 حلول واحد سالب والآخر موجب والآخر معدوم.
- $m \in [1; +\infty[$ للمعادلة حلا واحدا معدوم.

117. دالة مقترحة رقم 11

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2018

الجزء الأول:

لتكن الدالة h المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي:

$$h(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$$

1- أحسب $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ و $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} h(x)$

2- أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها

3- أحسب $h(0)$ ، ثم بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 \leq \alpha \leq -0.71$

- استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$

الجزء الثاني:

لتكن الدالة f الدالة المعرفة على المجموعة $I =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم م م $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$، الوحدة $\|\vec{i}\| = 2cm$

1- أحسب $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

ثم فسر النتيجتين بيانيا

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة فإن $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

- استنتج: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$. ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2- بين من أجل كل عدد حقيقي $x \in I$ أن:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

(نأخذ $\alpha \approx -0.715$)، أعط قيمة للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2}.

4- أنشئ (C_f) ، ثم ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = \ln(m)$ مع: $m > 0$

الحل

الجزء الأول:

الدالة h المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$h(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$$

1- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)\right]=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}h(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$$

لأن:

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}(x+1)\ln(x+1)=0$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة h :

$$h'(x)=\frac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2}-2\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{x+1-x}{(x+1)^2}-\frac{2}{x+1}$$
$$h'(x)=\frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

إشارة $h'(x)$ من إشارة $-2x-1$ لأن $(x+1)^2>0$

جدول الإشارة:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-2x-1$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة h متزايدة تماما على $]-1;-\frac{1}{2}]$.

متناقصة تماما على $[-\frac{1}{2};+\infty[$

جدول التغيرات:

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	$-1+2\ln 2$	↘	$-\infty$

3- حساب $h(0)$:

$$h(0)=\frac{0}{0+1}-2\ln(0+1)=0$$

البرهان أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.72<\alpha<-0.71$:

بما أن الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-0.72;-0.71[$

و $\begin{cases}h(-0.71)=0.027\\ h(-0.72)=-0.025\end{cases}$

و $h(-0.72)\times h(-0.71)<0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α

حيث: $-0.72<\alpha<-0.71$

استنتاج إشارة $h(x)$:

x	-1		α		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء الثاني:

الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$

1- حساب النهايات :

$$\lim_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$
$$=\lim_{\substack{x\to-1\\>}}\frac{1}{x^2}\ln(x+1)=-\infty$$

التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته: $x=-1$ بجوار $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right]=0$$

التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

-تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجموعة I فإن $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(g(x)-g(0))}{x-0}$$
$$=g'(0)=1$$

مع g قابلة للاشتقاق عند 0 و $g(x)=\ln(x+1)$

و $g(0)=0$

و $g'(x)=\frac{1}{x+1}$

و $g'(0)=\frac{1}{0+1}=1$

-استنتاج $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}\,\frac{\ln(x+1)}{x}=-\infty$$

من السؤال السابق $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\,\frac{\ln(x+1)}{x}=+\infty$$

التفسير البياني: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا شاقوليا معادلته $x=0$

2- البرهان أن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$

نشتق الدالة f:

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}x^2-2x\ln(x+1)}{x^4}$$
$$=\frac{\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^3}=\frac{h(x)}{x^3}$$

-استنتاج تغير الدالة f :

ندرس اشارة $f'(x)$ لكن لدينا : $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$

جدول إشارة $f'(x)$

x	-1		α		0		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
x^3	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	

-الدالة f متزايدة تماما على $]-1;\alpha]$.

ومتناقصة تماما على $[\alpha;0[\cup],+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f

x	-1		α		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3- بيان أن: $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$

$$f(\alpha)=\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$$

و لدينا من الجزء الأول : $h(\alpha)=0$

$h(\alpha)=0$

$$h(\alpha)=\frac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0$$
$$\ln(\alpha+1)=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$$

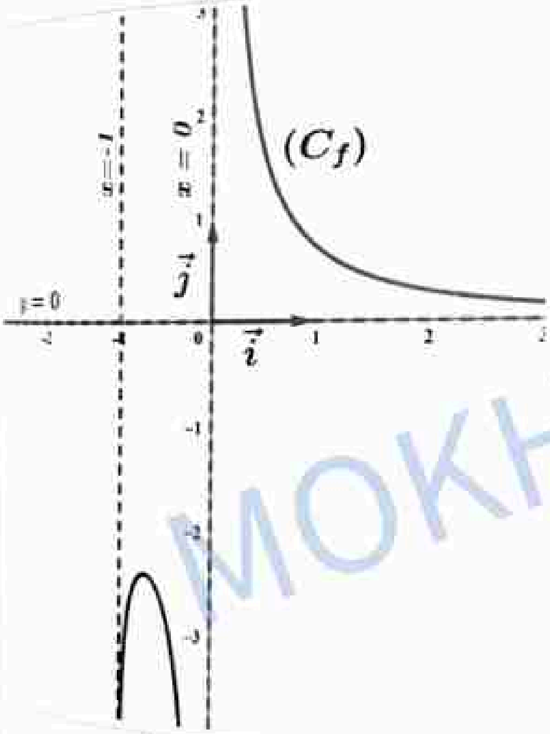
نعوض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=\frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2}=\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\times\frac{1}{\alpha^2}$$
$$=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

إعطاء قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ $(\alpha\approx-0.715)$

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}=\frac{1}{2(-0.715)(-0.715+1)}$$
$$\approx-2.45$$

4- إنشاء (C_f) :



المناقشة البيانية لحلول المعادلة:

$f(x)=\ln m$ مع $m>0$.

الحلول البيانية للمعادلة $f(x)=\ln m$ هي فو...

نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة ...

$\ln m<f(\alpha)$ أي $m<e^{f(\alpha)}$

للمعادلة حلان متمايزان سالبان.

$\ln m=f(\alpha)$ أي $m=e^{f(\alpha)}$

للمعادلة حل مضاعف.

$f(\alpha)<\ln m<0$ أي $e^{f(\alpha)}<m<1$

لا توجد حلول للمعادلة

$\ln m>0$ أي $m>1$ للمعادلة حل وحيد.

118. دالة مقترحة رقم 12

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2018 رقم 7

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-\infty;2]$ كما يلي: $g(x) = x + 1 + e^x$

1- أحسب نهاية الدالة g عند $-\infty$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.28 < \alpha < -1.27$.

4- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-\infty;2]$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;2]$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1 + e^x}{x}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- عين نهاية الدالة f بجوار 0 و $-\infty$.

2- بين أن: $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{x^2}$

ثم استنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;0[\cup]0;2]$.

3- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - (x-1)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

5- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$.

6- بين أن $f(\alpha) = \alpha - 2$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

7- أرسم (Δ) ثم (C_f) (الوحدة $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

8- ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x^2 - (1 + m)x + 1 + e^x = 0$

الجزء الثالث:

لتكن الدالة h الدالة المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

1- بين أن $f'\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ على المجال $]\frac{1}{\alpha};0[$ و $f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ على المجال $]-\infty;\frac{1}{\alpha}[$.

2- باستعمال مشتقة الدالة المركبة أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$.

3- أحسب $h'\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ثم استنتج إشارة $h'(x)$ على المجال $]-\infty;0[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

الحل

الجزء الأول:

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]-\infty;2]$ كما يلي: $g(x) = x + 1 + e^x$

1- حساب نهاية الدالة g عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(x + 1 + e^x) = -\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-\infty;2]$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = 1 + e^x$

و $1 + e^x > 0$ أي $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;2]$.

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ ... 2
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow 3 + e^2$

3- البرهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-1.28 < \alpha < -1.27$

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1.28;-1.27[$

و $\begin{cases} g(-1.27) = 0.011 \\ g(-1.28) = -1.002 \end{cases}$

و $g(-1.28) \times g(-1.27) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.28 < \alpha < -1.27$. أي: $g(\alpha) = 0$

جدول إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	2
$g(x)$	$-$	0	$+$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على: $]-\infty;0[\cup]0;2]$ بـ: $f(x)=x-1+\frac{1+e^x}{x}$

1- تعيين النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{1+e^x}{x}\right]=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\<}}\left[x-1+\frac{1+e^x}{x}\right]=-\infty$$

لأن : $\lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[x-1+\frac{1+e^x}{x}\right]=+\infty$$

لأن : $\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

2- بيان أن: $f'(x)=\frac{(x-1)g(x)}{x^2}$

الدالة f تقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=1+\frac{e^x(x)-1(1+e^x)}{x^2}$$
$$=\frac{x^2+e^x(x)-1-e^x}{x^2}$$
$$=\frac{(x^2-1)+(x-1)e^x}{x^2}$$
$$=\frac{(x-1)(x+1)+(x-1)e^x}{x^2}$$
$$=\frac{(x-1)[x+1+e^x]}{x^2}=\frac{(x-1)(g(x))}{x^2}$$
$$=f'(x)$$

استنتاج إشارة $f'(x)$:

إشارتها من إشارة $(x-1)g(x)$ لأن : $x^2>0$

جدول إشارة المشتقة $f'(x)$ وجدول تغيراتها

x	$-\infty$		α		0		1		2
$x-1$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$e+1$	↗	$3+e^2$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]\cup[1;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;0[\cup]0;1]$

4- حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x-1)]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{1+e^x}{x}-x+1\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{x}$$
$$=0$$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

5- الوضعية النسبية بين (C_f) والمستقيم (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{1+e^x}{x}$$

لكن: $1+e^x>0$ أي إشارتها من إشارة x

جدول الوضعية:

x	$-\infty$	0	2
x	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) فوق (Δ)

6- البرهان أن $f(\alpha)=\alpha-2$:

$$f(\alpha)=\alpha-1+\frac{1+e^\alpha}{\alpha}$$

و لدينا:

$$g(\alpha)=\alpha+1+e^\alpha=0$$
$$e^\alpha=-\alpha-1$$

نعوض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha)=\alpha-1+\frac{1+(-\alpha-1)}{\alpha}=\alpha-1-1$$
$$f(\alpha)=\alpha-2$$

استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$:

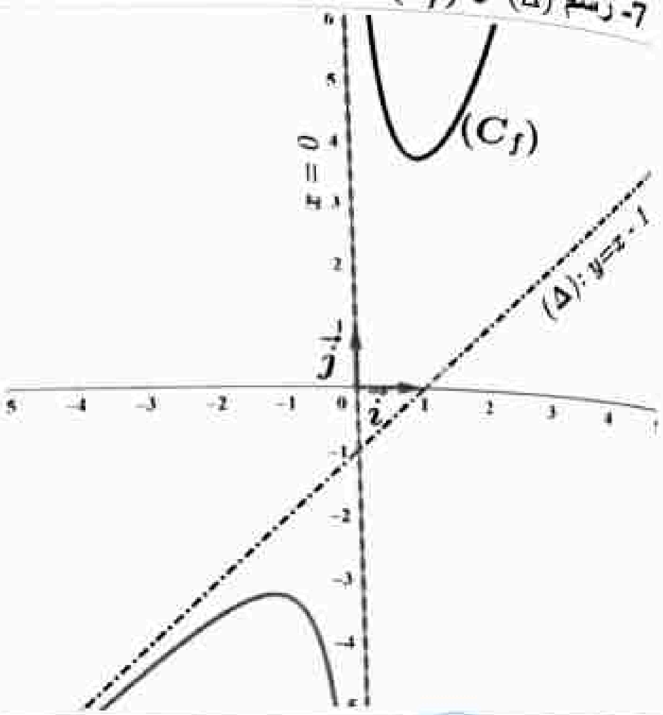
لدينا: $f(\alpha)=\alpha-2$

و $-1.28<\alpha<-1.27$

$-3.28<\alpha-2<-3.27$

ومنه $-3.28<f(\alpha)<-3.27$

7- رسم (Δ) و (C_f).



8- المناقشة البيانية لحلول المعادلة
$$x^2-(x+mx)+1+e^x=0$$

$$x^2-x-mx+1+e^x=0$$
$$x^2-x+1+e^x=mx$$
$$\frac{x^2-x+1+e^x}{x}=m$$
$$\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}+\frac{1+e^x}{x}=m$$
$$x-1+\frac{1+e^x}{x}=m$$
$$f(x)=m$$

الحلول البيانية للمعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$

$m\in]-\infty;f(\alpha)[$ للمعادلة حلان سالبان تماما.

$m=f(\alpha)$ للمعادلة حل مضاعف.

$m\in]f(\alpha);1+e[$ لا توجد حلول للمعادلة

$m=1+e$ للمعادلة حل مضاعف.

$m\in]1+e;\frac{(3+e^2)}{2}[$ للمعادلة حلان موجبان.

$m\in]\frac{(3+e^2)}{2};+\infty[$ للمعادلة حل واحد موجب.

الجزء الثالث:

لتكن الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

1- البرهان أن $f'\left(\frac{1}{x}\right)>0$ على $]\frac{1}{\alpha};0[$ و $f'\left(\frac{1}{x}\right)<0$ على المجال $]-\infty;\frac{1}{\alpha}[$:

نلاحظ أن: $h=f\circ u$ حيث $u(x)=\frac{1}{x}$

x	$-\infty$		0
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		α		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{\alpha}$		0
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$-$	0	$+$	$\Vert$

من الجدول نجد أن $f'\left(\frac{1}{x}\right)<0$ على $]-\infty;\frac{1}{\alpha}[$
و $f'\left(\frac{1}{x}\right)>0$ على $]\frac{1}{\alpha};0[$

2- حساب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$:

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

حساب $h'\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$$h'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}f'\left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}\right)=-\alpha^2.f'(\alpha)=0$$

ومنه: $h'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$

استنتاج إشارة $h'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{\alpha}$		0
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$		$-$	0	$+$	$\Vert$
$-\frac{1}{x^2}$		$-$		$-$	$\Vert$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$

جدول تغيرات $h(x)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\alpha}$		0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\alpha-2$	$\searrow$	$-\infty$

119. دالة مقترحة رقم 13

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح رقم 08 2018

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$

1-أ- أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f' وشكل جدول تغيراتها (إرشاد: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x\ln x=0$)

ج- استنتج إشارة $f'(x)$ على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

2-أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ج- أنشئ المنحنى (C_f)

د- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=e^m$

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة h المعرفة على $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\frac{2x}{x+2}$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

2- بين أنه من أجل $x\in]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ فإن: $f(x)-h(x)=xf'(x)$

3- استنتج وضعية المنحنى (C_h) بالنسبة إلى (C_f) ثم أنشئ (C_h).

4- بين أن المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α يقطع محور التراتيب عند النقطة التي ترتيبها $h(\alpha)$ (حيث α حقيقي موجب تماما)

الحل

الجزء الأول:

1-أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{2}{x+2}$$

ب- اتجاه تغير $f'(x)$ و جدول تغيراتها:

ندرس إشارة $f''(x)$: $f''(x)=\frac{-4}{x(x+2)^2}$

جدول إشارة $f''(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
-4		$-$		$-$		$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	‖		‖	$-$	
$f'(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖		‖ $+\infty$	↘	0

$f'(x)$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[$

$f'(x)$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جـ استنتاج إشارة $f'(x)$:

من تغيرات $f''(x)$ نجد:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖		‖	$+$	

2- بيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

$$\lim_{x\to-\infty}x\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]$$

نضع: $t=\frac{2}{x}$ و $x=\frac{2}{t}$

لما: $x\to-\infty$ فإن: $t\to0$

$$\lim_{t\to0}\frac{2}{t}\ln(1+t)=\lim_{t\to0}2\frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{2(M(t)-M(0))}{t-0}$$

$$=2M'(0)$$

مع $M(t)=\ln(1+t)$

و $M(0)=0$

حيث الدالة M قابلة للاشتقاق عند 0

و $M'(t)=\frac{1}{t+1}$

$$M'(0)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$$

وبنفس الطريقة نجد أن:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=2$$

-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\left(x\ln\frac{x+2}{x}\right)=0$$

-حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}}f(x)$

$$\ln\frac{a}{b}=\ln|a|-\ln|b|$$

$$=\lim_{x\to0}x\ln|x+2|-x\ln|x|$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} x\ln|x+2| - x\ln|x| = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} \ln|x+2| = -\infty$$

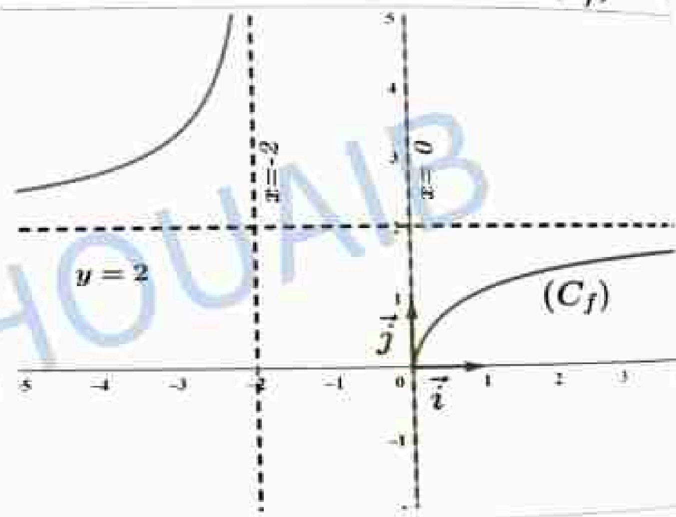
ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f

ندرس إشارة $f'(x)$:
لكن $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	||	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	||	$0 \nearrow 2$

انشاء (C_f) :



- المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x) = e^m$

حلول المعادلة $f(x) = e^n$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = e^m$

المناقشة:

$m \in]-\infty;\ln 2$ للمعادلة حل واحد موجب .

$m \in]\ln 2;+\infty$ للمعادلة حل واحد سالب

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة h المعرفة بـ: $h(x) = \frac{2x}{x+2}$

1- دراسة اتجاه تغير $h(x)$:

$$h'(x) = \frac{(2(x+2) - (2x))}{(x+2)^2}$$
$$= \frac{2x + 4 - 2x}{(x+2)^2}$$
$$h'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه الدالة h متزايدة تماما على D_h

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	||	||	$+$
$h(x)$	$2 \nearrow +\infty$	||	||	$0 \nearrow 2$

2- بيان أنه $f(x) - h(x) = xf'(x)$

$$f(x) - h(x) = x\ln\frac{x+2}{x} - \frac{2x}{x+2}$$
$$= x\left[\ln\frac{x+2}{x} - \frac{2}{x+2}\right]$$
$$= xf'(x)$$

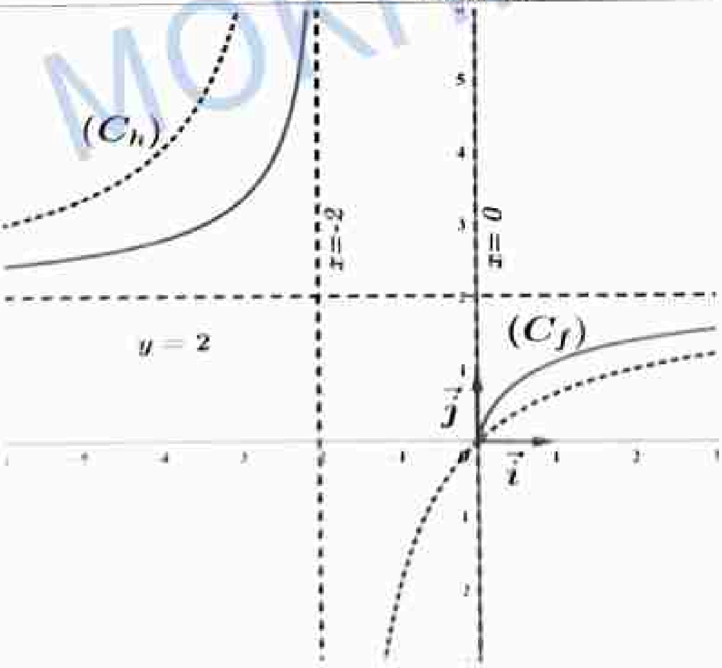
3- استنتاج وضعية (C_h) بالنسبة إلى (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:
لدينا: $f(x) - h(x) = xf'(x)$
ومنه: $h(x) - f(x) = -xf'(x)$

جدول الوضعية:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$-x$	$+$		$+$ 0	$-$
الفرق	$+$	||	||	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (C_h)	||	||	(C_f) تحت (C_h)

-إنشاء المنحنى (C_h)



4- بيان أن المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة α يقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها $h(\alpha)$

$$y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$$
$$y = xf'(\alpha) - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$$
$$y = ax + b$$
$$= xf'(\alpha) + h(\alpha)$$
$$-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = h(\alpha)$$
$$h(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha+2}$$
$$-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\alpha\left[\ln\frac{\alpha+2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha+2}\right] + \alpha\ln\frac{(\alpha+2)}{\alpha}$$
$$= -\alpha\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) + \frac{2\alpha}{\alpha+2} + \alpha\ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)$$
$$= \frac{2\alpha}{\alpha+2} = h(\alpha)$$

120. دالة مقترحة رقم 14

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح رقم 10 2018

1) نعتبر الدالة f_1 المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:
$$f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2+1)$$
أ)- عين نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$

ب) عين مشتقة الدالة f_1 ثم شكل جدول تغيراتها.

2) n عدد طبيعي غير معدوم، الدالة f_n المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:
$$f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$
أ - عين نهاية الدالة f_n عند $+\infty$

ب- بين أن الدالة f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

ج- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n على $[0;+\infty[$

د- برر أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $0 < \alpha_n < 1$

3- برر انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4-أ- بين أن المتتالية (α_n) متزايدة.

ب- استنتج أنها متقاربة.

ج- استعمل العبارة $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ لتعيين نهاية المتتالية.

الحل

1أ) تعيين نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty}[2x - 2 + \ln(x^2+1)] = +\infty$$

ب) تعيين مشتقة الدالة f_1:

الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ و: $f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2+1}$

و منه: $f_1'(x) > 0$ يعني أن الدالة f_1 متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

تشكيل جدول تغيرات الدالة f_1

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	
$f_1(x)$	-2 ↗	$+\infty$

2- أ- تعيين نهاية الدالة f_n عند $+\infty$:
$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}\right) = +\infty$$
لأن: $\lim_{x\to+\infty} 2x - 2 = +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(x^2+1) = +\infty$

2-ب- بيان أن الدالة f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$:

الدالة f_n قابلة للاشتقاق على المجال $[0;+\infty[$ و:
$$f_n'(x) = 2 + \frac{1}{n}\frac{2x}{x^2+1}$$
و لدينا: $2x > 0$ و $x^2+1 > 0$ و $\frac{1}{n} > 0$ و $2 > 0$ على $[0;+\infty[$. و منه: $f_n'(x) > 0$

أي الدالة f_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2-ج- البرهان أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n

الدالة f_n مستمرة ومتزايدة تماما على $[0;+\infty[$

و: $f_n(0) = -2$ و $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

و $0 \in]-2;+\infty[$ ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n على المجال $[0;+\infty[$

2-د- التبرير أن: $0 < \alpha_n < 1$:

بما أن α_n حل للمعادلة $f_n(x) = 0$

و $f_n(0) = -2$ و $f_n(1) = \frac{\ln(2)}{n}$

وكذلك $]-2; \frac{\ln(2)}{n}[\ni 0$ أو $f_n(0) \times f_n(1) < 0$

ومنه $0 < \alpha_n < 1$

3- البرهان أن من أجل كل $n \in N^*$
$$f_n(\alpha_{n+1}) > 0$$

$$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n}$$

ولدينا α_n حل للمعادلة $f_n(x) = 0$ وكذلك α_{n+1} حل للمعادلة $f_{n+1}(x) = 0$

يعني $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

$$f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$$
$$\Rightarrow 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1} = 0$$
$$\Rightarrow 2\alpha_{n+1} - 2 = -\frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1}$$
$$f_n(\alpha_{n+1}) = -\frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n+1} + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2+1)}{n}$$
$$f_n(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)\left[-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right]$$
$$f_n(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)\left[\frac{-n+n+1}{n(n+1)}\right]$$
$$f_n(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]$$
$$\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) > 0$$

$\frac{1}{n(n+1)} > 0$ من أجل $n \in N^*$

ومنه نجد أن $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$

4-أ- البرهان أن المتتالية (α_n) متزايدة تماما

معناه $\alpha_{n+1} - \alpha_n > 0$ أي $f_n(\alpha_n) = 0$

لدينا أن α_n حل للمعادلة $f_n(x) = 0$ أي
$$f_n(\alpha_n) = 0$$

و $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$ يعني $f_n(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_n)$

والدالة f_n متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

ومنه نستنتج أن $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ معناه المتتالية (α_n) متزايدة تماما على N^*.

ب- استنتاج أنها متقاربة:

بما أن المتتالية (α_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة نحو نهاية l.

جـ- استعمال العبارة $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$ **لتعيين l:**

لدينا:

معناه
$$f_n(\alpha_n) = 0$$
$$2\alpha_n - 2 + \frac{\ln \alpha_n^2+1}{n} = 0$$
$$\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\ln(\alpha_n^2+1)$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n) = 1$$

121. دالة مقترحة رقم 15

الأسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم 22

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$

1- احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثم بين أن
$$f(x) = x + ln2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$$

ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3- ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس حيث $\|\vec{\imath}\| = 3$

بين أن المستقيم $(\Delta): y = x + ln2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4- بين أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي الى (C_f)

5- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) ومقاربيه

6-اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة التي فاصلتها 0

7-أنشئ المنحني (C_f)

الحل

1- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2$$
$$= -\ln 2$$

التفسير البياني: $y = -\ln 2$ مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) بجوار $-\infty$

-البرهان أن $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$

$$\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) = \ln\left(\frac{2e^{2x}\left(\frac{1}{2e^{2x}}+1\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}\right)$$

$$= \ln\left[\frac{2e^{2x}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)}{e^{x}(1+2e^{-x})}\right]$$

$$= \ln 2e^{x} + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

$$\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right) = \ln 2 + x + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

-استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

$$= +\infty$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة f

ندرس إشارة المشتقة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2e^{3x}+8e^{2x}-e^{x}}{(e^{x}+2)(2e^{2x}+1)}$$

$$= \frac{e^{x}(2e^{2x}+8e^{x}-1)}{(e^{x}+2)(2e^{2x}+1)}$$

لكن $2e^{2x}+1>0$ و $e^{x}+2>0$ و $e^{x}>0$

ومنه اشارة $f'(x)$ من اشارة $2e^{2x}+8e^{x}-1$

نضع $e^{x}=t$

$$2e^{2x}+8e^{x}-1=0$$

$$\Rightarrow 2t^{2}+8t-1=0$$

$$\Delta = 64-4(2)(-1)$$

$$= 72 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 6\sqrt{2}$$

$e^{x_1} = t_1 = \frac{-4-3\sqrt{2}}{2}$ مرفوض لأن $e^{x}>0$

$e^{x_2} = t_2 = \frac{-4+3\sqrt{2}}{2}$ مقبول

x	$-\infty$	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\ln 2$ ↘	$f(x_2)$	↗ $+\infty$

3- بيان أن المستقيم $(\Delta): y = x + \ln x$ م م مائل لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-x}}{1+2e^{-x}}\right) = \ln 1 = 0$$

ومنه $y = x + \ln 2$ م م مائل بجوار $+\infty$ لـ (C_f)

4- بيان أن نقطة تقاطع المقاربين تنتمي الى (C_f)

$(D): y = -\ln 2$

$(\Delta): y = x + \ln 2$

$$-\ln 2 = x + \ln 2$$

$$-2\ln 2 = x$$

أي

$$(\Delta)\cap(D) = \{A(-2\ln 2\,;-\ln 2)\}$$

و

$A \in (C_f)$ معناه $f(-2\ln 2) = -\ln 2$

وفعلا $f(-2\ln 2) = -\ln 2$

ومنه $A \in (C_f)$

5- دراسة الوضع النسبي لـــ (C_f) و مقاربيه

-وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (D)	يقطع	(C_f) فوق (D)

-دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ)

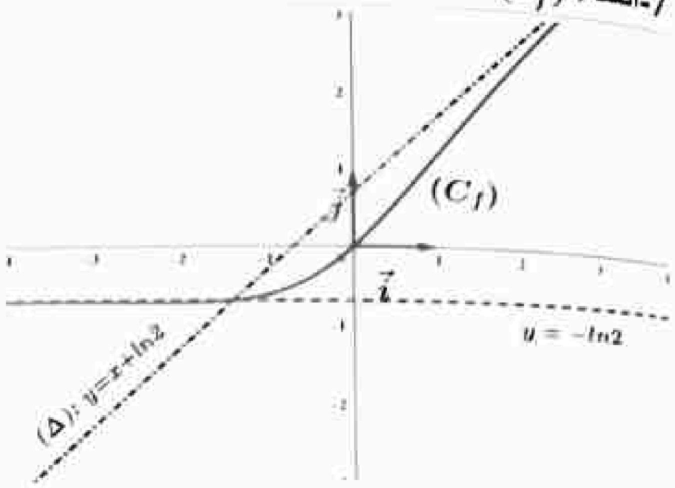
x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	يقطع	(C_f) تحت (Δ)

6-كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T)

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$y = x$$

7-انشاء (C_f)



122. دالة مقترحة رقم 16

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم 23

جدول التغيرات المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$f(x) = (x+1)e^{1-x}$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	e	$\searrow 0$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أن معادلة (Δ) المماس لـ(C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي $y = -x + 3$

2- g هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة:

$g(x) = -xe^{1-x} + 1$

2-أ- أدرس اتجاه تغير الدالة g

2-ب- أحسب $g(1)$، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

3- h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = (x+1)e^{1-x} + x - 3$

3-أ- لاحظ انه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$h(x) = f(x) + x - 3$

ثم استنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

3-ب- بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ $h'(x) = g(x)$، ثم استنتج جدول تغيرات الدالة h

3-جـ- تحقق أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ يطلب تعيينه

3-د- حدد اشارة $h(x)$ ، ثم استنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـ(Δ)

3-هـ- أنشئ كلا من المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

الحل

1- البرهان أن معادلة المماس (Δ) هي $y = -x + 3$

معادلة المماس $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x) = -xe^{1-x}$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -1(x-1) + 2$

$y = -x + 1 + 2$

$y = -x + 3$

2-أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g:

ندرس إشارة المشتقة $g'(x)$

$g'(x) = (-1 + x)e^{1-x}$

لكن $e^{1-x} > 0$

اذن اشارة $g'(x)$ من إشارة $-1 + x$

$-1 + x > 0$

$\Rightarrow x > 1$

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة g متناقصة تماما على $]-1;1]$

ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$

2-ب- حساب $g(1)$

$g(1) = 0$

-استنتاج إشارة $g(x)$

x	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]-1;1]$

ومنه $g(x) \geq g(1) \geq 0$

3-أ- إستنتاج أن $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

نلاحظ أن $h(x) = f(x) + (x-3)$

اي

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} [f(x) + (x-3)] = +\infty$

ومن جدول تغيرات الدالة f المعطى نجد

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3-ب- بيان أن $h'(x) = g(x)$

لدينا

$h'(x) = f'(x) + (x-1)'$

$h'(x) = -xe^{1-x} + 1 = g(x)$

-استنتاج جدول تغيرات الدالة h

لدينا $h'(x) = g(x)$

أي إشارة $h'(x)$ من إشارة $g(x)$

و $g(x) \geq 0$

ومنه $h'(x) \geq 0$ اذن الدالة h متزايدة تماما على المجال $[-1;+\infty[$

x	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
$h(x)$	-4 ↗	$+\infty$

3-جـ التحقق أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1;+\infty[$

بما أن الدالة h مستمرة ومتزايدة على $[-1;+\infty[$

و $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty \\ h(-1) = -4 \end{cases}$

و $h(-1) \times \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < 0$

فانه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

تعيين الحل: $h(1) = 0$

3-د-تحديد إشارة $h(x)$ ، ثم استنتاج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ)

-إشارة $h(x)$

x	-1		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

-دراسة الوضعية:

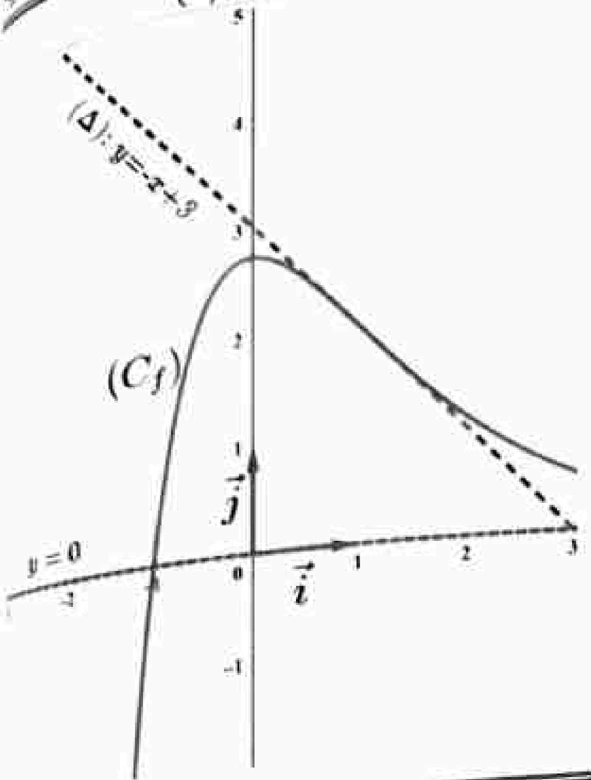
ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = f(x) - (-x + 3)$$
$$= f(x) + x - 3$$
$$= h(x)$$

إشارة الفرق من إشارة $h(x)$

x	-1		1		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	يقطع	(C_f) فوق (Δ)	

3-هـ-إنشاء (Δ) والمنحى (C_f)



123. دالة مقترحة رقم 17

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم 3

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x

$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

1-ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C)

1-جـ- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)

2-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x

$f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$

2-ب- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + ln2$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

2-جـ- ادرس الوضع النسبي بين (C) و (D')

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

4- ارسم (D) و (D') ، (C)

5- نضع: $I = \int_2^3 [f(x) - x]dx$

5-أ- فسر هندسيا العدد I

5-2- بين أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$

$$\ln(1+x) \le x$$

3-5- استنتج أن $0 \le I \le \int_2^3 2e^{-2x}dx$
وأعط حصرا للعدد I سعته 0.02

الحل

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ
$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$$

1-أ- إثبات أن $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

$$\ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left(e^x\left(1 + 2\frac{e^{-x}}{e^x}\right)\right)$$
$$= \ln[e^x(1 + 2e^{-x}.e^{-x})]$$
$$= \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$
$$= x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$
$$= f(x)$$

1-ب- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[x + \ln(1 + 2e^{-2x})]$$
$$= +\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} 2e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

-بيان أن المستقيم (D) هو م م مائل لـ (C)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}[x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - x]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\ln(1 + 2e^{-2x}) = 0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

ومنه (D) هو م م مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

1-جـ دراسة الوضعية النسبية لـ (C) و (D)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$
$$f(x) - y = x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - x$$
$$= \ln(1 + 2e^{-2x})$$

لكن: $2e^{-2x} > 0$ على $\mathbb{R}$
لأن: $\ln(1 + 2e^{-2x}) > \ln 1$
أي: $\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$
ومنه (C) يقع فوق (D)

2-أ- بيان أن $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$

$$\ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln\left[e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^{-x}} + 2\right)\right]$$
$$= \ln e^{-x}[e^{2x} + 2]$$
$$= -x\ln e + \ln(2 + e^{2x})$$
$$= -x + \ln(2 + e^{2x})$$
$$= f(x)$$

2-ب- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[-x + (2 + e^{2x})] = +\infty$$

-البرهان أن المستقيم (D') هو م م مائل لـ (C)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[-x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(\ln 2 - \ln 2) = 0$$

ومنه (D') هو م م مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

2-جـ دراسة الوضعية النسبية بين (C) و (D')

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$
$$f(x) - y = -x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2$$
$$= \ln(2 + e^{2x}) - \ln 2$$

لكن لدينا: $e^{2x} > 0$
أي $e^{2x} + 2 > 2$
ومنه $\ln(e^{2x} + 2) > \ln 2$
ومنه: $\ln(e^{2x} + 2) - \ln 2 > 0$
اذن (C) فوق (D') دوما

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f

ندرس إشارة المشتقة $f'(x)$
$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^x - 2e^{-x}$
لأن $e^x + 2e^{-x} > 0$

$$e^x - 2e^{-x} = 0$$
$$e^x - \frac{2}{e^x} = 0$$
$$\frac{e^{2x} - 2}{e^x} = 0$$

لكن $e^x > 0$

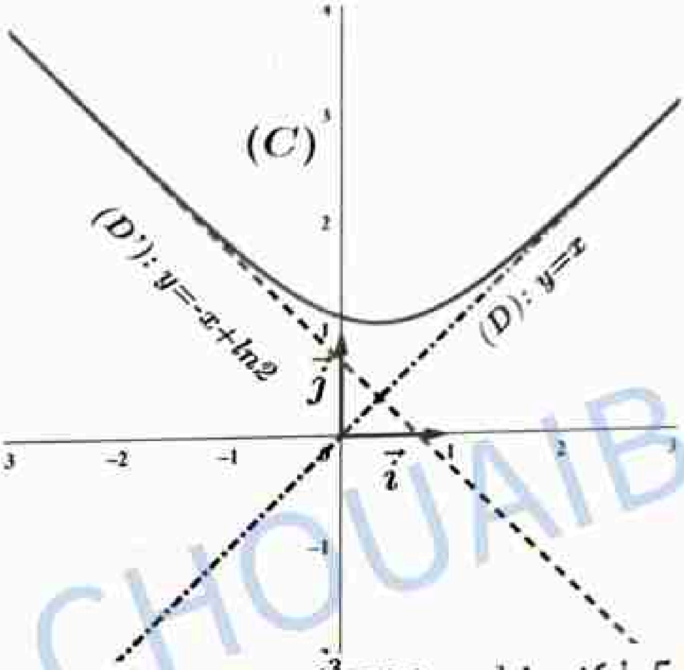
ومنه: $e^{2x} - 2 = 0$
$$e^{2x} = 2$$
$$2x = \ln 2$$
$$x = \frac{\ln 2}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty; \frac{\ln 2}{2}\right]$
ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{\ln 2}{2}; +\infty\right[$

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗ $+\infty$

4- رسم (D) ، (D') و (C)



5- ليكن $I=\int_2^3[f(x)-x]dx$

5-أ- تفسير العدد I هندسيا:

هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات $y=x$ الذي هو (D) و $x=2$ و $x=3$

5-ب- البرهان أن: $\ln(1+x)\leq x$

نضع: $g(x)=\ln(1+x)-x$

ومنه $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1$

$$g'(x)=\frac{1-1-x}{1+x}=-\frac{x}{1+x}\leq 0$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

ولدينا $x\geq 0$

ندخل الدالة g على الطرفين وبما انها متناقصة تنقلب المتباينة

$$g(x)\leq g(0)$$
$$\ln(1+x)-x\leq 0$$

ومنه: $\ln(1+x)\leq x$

5-جـ- استنتاج أن $0\leq I\leq\int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا

$$I=\int_2^3(x+\ln(1+2e^{-x})-x)dx$$

$$I=\int_2^3(\ln(1+2e^{-x}))dx$$

لكن $2e^{-x}>0$

$$1+2e^{-x}\geq 0+1$$
$$\ln(1+2e^{-x})\geq\ln 1$$
$$\int_2^3\ln(1+2e^{-x})\,dx\geq 0$$

ومنه $I\geq 0\ ...(1)$

لدينا من السؤال السابق أن من اجل: $x\geq 0$ فإن

$$\ln(1+x)\leq x$$

نضع $2e^{-2x}\geq 0$ فيكون:

$$\ln(1+2e^{-2x})\leq 2e^{-2x}$$
$$\int_2^3\ln(1+2e^{-2x})dx\leq\int_2^3 2e^{-2x}\,dx$$
$$I\leq\int_2^3 2e^{-2x}dx\ ...(2)$$

من (1) و (2) نجد

$$0\leq I\leq\int_2^3 2e^{-2x}dx$$

-إعطاء حصر للعدد I سعته 0.02

لدينا $\int_2^3 2e^{-2x}dx$

الدالة الأصلية لـ e^{ax} هي $\frac{1}{a}e^{ax}$

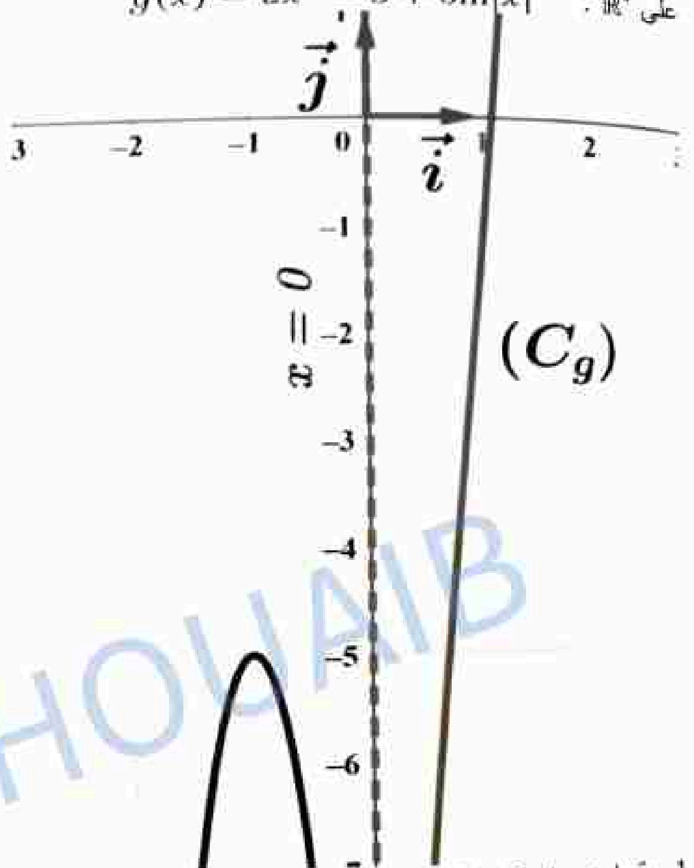
$$\int_2^3 2e^{-2x}dx=\left[2\left(\frac{-1}{2}e^{-2x}\right)\right]_2^3$$
$$=[-e^{-2x}]_2^3$$
$$=-e^{-6}+e^{-4}\simeq 0{,}0158$$

ومنه $0\leq I\leq 0{,}02$

124. دالة مقترحة رقم 18

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم25

I- المنحنى المقابل هو التمثيل البياني للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$: $g(x) = 2x^3 - 3 + 6\ln|x|$



1- بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا α يحقق $1.07 < \alpha < 1.09$

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II-نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$f(x) = 2x - \frac{3\ln|x|}{x^2}$

(C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس$(O ; \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيا

2-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$$

2-ب- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها

2-جـ- بين أن $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$،ثم استنتج حصرا لـ$f(\alpha)$

3-أ- بين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

3-ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم(D)

4-أ- بين انه يوجد مماس (Δ) لـ(C_f) يوازي المستقيم (D) ويمس (C_f) في نقطتين يطلب اعطاء معادلة لهذا المماس

4-ب- أنشئ (Δ)، (C_f) و (D)

(تعطى $f(-0.75) = 0$)

5-أ- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $mx^2 + 3\ln|x| = 0$

5-ب لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ

$$h(x) = \frac{a + b\ln|x|}{x}$$

-عين العددين الحقيقين a و b بحيث تكون h دالة اصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln|x|}{x^2}$ على $\mathbb{R}^*$

-استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}^*$

الحل

I-1- بقراءة بيانية : تشكيل جدول تغيرات g

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

2- البرهان أن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

الدالة g متزايدة تماما ومستمرة على المجال $]1,07; 1,09[$

و $\begin{cases} g(1,09) = -0.143 \\ g(1,07) = 0.107 \end{cases}$

و $g(1.07) \times g(1.09) < 0$

ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث: $1,07 < \alpha < 1,09$

-استنتاج إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		α		$-\infty$
$g(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	

II-1- حساب النهايات :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

-التفسير الهندسي: $x = 0$ م م عمودي لـ (C_g)

II-2-أ- البرهان أن $f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$

نشتق الدالة f فنجد

$$f'(x) = 2 - 3\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln|x|}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x + 6x\ln|x|}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(2x^3 - 3 + 6\ln|x|)}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{x^4}$$

II-2-ب- استنتاج إشارة f'

x	$-\infty$		0		α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$
x		$-$	0	$+$		$+$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty; 0[\cup [\alpha; +\infty[$

ومتناقصة تماما على المجال $]0; \alpha]$

-جدول تغيرات $f(x)$**:**

x	$-\infty$		0		α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

II-2-جـ- بيان أن $f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$

$$f(\alpha) = 2\alpha - \frac{3\ln|\alpha|}{\alpha^2}$$

ولكن لدينا
$$g(\alpha) = 0$$
ومنه
$$2\alpha^3 - 3 + 6\ln|\alpha| = 0$$
$$\ln|\alpha| = \frac{-2\alpha^3 + 3}{6}$$

نعوض في $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = 2\alpha - 3\frac{\frac{-2\alpha^3+3}{6}}{\alpha^2}$$
$$= 2\alpha - \frac{-2\alpha^3+3}{2}\frac{1}{\alpha^2}$$
$$= 2\alpha + \frac{2\alpha^3 - 3}{2\alpha^2}$$
$$= 2\alpha + \frac{2\alpha^3}{2\alpha^2} - \frac{3}{2\alpha^2}$$
$$= 2\alpha + \alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$$
$$f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$$

-استنتاج حصرا لـ $f(\alpha)$ **:**

$$f(\alpha) = 3\alpha - \frac{3}{2\alpha^2}$$
$$1{,}07 < \alpha < 1{,}09$$
$$2(1{,}07)^2 < 2\alpha^2 < 2(1{,}09)^2$$
$$\frac{1}{2(1{,}09)^2} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{2(1{,}07)^2}$$
$$\frac{-3}{2(1{,}07)^2} < \frac{-3}{2\alpha^2} < \frac{-3}{2(1{,}09)^2} \ldots\ldots (1)$$

ولدينا
$$3(1{,}07) < 3\alpha < 3(1{,}09) \ldots\ldots (2)$$

بجمع بين (2) و(1) نجد

$$1{,}9 < f(\alpha) < 2{,}007$$

II-3- البرهان أن المستقيم ذو المعادلة $(D): y = 2x$ **مستقيم مقارب مائل لـ** (C_f) **بجوار** $\pm\infty$

يكون (D) م م مائل إذا كان

$$\lim_{|x| \to +\infty} (f(x) - y) = 0$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) - 2x = \lim_{|x| \to +\infty} \left[2x - \frac{3\ln|x|}{x^2} - 2x\right]$$
$$= \lim_{|x| \to +\infty} \left[-\frac{3\ln|x|}{x^2}\right] = 0$$

ومنه (D) هو م م مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

II-3-ب- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) **والمستقيم** (D)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$f(x) - y = -\frac{3\ln|x|}{x^2}$$

لكن $-3 < 0$ و $x^2 > 0$ على $\mathbb{R}$

نضع $\ln|x| = 0 = \ln 1$

$$e^{\ln|x|} = e^{\ln 1}$$
$$|x| = 1$$
$$x = 1$$
$$x = -1$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
-3	$-$		$-$		$-$		$-$
$\ln\|x\|$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$

الوضعية

(C_f) فوق (D) على $]-1; 0[\cup]0; 1[$

(C_f) أسفل (D) على $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

(C_f) يقطع (D) عند $x = -1$ و $x = 1$

II-4-أ- البرهان أنه يوجد مماس (Δ) **موازي لـ** (D) **في نقطتين**

$$(D): y = 2x$$

نحل المعادلة: $f'(x_0) = 2$: لأن المشتقة هي معامل توجيه المماس

$$\frac{x_0 g(x_0)}{x_0^4} = 2$$

$$\frac{3x_0(-1 + 2\ln|x_0|)}{x_0^4} = 0$$

لكن $x_0^4 \neq 0$

$$3x_0[-1 + 2\ln x_0] = 0$$
$$3x_0 = 0$$

مرفوض $x_0 = 0$ لأن $0 \notin D_f$

أو

$$[2\ln|x_0| - 1] = 0$$
$$2\ln|x_0| = 1$$
$$\ln|x_0| = \frac{1}{2}$$
$$x_0^2 = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$\begin{cases} x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \\ x_0 = -e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{e} \end{cases}$$

ومنه (D) يشمل نقطتين هما $A\left(\sqrt{e}; f\left(\sqrt{e}\right)\right)$ ، $B\left(-\sqrt{e}; f\left(-\sqrt{e}\right)\right)$

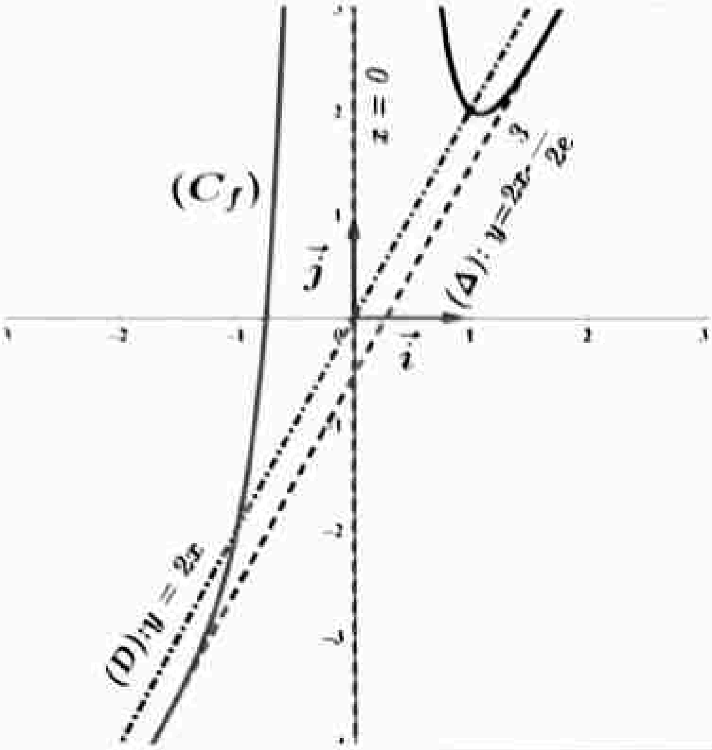
معادلة (Δ)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

بما أن (Δ) يوازي (D) فإن

$$y = 2\left(x - \sqrt{e}\right) + f\left(\sqrt{e}\right)$$
$$y = 2x - \frac{3}{2e}$$

II-4-ب- انشاء (Δ) و (D) و (C_f)



II-5-أ- المناقشة البيانية حلول المعادلة:
$$mx^2 + 3\ln|x| = 0$$

حلول المعادلة $mx^2 + 3\ln|x| = 0$ تكافئ حل المعادلة $f(x) = 2x + m$

وهي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (d_m) ذي المعادلة $y = 2x + m$

$m \in \left]-\infty; -\frac{3}{2e}\right[$ لا توجد حلول للمعادلة

$m = -\frac{3}{2e}$ للمعادلة حلان مضاعفان

$m \in \left]-\frac{3}{2e}; 0\right[$ للمعادلة 4 حلول اثنان سالبان واثنان موجبان

$m = 0$ للمعادلة حلان

$m \in]0; +\infty[$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة

II-5-ب- تعيين العددين a و b بحيث تكون h دالة أصلية لـ $x \to \frac{\ln|x|}{x^2}$

لتكون h دالة أصلية لـ $x \to \frac{\ln|x|}{x^2}$ بحيث:

$$h'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{b}{x}(x) - 1(a + b\ln|x|)}{x^2}$$
$$= \frac{b - a - b\ln|x|}{x^2}$$
$$= \frac{\ln|x|}{x^2}$$

بالمطابقة:

$$b - a = 0 \ldots\ldots (1)$$

$-b = 1 \ldots\ldots(2)$

$b = -1$

من (1) نجد $b = a = -1$

فتصبح $h(x) = \frac{-1-\ln|x|}{x^2}$

-استنتاج دالة أصلية للدالة f

نضع F دالة أصلية للدالة f

$$F(x) = 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) - 3\frac{-1-\ln|x|}{x^2} + c$$

$$F(x) = x^2 + \frac{3+3\ln|x|}{x^2} + c$$ مع $c \in \mathbb{R}$

125. دالة مقترحة رقم 19

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم26

I-نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = x - (x^2+1)e^{-x+1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1-أ- أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

وبين أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1-ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

1-جـ- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ(C_f) مع (Δ)

3- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

4- اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5- بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$$

ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينها

6-احسب $f(0)$ و $f(3)$ ثم أرسم (Δ) و(T) و (C_f)

7-ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x

$$f(x) = x + m$$

II- نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1}$$

1-أ- بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$

1-ب- أحسب I_1

2-أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم

2-ب- أحسب I_2

3- أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بـ(C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

الحل

I-الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = x - (x^2+1)e^{-x+1}$$

1-أ- حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[x - (x^2+1)e^{-x+1}] = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{(x^2+1)}{e^x}e\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}e\right] = +\infty$$

1-ب- عبارة $f'(x)$

$$f'(x) = 1 - [2xe^{-x+1} - e^{-x+1}(x^2+1)]$$
$$= 1 + (x^2+1-2x)e^{-x+1}$$
$$= 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

1-جـ- اتجاه تغير الدالة f

$f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

-جدول التغيرات

x	$+\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2- البرهان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}[-(x^2+1)e^{-x+1}]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\left(\frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)e\right] = 0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم ذو المعادلة $y = x$ كمستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$

-الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$

أي $-(x^2+1)e^{-x+1}$

$f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) يقع أسفل (Δ)

3- تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1.8; 1.9[$

ولدينا
$$\begin{cases} f(1.9) = -0.105 \\ f(1.8) = 0.025 \end{cases}$$

$f(1.8) \times f(1.9) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث
$1.8 < \alpha < 19$

4- المعادلة الديكارتية للمماس (T) عند $x = 1$

$(T) : y = x - 2$

5- البرهان أن:

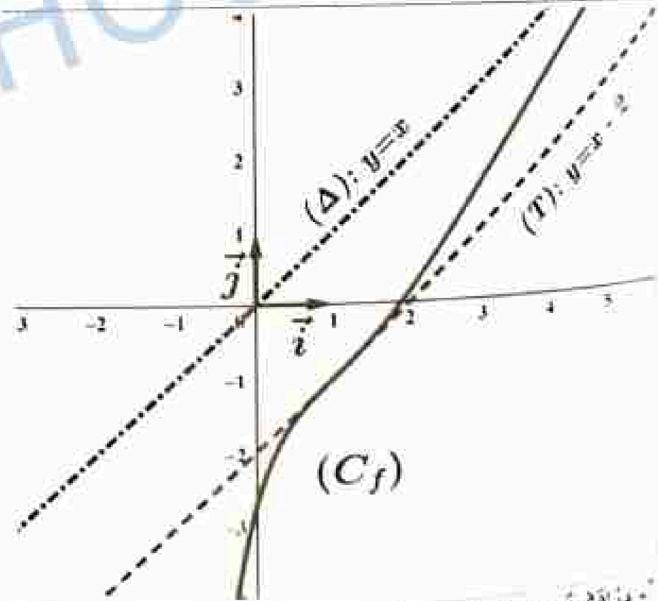
$$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$$

$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - (x-1)^2e^{-x+1}$
$f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$

$f''(x)$ تنعدم مرتين عند $x = 1$ و $x = 3$

ومنه (Cf) يقبل نقطتي انعطاف هما
$A(1 ; -1)$ $B(3 ; 3 - 10e^{-2})$

6-رسم (C_f) ، (Δ) و (T) .



- مناقشة حلول المعادلة $f(x) = x + m$ وإشارتها

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة

$(\Delta_m): y = x + m$

$m \in]-\infty; -$ للمعادلة حل وحيد سالب
$m = -$ للمعادلة حل معدوم
$m \in]-e; 0$ للمعادلة حل وحيد موجبا
$m \in [0; +\infty$ لا يوجد حلول للمعادلة

II- من أجل n عدد طبيعي غير معدوم

$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$:

1-أ- البرهان أن G دالة أصلية لـ $x \mapsto xe^{-x+1}$

بما أن الدالة G قابلة للاشتقاق فإن

$G'(x) = -e^{-x+1} - e^{-x+1}(-x-1)$
$= xe^{-x+1}$

1-ب- حساب I_1

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1}dx = [-(x+1)e^{-x+1}]_0^1$$
$I_1 = -2 + e$

2-أ- البرهان أن $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\, e^{-x+1}dx$$

نستعمل المكاملة بالتجزئة: نعتبر الدالتين $u(x)$ و $v(x)$ حيث

$u(x) =$	x^{n+1}	$u'(x) =$	$(n+1)x^n$
$v(x) =$	$-e^{-x+1}$	$v'(x) =$	e^{-x+1}

$\int_0^1 u(x)\, v'(x) = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'^{(x)}v(x)dx$
$I_{n+1} = [-x^{n+1}e^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x+1}(n+1)x^n$
$I_{n+1} = -1 + (n+1)\int_0^1 +e^{-x+1}x^n dx$
$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

2-أ- حساب I_2

$I_2 = -1 + 2(-2 + e)$
$I_2 = 2e - 5$

3- حساب مساحة الحيز a

$$a = \int_0^1 y - f(x)\, dx = \int_0^1 (x^2+1)e^{-x+1}dx$$
$$a = \int_0^1 x^2e^{-x+1}dx + \int_0^1 e^{-x+1}dx$$
$a = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1 = I_2 - 1 + e$
$a = 3e - 6\ cm^2$

.126 دالة مقترحة رقم 20

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم29

I-نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:
$$h(x) = e^x - x + 2$$
1- ادرس تغيرات الدالة h
2- بين أن $e^x - x - 1 \geq 0$ من أجل $x \in \mathbb{R}$
II-لتكن الدالة f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث:
$$f(x) = e^{-x}(x-1) + x + 1$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\vec{i};\vec{j})$

1- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x)=e^{-x}h(x)$$

2- ادرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

3- بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$. ثم فسر النتيجة بيانيا

4-أ- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته

4-ب- ادرس الوضعية النسبية لـ(C_f) و المستقيم (Δ)

5- برهن أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها

III-ليكن (D_α) مستقيما معادلته: $y=x+\alpha$، حيث $\alpha\in\mathbb{R}$

1- عين α حتى يكون (D_α) مماسا لـ(C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها

2- أحسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، ارسم (Δ) (D_α) و (C_f)

3- ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $(m-1)e^x-x+1=0$

الحل

I- 1- دراسة تغيرات الدالة h :

النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-x+2)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(e^x-x+2)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^x\left(1-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$$

المشتقة:

$$h'(x)=e^x-1$$

ندرس إشارتها

$e^x-1>0$

$\Rightarrow e^x>1$

$\Rightarrow x>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2- البرهان أن $e^x-x-1\geq 0$

من جدول التغيرات نجد أن: $h(x)\geq 3$ أي :

$e^x-x+2\geq 3$

$e^x-x+2-3\geq 0$

ومنه $e^x-x-1\geq 0$

II-1- بيان أن الدالة f قابلة للاشتقاق:

الدالة $x\to e^{-x}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و الدالة $x\to x-1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

اذن جداءهما يعطي دالة قابلة للاشتقاق

و الدالة $x\to(x+1)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه مجموع الدالتين $x\to e^{-x}(x-1)$ و $x\to(x+1)$ يعطي دالة قابلة للاشتقاق هي الدالة f

-البرهان أن $f'(x)=e^{-x}h(x)$

$$f'(x)=-e^{-x}(x-1)+1e^{-x}+1$$
$$=-xe^{-x}+2e^{-x}+1$$
$$=e^{-x}[-x+2+e^x]$$
$$f'(x)=e^{-x}h(x)$$

2- دراسة تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

-النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

-المشتقة $f'(x)=e^{-x}h(x)$

ندرس إشارتها لكن: $e^{-x}>0$ و $h(x)\geq 3>0$

ومنه $f'(x)>0$

أي: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

-جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3- البرهان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$:

بما أن الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

و $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\times\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

التفسير البياني: حل المعادلة $f(x)=0$ هو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(x'x)$

4-أ- إثبات أن (C_f) يقبل م م مقاربا (Δ)

يجب أن يكون $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}[e^{-x}(x-1)+x+1-x-1)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ هو م م مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

4-ب- دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x)-y=\frac{x-1}{e^x}$$

و $e^x > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة $x-1$

$x-1=0$
$x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت(Δ)	(C_f) يقطع(Δ)	(C_f) فوق(Δ)

5- البرهان أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف

حتى يقبل (C_f) نقطتي انعطاف يجب أن:
تنعدم المشتقة الثانية $f''(x)$ مغيرة إشارتها

$f''(x)=0$
$\Rightarrow e^{-x}(x-3)=0$

لكن $e^{-x}\neq 0$

$x-3=0$
$x=3$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف A حيث $A(3;f(3))$

III-1- تعيين α حتى يكون (D_α) مماسا للمنحنى (C_f)

لدينا $y = x+\alpha$
نحل المعادلة $f'(x_0)=1$

$e^{-x_0}h(x_0)=0$
$e^{-x_0}(e^{x_0}-x_0+2)=1$
$e^{x_0-x_0}-x_0e^{-x_0}+2e^{-x_0}=1$
$1-x_0e^{-x_0}+2e^{-x_0}=1$
$e^{-x_0}(-x_0+2)=0$

لكن $e^{-x_0}>0$ ومنه

$-x_0+2=0$

$x_0=2$

ومنه (C_f) يقبل (D_α) كمماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=2$ $\quad B(2;e^{-2}+3)$

معادلة المماس (D_α) :

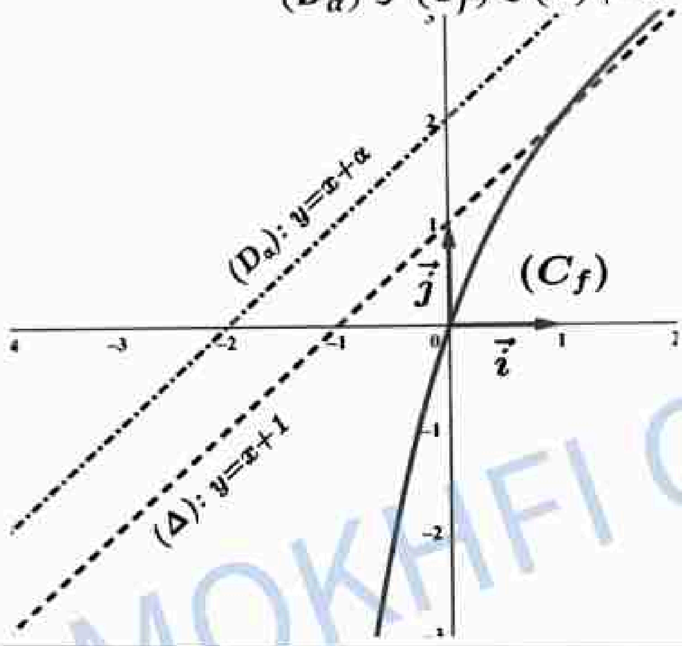
$y=f'(2)(x-2)+f(2)$
$y=x-2+e^{-2}+3$
$y=x+1+e^{-2}$

ومنه $\alpha = 1+e^{-2}$

2- حساب $f(-1)$ و $f(0)$

$f(-1)=-2e$
$f(0)=0$

-رسم (Δ) و (C_f) و (D_α)



3- المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(m-1)e^x - x + 1 = 0$

حلول هذه المعادلة يكافئ: $f(x) = x+m$
حلول المعادلة $f(x) = x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x+m$

-المناقشة:

$m\in]-\infty;1]$ للمعادلة حل وحيد
$m\in]1;1+e^{-2}[$ للمعادلة حلان متمايزان
$m=1+e^{-2}$ للمعادلة حل مضاعف
$m\in]1+e^{-2};+\infty[$ لا يوجد للمعادلة حلول

127. دالة مقترحة رقم 21

البوليوب: موضوع مقترح 2017 رقم30

I- g دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

$$g(x)=2(1-x\sqrt{x})-\ln x$$

1- بين أن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2- احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II- f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ

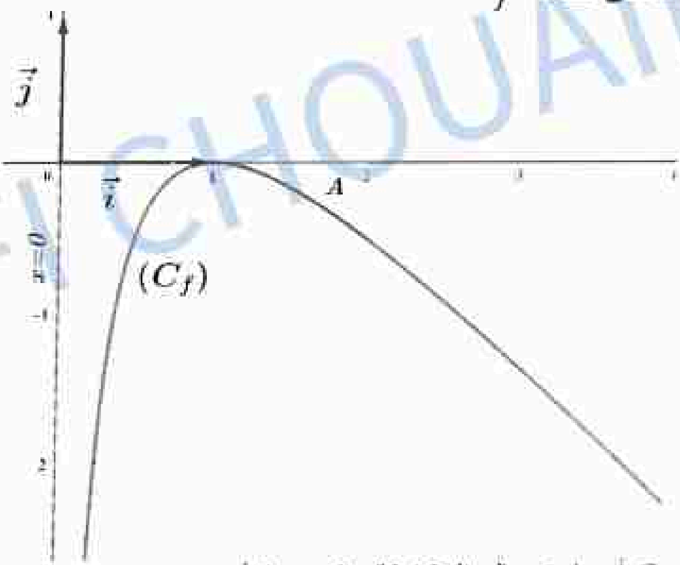
$$f(x)=1-x+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

1-أ- بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

1-ب- حدد اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم استنتج أنه من أجل x من $]0;+\infty[$ لدينا $f(x)\leq 0$

2- اليك الشكل المقابل الذي يمثل المنحنى (C_f) الممثل للدالة f



2-أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

2-ب- احسب A مساحة الحيز المستوي الملون في الشكل

III-نعرف المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ u_0 من $[1;2]$ و $u_{n+1}=1+\frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}}$

1- بين أنه من أجل كل x من $[1;2]$ لدينا

$$0\leq\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leq 1$$

2-برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$1\leq u_n\leq 2$$

3- حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أنها متقاربة نحو نهاية حقيقية l تحقق $f(l)=0$

الحل

I-1- بيان أن الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

ندرس إشارة المشتقة $g'(x)$

$$g'(x)=-3\sqrt{x}-\frac{1}{x}<0$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

2- تحديد إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

$$g(1)=0$$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

II-1-أ- بيان أن $f'(x)=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

$$f'(x)=0-1+\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{(\sqrt{x})^2}$$

$$=-1+\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{-2x\sqrt{x}+2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2(-x\sqrt{x}+1)-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2(1-x\sqrt{x})-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

1-ب- اتجاه تغير $f(x)$:

- ندرس إشارة f'

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $2x\sqrt{x}>0$ في المجال $]0;+\infty[$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال: $]0;1]$ ومتناقصة تماما على المجال: $[1;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	↗	0	↘	

من جدول التغيرات نجد أن $f(x)\leq 0$

2- باستعمال المكاملة بالتجزئة إيجاد $\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = 2\sqrt{x}$	$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_1^a \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_1^2 - 2\left[2\sqrt{x}\right]_1^2$$
$$= 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4$$

2-ب- حساب مساحة الحيز A

$$A = \int_1^2 -f(x)dx = -\int_1^2\left(1 - x + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$= -\left[\left[\int_1^2 (1-x)dx\right] + \left[\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx\right]\right]$$
$$= -\left[\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + 2\sqrt{2}\ln 2 - 4\sqrt{2} + 4\right]\ (u.a)$$

III-1- البرهان ان $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$

$$1 \le x \le 2$$
$$\sqrt{1} \le \sqrt{x} \le \sqrt{2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1 \ldots\ldots(1)$$

ولدينا

$$1 \le x \le 2$$
$$0 \le \ln x \le \ln 2 \ldots\ldots(2)$$

نضرب (1) في (2)

$$0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le \ln 2 \le 1$$

ومنه $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$

2- البرهان بالتراجع ان من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا :

نسمي الخاصية $p(n)$: $1 \le u_n \le 2$

من أجل $n = 0$ $\quad 1 \le u_0 \le 2$ أي $p(0)$ محقق.

نفرض صحة الفرضية على $\mathbb{N}$ ثم نبين صحتها من أجل $n+1$

لدينا من الفرضية $0 \le u_n \le 1$

ولدينا من السؤال السابق $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$

ونضع $u_n = x$

نضيف 1 لكل طرف: $1 \le 1 + \frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} \le 2$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة

أي $p(n)$ محققة على $\mathbb{N}$

3- اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} - u_n$$
$$= 1 - u_n + \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}$$
$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) \le 0$$

ومنه (u_n) متتالية متناقصة

-استنتاج تقاربها:

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فإنها متقاربة نحو نهاية l

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

فتصبح

$$l = 1 + \frac{\ln l}{\sqrt{l}} \Rightarrow f(l) = 1 - l + \frac{\ln l}{\sqrt{l}} = 0$$

حسب الحل الظاهر لـ $f(l) = 0$ فإن $l = 1$

128. دالة مقترحة رقم 22

الجزء الأول

k عدد حقيقي غير معدوم، f_k الدالة العددية المعرفة بـ : $f_k(x) = \ln(kx+1) - kx$

(C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس (وحدة الطول $1cm$)

1-أ-ادرس حسب قيم k تغيرات الدالة f_k

1-ب-استنتج أن من أجل x حقيقي موجب تماما يكون $\ln(1+kx) < kx$

2-ب-بين أن المنحنى (C_k) يشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها

الجزء الثاني

نفرض فيما يلي أن $k = 1$

1-أ-باستعمال السؤال (1-ب-) من الجزء الأول، بين انه من أجل كل عدد طبيعي β غير معدوم يكون

$$\ln(1+\beta) - ln\beta < \frac{1}{\beta}$$

1-ب-استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

1-جـ-استنتج $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

2-أ-عين احداثيي النقطة ω التي يكون فيها معامل توجيه المماس للمنحنى (C_1) يساوي 1

2-ب-أوجد معادلة المستقيم (Δ) مماس (C_1) عند ω

2-جـ-انشئ (Δ) و (C_1)

3-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي α عدد واشارة حلول المعادلة $\ln(1+x)-2x-\alpha=0$

4-أ-باستعمال المكاملة بالتجزئة، أوجد دالة أصلية للدالة : $x\mapsto \ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$

4-ب- λ عدد حقيقي حيث $-1<\lambda<0$ - أحسب $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_1) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$x=\lambda \text{ ، } x=0 \text{ ، } y=-x$$

4-جـ- أحسب $\lim\limits_{\substack{\lambda\to -1\\ \lambda>-1}} A(\alpha)$

5- h الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x كما يلي

$$h(x)=\ln(1+|x|)-|x|$$

5-أ-أوجد مجموعة تعريف الدالة h

5-ب- ادرس قابلية الاشتقاق للدالة h عند 0

5-جـ-بين كيف ننشئ (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من (C_1) ثم أنشئ (C_h) في نفس المعلم السابق

129. دالة مقترحة رقم 23

الجزء الأول

f الدالة العددية المعرفة بـ:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+2}+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ وحدة الطول $1cm$

1-أوجد مجموعة تعريف الدالة f ثم ادرس تغيرات الدالة f

2-بين ان (C_f) يقبل عند نقطتين A و B مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، عين عندئذ إحداثيات A و B

3-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\frac{13}{2}<\alpha<\frac{7}{2}$

4-أحسب $f(2)$ ، $f(-5)$ و $f(-3)$

5-انشئ (C_f)

الجزء الثاني

g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث

$$h(x)=x-5\ln(x+2)+x\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

1-بين ان الدالة g هي دالة أصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$

2-أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$$y=1 \text{ ، } x=4\ x=5$$

3-ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية

$$(x+2)\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)-mx-2m-3=0$$

130. دالة مقترحة رقم 24

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال لبكالوريا 2019

I-1- أدرس اتجاه الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=\ln(1+x)-x$$

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\ln(1+x)$$

2- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x:

$$x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x$$

II-في هذا الجزء نريد دراسة المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1=\frac{3}{2}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

II-1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n>0$

II-2- برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

II-3- نضع :

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

و

$$T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^n}$$

باستعمال العلاقة (1) برهن أن:

$$S_n-\frac{1}{2}T_n\le \ln u_n\le S_n$$

4-أ- احسب S_n و T_n بدلالة n

4-ب- استنتج نهاية لكل من المتتاليتين (S_n) و (T_n)

5- دراسة تقارب المتتالية (u_n)

أ-برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ب-استنتج انها متقاربة

جـ-نقبل النتيجة التالية: إذا كانت المتتاليتان (α_n) و (β_n) متقاربتين حيث من اجل كل عدد طبيعي n فإن $\alpha_n<\beta_n$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$

أعط حصرا لنهاية المتتالية (u_n)

الحل

I-1- دراسة اتجاه تغير الدالتين f و g :

أولا $f(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}2x - \frac{1}{1+x}$$
$$= 1 - x - \frac{1}{1+x}$$
$$= \frac{(1-x)(1+x)-1}{1+x}$$
$$= \frac{1-x^2-1}{1+x}$$
$$f'(x) = -\frac{x^2}{1+x}$$

ومنه $f'(x) \le 0$ على المجال $[0;+\infty[$

ومنه: الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

جدول تغيرات $f(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

-ثانيا $g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -\frac{x}{1+x}$$

و $-x \le 0$ على $[0;+\infty[$

ومنه $g'(x) \le 0$

أي الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$

-جدول تغيرات الدالة g :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	0 $\searrow$ $-\infty$

2- البرهان أن $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$

من جدول تغيرات الدالة f نجد: $f(x) \le 0$

أي: $x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(1+x) \le 0$

أي : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x)$ .... (أ)

من جدول تغيرات الدالة g نجد أن : $g(x) \le 0$

$\ln(1+x) - x \le 0$

ومنه : $\ln(1+x) \le x$ ..... (ب)

من (أ) و (ب) نجد باستعمال الحصر :

$$x - \frac{1}{2}x^2 \le \ln(1+x) \le x$$

II-1- البرهان بالتراجع أن $u_n > 0$

نسمي $p(n)$ الخاصية ($u_n > 0$)

من أجل $n = 1$ لدينا $u_1 = \frac{3}{2}$ أي $\frac{3}{2} > 0$ ومنه $p(1)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ محققة من أجل $n \ge 1$

أي $u_n > 0$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

ولدينا من الفرضية أن $u_n > 0$

وكذلك $1 + \frac{1}{2^{n+1}}$

الضرب طرفا بطرف : $u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$

ومنه : $u_{n+1} > 0$ أي $p(n+1)$ محققة

وأخيرا : $u_n > 0$

2- البرهان أن:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + .. + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

نبرهن على ذلك باستعمال البرهان بالتراجع

نسمي $p(n)$ الخاصية

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + .. + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

من أجل $n = 1$ لدينا :

$$\ln u_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$\ln(u_n) = \ln\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

ومنه $p(1)$ محققة:

نفرض صحة الخاصية $p(n)$ على $\mathbb{N}^*$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي:

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + .. + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

لدينا من المعطيات أن : $u_{n+1} = u_n\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

و $u_{n+1} > 0$ و $u_n > 0$

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(u_n\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right)$$
$$= \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

ومنه $p(n+1)$ محققة وأخيرا $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

3- البرهان أن: $S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

لدينا من العلاقة (1) أن:

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$$

قيم x على الترتيب هي $x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{3^3}; \dots \frac{1}{2^n}\right\}$

(1): $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

(2): $x = \frac{1}{2^2}$;

$$\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right) \leq \frac{1}{2^2}$$

(n): $x = \frac{1}{2^n}$;

$$\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \leq \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

بالجمع طرفا الى طرف

$$S_n - \frac{1}{2}T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4-أ- حساب S_n و T_n بدلالة n :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

S_n عبارة عن مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$، وحدها الأول $\frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{1}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots . + \frac{1}{4^n}$$
$$= \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \dots . + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

T_n : عبارة عن مجموع لحدود متتابعة لمتتالية هندسية أساسها $p' = \frac{1}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{4}$

$$T_n = \frac{1}{4}.\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}.\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$(T_n) = \frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

4-ب- استنتاج نهاية لكل من (S_n) و (T_n):

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1$$

لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{1}{3}$$

لأن $-1 < \frac{1}{4} < 1$

5- دراسة تقارب المتتالية (u_n)

نبرهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) - u_n$$
$$= u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right)$$
$$= u_n\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

لكن: $u_n > 0$ و $\frac{1}{2^{n+1}} > 0$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$

ومنه (u_n) متتالية متزايدة تماما

التقارب: بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى لأن $\ln u_n \leq S_n$ أي $u_n \leq e^{S_n}$ فإنها متقاربة

-إعطاء حصر لنهاية المتتالية (u_n)

بما أن (u_n) متقاربة فإن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$

المتتالية (S_n) متقاربة لأن: $\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) \leq \ln l \leq \lim_{x\to+\infty} S_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln l$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n - \frac{1}{2}T_n\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6} \leq \ln l \leq 1$$

ومنه حصر النهاية:

$$e^{\frac{5}{6}} \leq l \leq e$$

131. دالة مقترحة رقم 25

اليوتيوب: مواضيع مقترحة في الرياضيات في الدوال بكالوريا 2016

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة في معلم متعامد ومتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$.

أ) 1- احسب نهايتي الدالة f عند 0 و عند

2) بين أنه من أجل كل عدد موجب تماما x

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)}$$

ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.

5) أحسب $f(4)$ ثم ارسم (Δ) و (C_f) على المجال $]0;4]$.

II) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بـ $u_0 = \frac{3}{2}$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1} = f(u_n)$.

1) برهن انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < 2$

2) أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ ثم استنتج أنها متقاربة.

3) عين نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in N}$.

الحل

I-1- حساب النهايات

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right] = +\infty$$

لأن $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2+2}{3x} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)\right] = +\infty$$

2- عبارة $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x^3+3x^2+2x-6}{x(x^2+2)}$$

ولدينا من جهة أخرى أن:

$$\frac{(x-1)(x^2+4x+6)}{x(x^2+2)} = \frac{x^3+3x^2+2x-6}{x(x^2+2)} = f'(x)$$

-استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

ندرس إشارة $f'(x)$ على $]0;+\infty[$

لكن لدينا $x(x^2+2) > 0$ على $]0;+\infty[$

اذن اشارة $f'(x)$ من إشارة:

$(x-1)(x^2+4x+6)$

$x = 1$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0;1]$

ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(1)$	↗	$+\infty$

II-4- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ أي $f(x) - x$

$$f(x) - x = 3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right)$$

نفرض أن $3\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) > 0$

أي $\ln\left(\frac{x^2+2}{3x}\right) > 0$

ومنه $\frac{x^2+2}{3x} > 1$

أي $\frac{x^2+2-3x}{3x} > 0$

ومنه $x^2+2-3x > 0$

لدينا $x > 0$ ندرس عبارة x^2+2-3x

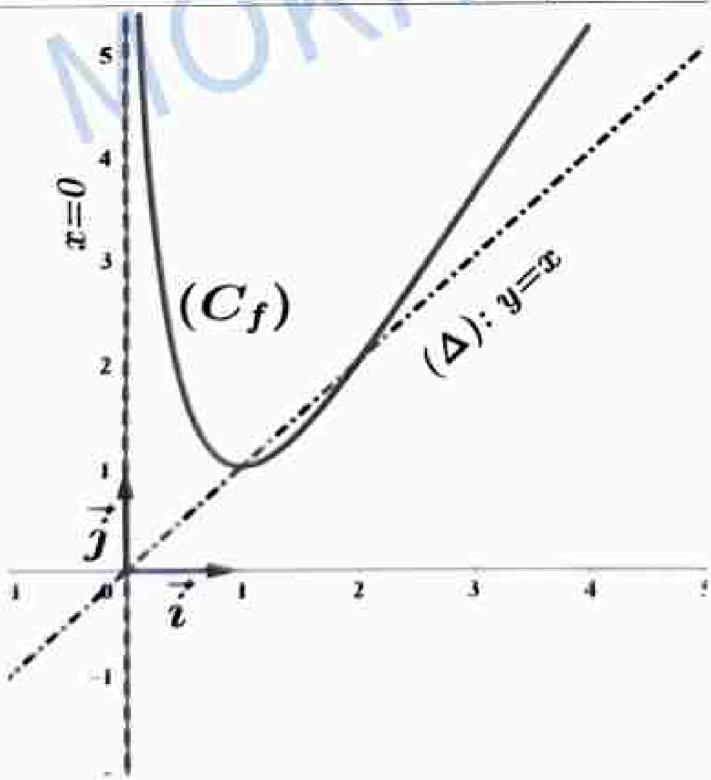
x	0		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

(C_f)فوق (Δ) على المجال $]0;1[\cup]2;+\infty[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]1;2[$

(C_f) بقطع (Δ) عند $x = 1$ و $x = 2$

5- رسم (C_f) ، (Δ) على المجال $]0;4]$



II-1- البرهان بالتراجع أن : $1 < u_n < 2$

نسمي الخاصية $p(n)$ حيث $p(n):\ 1 < u_n < 2$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{3}{2}$ $\quad 1 < \frac{3}{2} < 2$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض صحة الخاصية من أجل كل n طبيعي ونبين صحتها من أجل $(n+1)$

من الفرضية $1 < u_n < 2$ والدالة f متزايدة تماما على $]1;2[$ فإنه لدينا: $f(1) < f(u_n) < f(2)$

$$1 < u_{n+1} < 2$$

ومنه $p(n+1)$ محققة ومنه: $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

2- دراسة رتابة المتتالية u_n

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$ أي: $f(u_n) - u_n$

نضع $u_n = x$ فنجد من جدول الوضعية أن $f(x) - x < 0$ على المجال $]1;2[$ ومنه

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

أي: المتتالية u_n متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج تقارب المتتالية (u_n) :

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد (1) فهي متقاربة نحو النهاية l

3- تعيين نهاية المتتالية:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

132. دالة مقترحة رقم 26

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح رقم 09 2018

1) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

أ- عين نهايات الدالة f_n عند 0 وعند $+\infty$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f_n .

ب- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n ينتمي إلى المجال $[1;e]$

2) المستوي المنسوب إلى المعلم م م $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، (Γ) هو المنحنى الممثل للدالة $x \to \ln x$.

أ- n عدد طبيعي غير معدوم، أكتب معادلة المستقيم (Δ_n) المار بالنقطتين $A(0;1)$ و $B(n;0)$.

ب- ارسم المنحنى (Γ) والمستقيمات (Δ_1)، (Δ_2)، (Δ_3).

ج-بين أن α_n هو فاصلة نقطة تقاطع (Γ) مع (Δ_n) .

د- حدد قيمة α_1 ، ثم، أعط تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (α_n).

3-أ- عبر عن $\ln(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n.

ب- عبر عن $f_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n وتحقق أن: $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$

ج- استنتج اتجاه تغير المتتالية (α_n).

د- بين أن المتتالية (α_n) متقاربة، أحسب نهايتها !

الحل

1- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر الدالة المعرفة على: $]0;+\infty[$ بـ :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1$$

أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \lim_{x\to 0}\left(\ln x + \frac{x}{n} - 1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x + \frac{x}{n} - 1\right) = +\infty$$

-دراسة اتجاه التغير:

ندرس إشارة المشتقة $f_n'(x)$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$$

لكن لدينا $\frac{1}{x} + \frac{1}{n} > 0$ على $]0;+\infty[$ ومنه

$$f'_n(x) > 0$$

أي الدالة $f_n(x)$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

ب- البرهان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n :

بما أن الدالة f متزايدة تماما ومستمرة على $]1;e[$

و
$$\begin{cases} f_n(1) = \ln(1) + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} - 1 \\ f_n(e) = \ln(e) + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \end{cases}$$

و $\quad f_n(1) \times f_n(e) < 0$

و منه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n حيث: $\alpha_n \in]1;e[$

2- كتابة معادلة المستقيم (Δ) :

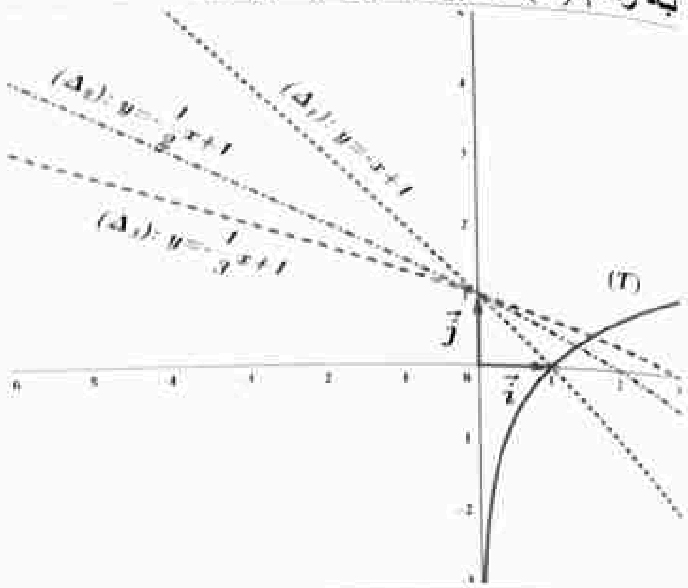
معادلة المستقيم هي: $y = ax + b$

و: $A \in (\Delta_n)$ يعني: $1 = a(0) + b \Leftrightarrow b = 1$

و: $B \in (\Delta_n)$ يعني: $0 = a(n) + b \Leftrightarrow a = -\frac{1}{n}$

و منه معادلة (Δ_n) هي : $y = -\frac{1}{n}x + 1$

ب- رسم (T) و (Δ_1)، (Δ_2)، (Δ_3).



ج- البرهان أن α_n هي فاصلة نقطة التقاطع بين (T) و (Δ_n)

نحل المعادلة: $\ln(x) = -\frac{1}{n}x + 1$

$$\ln(x) + \frac{1}{n}x - 1 = 0$$

تكافئ: $f(x) = 0$

لكن لدينا $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n ومنه (Δ_n) يقطع (T) في النقطة ذات الفاصلة α_n .

د- تحديد قيمة α_1 :

بما أن α_n هو حل لـ : $f_n(x) = 0$

فإن α_1 هو حل لـ : $f_n(x) = 0$

$$f_1(\alpha_1) = 0$$

$$f_1(x) = \ln x + x - 1 = 0$$

نلاحظ أن 1 هو حل ظاهر للمعادلة لأن :

$\ln(1) + 1 - 1 = 0$ و منه : $\alpha_1 = 1$

-إعطاء تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (α_n) :

نلاحظ من البيان أن: $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$

ومنه المتتالية (α_n) هي متتالية متزايدة.

3-أ- التعبير عن $\ln \alpha_n$ بدلالة n و α_n .

لدينا : $f_n(\alpha_n) = 0$ (من مبرهنة القيم المتوسطة)

$$\ln(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n}\alpha_n$$

ب- التعبير عن $f_{n+1}(\alpha_n)$ بدلالة n و α_n:

و لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln(\alpha_n) + \frac{\alpha_n}{n+1} - 1$

$$\ln(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n}\alpha_n$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n}\alpha_n + \frac{1}{n+1}\alpha_n - 1$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\alpha_n$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n-1-n}{n(n+1)}\alpha_n = -\frac{1}{n(n+1)}\alpha_n$$

التحقق أن $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$:

لدينا $1 \leq \alpha_n \leq e$ (مبرهنة القيم المتوسطة)

ولدينا $-\frac{1}{n(n+1)} < 0$ من جهة

و منه: $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$

ج-استنتاج اتجاه تغير المتتالية (α_n)

لدينا: $f_n(\alpha_n) = 0$ أي $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$

و $f_n(\alpha_n) = 0$

و $f_1(\alpha_1) = 0$ ولدينا $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$

ومنه $f_{n+1}(\alpha_n) < f_{n+1}(\alpha_{n+1})$

والدالة f_n متزايدة تماما على المجال: $]0; +\infty[$

وهذا يعني أن: $\alpha_n < \alpha_{n+1}$

ومنه نستنتج أن (α_n) متتالية متزايدة تماما

د-البرهان أن (α_n) متقاربة:

بما أن المتتالية (α_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد e فإنها متقاربة نحو نهاية l.

-حساب النهاية l :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = 1 - \frac{1}{n}\alpha_n$$

ونعلم أن $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln l$

يعني أن $\lim_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n}\alpha_n$

لكن: $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n}\alpha_n = 1$ و منه: $\ln l = 1$

أي: $l = e$

133. دالة مقترحة رقم 27

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح رقم 12 2018

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x})$$

(C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{o}; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^{x})$$

ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته من الشكل $y = -\frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ج- أدرس الوضعية النسبية بين (C_f) و (D) .

3- أنشئ (C_f) و (D).

4- نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{|x|})$

أ- بين أن الدالة g زوجية.

ب- اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ارسم المنحنى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

II) أ- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α .

ب- بين أنه من اجل كل $x \geq 0$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

ج – استنتج أنه، من أجل كل $x \geq 0$:

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$$

2- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq 0$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

ج- استنتج أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ؛

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

د- أحسب نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

الحل

I) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x})$$

1- دراسة تغيرات الدالة f :

أ- النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x}) = +\infty$$

لأن : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1 + e^{-x})$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1) = 0$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

(C_f) يقبل مستقيم مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ عند $+\infty$

ب- اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

ومنه : $f'(x) < 0$ على $\mathbb{R}$ أي الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

2)-أ- بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^x)$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^x) = -\frac{1}{2}x\ln e + \frac{1}{2}\ln(1 + e^x)$$
$$= \frac{1}{2}[-x\ln e + \ln(1 + e^x)]$$
$$= \frac{1}{2}[\ln e^{-x} + \ln(1 + e^x)]$$
$$= \frac{1}{2}\ln[e^{-x}(1 + e^x)]$$
$$= \frac{1}{2}\ln(e^{-x} + e^{-x+x})$$
$$= \frac{1}{2}\ln[e^{-x} + 1] = f(x)$$

ب- بيان أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

نحسب الفرق: $\lim_{x\to-\infty} f(x) - y$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^x) + \frac{1}{2}x\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1 + e^x) = \frac{1}{2}\ln 1 = 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ج- دراسة الوضعية النسبية لـ(C_f) والمستقيم (D)

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$

$$f(x) - y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln(1 + e^x) + \frac{1}{2}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1 + e^x)$$

لدينا مهما كان x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$

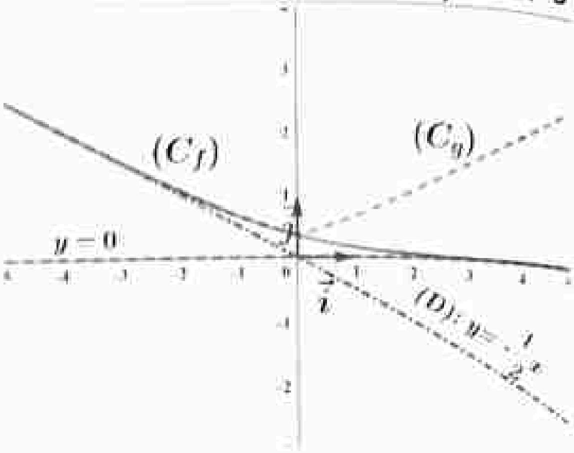
أي : $1 + e^x > 0 + 1$

$$\ln(1 + e^x) > \ln 1$$
$$\frac{1}{2}\ln(1 + e^x) > 0\left(\frac{1}{2}\right)$$

ومنه $f(x) - y > 0$

(C_f) يقع فوق (D)

3- إنشاء (C_f) و (D) :



4- نعتبر g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\frac{1}{2}\ln(1+e^{|x|})$

أ- بيان أن الدالة g زوجية .

بما أن D_g متناظر بالنسبة للـ 0

و $g(-x)=\frac{1}{2}\ln(1+e^{|-x|})$

وبما أن $|-x|=|x|$

$$g(-x)=\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{|x|}\right)=g(x)$$

ومنه الدالة g زوجية .

أي منحناها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

ب- اعتمادا على (C_f) رسم (C_g) في نفس المعلم:

تم الرسم في نفس المعلم

II) 1) أ- بيان أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α.

لتكن الدالة h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$h(x)=f(x)-x$$

نقوم بدراسة اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$:

$$h'(x)=f'(x)-1$$

$$h'(x)=-\frac{1}{2}\times\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-1$$
$$=-\left[\frac{1}{2}\times\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+1\right]$$

ومنه $h'(x)<0$ على $\mathbb{R}$ أي الدالة h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$h'(x)$	$-$
$h(x)$	$+\infty$ ↘ 0

بما أن الدالة h مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]0;1[$

و $\begin{cases} h(1)=-0.84 \\ h(0)=0.34 \end{cases}$

و $h(0)\times h(1)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$

أي أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0<\alpha<1$

ب- بيان من أجل $x\geq 0$ أن $|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$:

$|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$ معناه: $-\frac{1}{4}\leq f'(x)\leq\frac{1}{4}$

يكفي أن نبرهن المتباينتين المتتاليتين : $-\frac{1}{4}\leq f'(x)$ و $f'(x)\leq\frac{1}{4}$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$
$$f'(x)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{2}\right]\leq 0$$

ومنه: $f'(x)-\frac{1}{4}\leq 0$ معناه $f'(x)\leq\frac{1}{4}$

$$f'(x)+\frac{1}{4}=\left[-\frac{1}{2}\,\frac{e^{(-x)}}{1+e^{-x}}+\frac{1}{4}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}-\frac{1}{2}\right]$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{2e^{-x}-1-e^{-x}}{2(1+e^{-x})}\right]$$
$$f'(x)+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-x}-1}{1+e^{-x}}\right]$$

من المعطيات : $x\geq 0$

$e^{-x}\leq e^{0}$ أي $-x\leq 0$

$e^{-x}\leq 1$

$e^{-x}-1\leq 0$

ومنه : $f'(x)+\frac{1}{4}\geq 0$ أي $-\frac{1}{4}\leq f'(x)$

ومنه : $|f'(x)|\leq\frac{1}{4}$

ج- استنتاج أن، $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4}|x-\alpha|$

حالة خاصة: إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I وكان a و b عددان حقيقيان من I ووجد عدد حقيقي M بحيث من أجل كل $x\in I$ ، $|f(x)|\leq M$

فإن: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$

لدينا: $x \ge 0$ و $|f'(x)| \le \frac{1}{4}$

ومنه: $\left|\int_\alpha^x f'(x)\,dx\right| \le \frac{1}{4}\int_\alpha^x dx$

$$|f(x) - f(\alpha)| \le \frac{1}{4}|x-\alpha|$$

لكن لدينا: $f(\alpha) = \alpha$

ومنه: $|f(x) - \alpha| \le \frac{1}{4}|x-\alpha|$

2- (u_n)المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 0$
ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- البرهان بالتراجع أن$u_n \ge 0$

نسمي $P(n)$ الخاصية $(u_n \ge 0)$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ و منه : $u_n \ge 0$

أي $p(0)$ محققة.

ونفرض صحة $p(n)$ من أجل من أجل $n \ge 0$

نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل $n+1$ أي

$u_{n+1} \ge 0$

لدينا من الفرضية $u_n \ge 0$ لكن من دراسة الدالة f لدينا أن $f(x) \ge 0$ معناه أن $f(u_n) \ge 0$

أي $u_{n+1} \ge 0$ ومنه $P(n)$ محققة.

ب- بيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

لدينا مما سبق أنه من أجل $x \ge 0$ أنه

$$|f(x) - \alpha| \le \frac{1}{4}|x-\alpha|$$

من أجل $x = u_n$ نجد أن:

$$|f(u_n) - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$$

ومنه$|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

ج- استنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي n

$$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

لدينا من الجواب السابق: $|u_1 - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_1 - \alpha|$

$\vdots$

$|u_n - \alpha| \le \frac{1}{4}|u_{n-1} - \alpha|$

بالضرب طرفا إلى طرف:

$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$

$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n |0 - \alpha|$ $\quad : u_0 = 0$

$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \alpha$ $\qquad (\alpha < 1)$

وبالتالي $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \alpha \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

د- حساب نهاية المتتالية (u_n):

لدينا مما سبق أن: $0 \le |u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ لأن: $-1 < \frac{1}{4} < 1$

حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n - \alpha| = 0$

نضع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

$|l - \alpha| = 0$

$l = \alpha$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

134. دالة مقترحة رقم 28

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح رقم 13 2016

نعتبر الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$$

1- أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم أدرس إشارة $f'(x)$

ب- أحسب نهاية الدالةf عند $+\infty$

ج- شكل جدول تغيراتها.

2- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها العام

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$$

أ- بين أنه إذا كان $n \le x \le n+1$ فإن $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

ب- بين دون حساب u_n أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ أن $f(n+1) \le u_n \le f(n)$

ت- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة يطلب تعيين نهايتها.

3- نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أن: $I_n = \int_0^n f(x)dx$

أ- أحسب I_n.

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$

أ- أحسب S_n، هل المتتالية (S_n) متقاربة؟

الحل

1- البرهان أن الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$:

بما أن الدالة $x \to \ln(3+x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

والدالة $x \to x+3$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

فإن حاصل قسمتهما يعطي دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ هي الدالة f .

ومنه: الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

-دراسة إشارة $f'(x)$:

- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+3}(x+3)-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1-\ln(x+3)}{(x+3)^2}$$

-إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-\ln(x+3)$ لأن:

$$(x+3)^2 > 0$$

نفرض أن: $1-\ln(x+3) = 0$

$$\ln(x+3) = 1$$

$$x+3 = e$$

$$x = e-3$$

و: $e-3 < 0$

جدول إشارة $f(x)$

x	$-\infty$	$e-3$		0	$+\infty$
$1-\ln x+3$	$+$	0	$-$	‖	$-$
$f'(x)$				‖	$-$

ب- حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = 0$$

نضع: $x+3 = t$

لما: $x \to +\infty$

فإن: $t \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

ج- جدول التغيرات

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$	$\searrow 0$

2-أ- بيان أنه اذا كان $n \le x \le n+1$ فإن $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

لدينا اذا كان : $n \le x \le n+1$ و الدالة f متناقصة تماما فإن $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

ب- البرهان أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن :

$$f(n+1) \le u_n \le f(n)$$

لدينا مما سبق: $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le u_n \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

مع $f(n)$ و $f(n+1)$ أعداد ثابتة دالتاهما الأصلية:

$f(n) \to f(n)(x)$

$f(n+1) \to f(n+1)(x)$

$$\int_n^{n+1} f(n)\,dx = [f(n_x)]_n^{n+1}$$
$$= f(n)(n+1) - f(n)(n)$$
$$= f(n)[n+1-n] = f(n)$$

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx = [f(n+1)x]_n^{n+1}$$
$$= f(n+1)(n+1) - f(n+1)n$$
$$= f(n+1)(n+1-n) = f(n+1)$$

ومنه: $f(n+1) \le u_n \le f(n)$

- استنتاج أن المتتالية متقاربة:

نعلم مما سبق أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

معناه: $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$

ومنه: المتتالية متقاربة وحسب مبرهنة الحصر فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = 0$$

3-أ- حساب I_n :

بما أن الدالة f مكتوبة من الشكل $u'u^n$

لأن $f(x) = \frac{1}{x+3}[\ln(x+3)]^1$

حيث: $u'(x) = \frac{1}{x+3}$ و $u(x) = \ln(x+3)$

فإن دالتها الأصلية هي: $x \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$

$$F(x) = \frac{[\ln(x+3)]^2}{2}$$

$$I_n = \int_0^n f(x)\,dx = \left[\frac{\ln^2(x+3)}{2}\right]_0^n$$

$$= \frac{\ln^2(n+3)}{2} - \frac{\ln^2(3)}{2}$$

$$I_n = \frac{1}{2}[\ln^2(n+3) - \ln^2(3)]$$

4-أ- حساب S_n :

لدينا : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$

$u_0 = \int_0^1 f(x)\, dx$

$u_1 = \int_1^2 f(x)\, dx$

$u_2 = \int_2^3 f(x)\, dx$

بالجمع طرفا الى طرف:

$$S_n = \int_0^1 f(x)\, dx + \int_1^2 f(x)\, dx \dots + \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$$

حسب علاقة شال:

$$S_n = \int_0^n f(x)\, dx = I_n = \frac{1}{2}[ln^2(n+3) - ln^2(3)]$$

معرفة اذا ما كانت المتتالية (S_n) متقاربة:

لمعرفة ذلك نحسب: $\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} I_n$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}[ln^2(n+3) - ln^2(3)] = +\infty$$

ومنه المتتالية متباعدة وليست متقاربة.

135. دالة مقترحة رقم 29

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017 رقم 21

الجزء الأول

نعتبر الدالتين g و h المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ:

$g(x) = x - 1 - lnx$

و $h(x) = x + (x-2)lnx$

1-أ-احسب $g'(x)$ من أجل x من المجال $]0;+\infty[$ ثم ادرس تغيرات الدالة g

2-أ- استنتج أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $]0;+\infty[$

2-ب- بين من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ أن:

$h(x) = 1 + g(x) + (x-1)lnx$

3- بين أنه من اجل كل x من المجال $]0;+\infty[$،

$(x-1)lnx \geq 0$

4- استنتج اشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$f(x) = 1 + xlnx - (lnx)^2$

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

1-ب- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

2-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f

3- ليكن (Δ) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;1)$

3-أ- عين معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ)

3-ب- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$

$f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

3-جـ ادرس اشارة $f(x) - x$ ثم استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

4-أنشئ (Δ) و (C_f) (نقبل أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها محصورة بين(1 و 1.5)

الجزء الثالث

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \sqrt{e}$

ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = f(u_n)$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$1 < u_n < e$

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها

الحل

الجزء الأول

1-أ- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

-دراسة تغيرات الدالة g

النهايات

$\lim_{x\to 0^{>}} g(x) = \lim_{x\to 0^{>}} (x - 1 - \ln x) = +\infty$

لأن $\lim_{x\to 0^{>}} \ln x = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - 1 - \ln x)$ ح ع ت

إزالتها

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

-جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2-أ- استنتاج أن: $g(x) \geq 0$:

من جدول التغيرات نجد أن $g(x) \geq 0$ لأن أقل قيمة تصل إليها الدالة g هي 0

2-ب- بيان أن:
$$h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$$

$1 + g(x) + (x-1)\ln x$
$= 1 + x - 1 - \ln x + (x-1)\ln x$
$= x + \ln x\,(x - 1 - 1)$
$= x + \ln x\,(x-2)$
$= h(x)$

3- بيان انه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:
$$(x-1)\ln x \geq 0$$

ندرس إشارة $(x-1)\ln x$

$(x-1)\ln x \geq 0$
$(x-1)\ln x \geq 0$
$x - 1 \geq 0$
$\ln x \geq 0$
$e^{\ln x} \geq e^0$
$x \geq 1$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$(x-1)\ln x$		$+$	0	$+$	

من الجدول نجد أن $(x-1)\ln x \geq 0$

4- استنتاج إشارة $h(x)$

لدينا $h(x) = 1 + g(x) + (x-1)\ln x$
لكن $(x-1)\ln x \geq 0$ و $g(x) \geq 0$ و $1 > 0$
إذن $h(x) \geq 0$

الجزء الثاني

1-أ- حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم نفسر النتيجة

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [1 + x\ln x - (\ln x)^2] = -\infty$$

التفسير الهندسي: $x = 0$ م م عمودي لـ (C_f) عند $-\infty$

1-ب- حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + x\ln x - (\ln x)^2)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (1 + x\ln x - (\ln x)^2)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[1 + x\ln x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

2-أ- البرهان أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$

$$f'(x) = 0 + 1(\ln x) + \left(x.\frac{1}{x}\right) - 2\left(\frac{1}{x}\right)\ln x$$
$$= \ln x + 1 - \frac{2\ln x}{x}$$
$$= \frac{x\ln x + x - 2\ln x}{x}$$
$$= \frac{x + \ln x(x-2)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

2-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f

بما أن $h'(x) = \frac{h(x)}{x}$ و $h(x) > 0$ و $x > 0$ على $]0;+\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3-أ- تعيين معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ)

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$y = x - 1 + 1$
(Δ): $y = x$

3-ب- التحقق أن $f(x) - x = (\ln x - 1)g(x)$

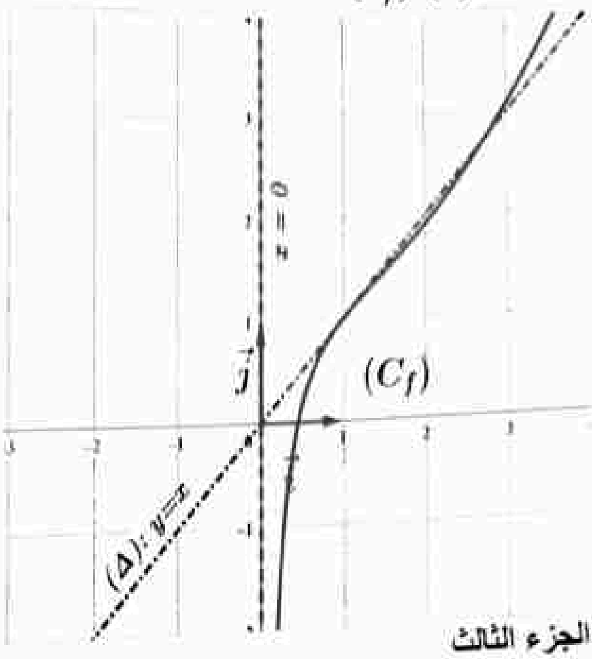
$[\ln(x-1)]g(x)$
$= (\ln(x-1))\,(x - 1 - \ln x)$
$= x\ln x - \ln x - (\ln x)^2 - x + 1\ln x$
$= 1 + x\ln x - (\ln x)^2 - x$
$= f(x) - x$

3-جـ دراسة إشارة $f(x) - x$ واستنتاج الوضع النسبي لـــ (C_f) و (Δ)

لدينا $f(x) - x = (\ln(x-1))g(x)$

x	0		1		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$		$+$	
$\ln(x) - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$-$	0	$-$	0	$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	تماس	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)	

4- انشاء (Δ) (C_f)



الجزء الثالث

1- البرهان بالتراجع انه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $1 < u_n < e$

نسمي $p(n)$ الخاصية $1 < u_n < e$

من أجل $n = 0$: $1 < u_0 = \sqrt{e} < e$

الخاصية محققة من أجل $n = 0$

نفرض صحة $p(n)$ على $\mathbb{N}$ ثم نبين صحتها من أجل $n+1$

لدينا من الفرضية $1 < u_n < e$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]1;e[$

$f(1) < f(u_n) < f(e)$

أي $1 < u_{n+1} < e$ ومنه الخاصية $p(n)$ محققة على $\mathbb{N}$

2- البرهان أن المتتالية (u_n) متناقصة :

تكون المتتالية (u_n) متناقصة إذا كان $u_{n+1} - u_n \leq 0$

أي $f(u_n) - u_n \leq 0$

ولدينا من الجزء الثاني $f(x) - x \leq 0$ على المجال $]1;e[$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

3- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة

حساب نهاية المتتالية (u_n):

بما أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو l فإن:

$\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$

$\lim f(u_n) = \lim u_n = l$

$f(l) = l$

$f(l) - l = 0$

$(\ln l - 1)g(l) = 0$

$\begin{cases} \ln = 1 \\ l = e \end{cases}$

لكن المتتالية متناقصة و $1 < u_n < e$

ومنه $\lim u_n = 1$

136. دالة مقترحة رقم 30

الاسم على اليوتيوب: موضوع مقترح 2017

I- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 2cm$

1-أ- تحقق أن $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$

1-ب- استنتج أن الدالة f فردية ثم أحسب النهايتين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ- بين أنه من اجل عدد حقيقي x فإن:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

2-ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

2-جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فإن: $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$

3-أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - 1 + \frac{1}{2}x\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا

3-ب- استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

4- أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ والمستقيم (Δ) ثم أنشئ المنحنى (C_f)

5- ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما

5-أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

5-ب- أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x = 0$ و $x = \lambda$

ثم أحسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$

II- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n}+1}$$

1- اثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > 0$

2-أ- تحقق، باستعمال نتيجة السؤال (3-جـ) من أن: $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

2-ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.

ماذا يمكن القول عن تقاربها؟

3- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

1-أ- التحقق من: $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$

$$\frac{1}{e^{-x}+1} = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$
$$= \frac{e^x}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x+1-1}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1}$$
$$= 1 - \frac{1}{e^x+1}$$

1-ب- استنتاج أن الدالة f فردية

تكون f فردية إذا كان $f(-x) = -f(x)$ مع $x \in D_f$ و $-x \in D_f$

$$f(-x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - 2\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{2}{e^x+1}$$
$$= -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{e^x+1}$$
$$= -\left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

ومنه الدالة f فردية

حساب النهايتين:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right]$$
$$= +\infty$$

بما أن الدالة f فردية (منحناها متناظر بالنسبة لمبدأ المعلم) فإن:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right]$$
$$= -\infty$$

2- بيان أن $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

نشتق الدالة f:

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{2} - \frac{-e^x(2)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x}-1-2e^x+4e^x}{2(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^{2x}+2e^x-1}{2(e^x+1)^2}$$
$$= -\frac{(e^{2x}-2e^x+1)}{2(e^x+1)^2}$$
$$= -\frac{(e^x-1)^2}{2(e^x+1)^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

2-ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

ندرس إشارة الدالة المشتقة $f'(x)$:

لدينا $\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \geq 0$ أي : $-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \leq 0$

ومنه: الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

2-جـ- استنتاج أن $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$ في المجال $[0;+\infty[$

إذا كان $x \geq 0$ والدالة f متناقصة تماما فإن:

$$f(x) \leq f(0)$$
$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1} \leq 0$$
$$1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$$

3-أ- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - 1 + \frac{1}{2}x|$

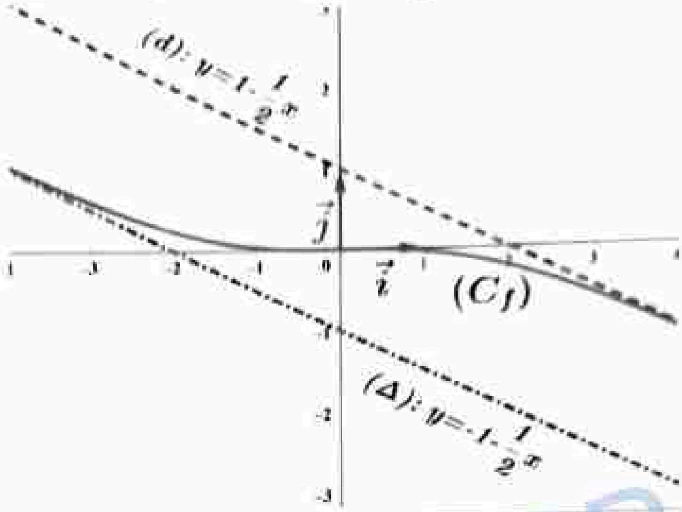
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 1 + \frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{e^x+1} = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ هو م م مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

بما أن الدالة f فردية و $y = 1 - \frac{1}{2}x$ هو م م مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y = -1 - \frac{1}{2}x$ هو م م مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

4- رسم المنحنى (C_f) ، (d) والمستقيم (Δ)



5-أ- بيان أنه من أجل كل x حقيقي: $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{\frac{1}{e^{-x}}+1} = \frac{1}{\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

I-5-ب- مساحة الحيز $A(\lambda)$:

$$A(\lambda) \int_0^{\lambda} [y - f(x)]dx$$
$$= \int_0^{\lambda} \left[-\frac{1}{2}x + 1 - \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}\right)\right] dx \times 4$$
$$= \int_0^{\lambda} \frac{2}{e^x+1} dx \times 4$$
$$= 2\int_0^{\lambda} \frac{1}{e^x+1} dx \times 4$$
$$= 2\int_0^{\lambda} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx \times 4$$
$$= -2[\ln(e^{-x}+1)]_0^{\lambda} \times 4$$
$$= -8\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right) cm^2$$

-حساب نهاية $A(\lambda)$ يؤول إلى $+\infty$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to +\infty} \left[-8\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)\right]$$
$$= -8\ln\frac{1}{2}$$
$$= -8\ln(2)^{-1} = 8\ln 2\, cm^2$$

II-1-أ- البرهان بالتراجع أن $u_n > 0$:

نسمي $p(n)$ الخاصية $u_n > 0$

من أجل $n = 0$ $u_0 = 1 > 0$

ومنه $p(0)$ محققة

نفرض أن الخاصية $p(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n

ثم نبين صحتها من أجل $n+1$ أي $p(n+1)$

لدينا من الفرضية

$$u_n > 0$$
$$e^{u_n} > e^0$$
$$e^{u_n} > 1$$
$$e^{u_n} + 1 > 2$$
$$\frac{1}{e^{u_n}+1} < \frac{1}{2}$$
$$-\frac{2}{e^{u_n}+1} > -1$$
$$1 - \frac{2}{e^{u_n}+1} > 0$$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة ومنه $u_n > 0$ من أجل كل عدد طبيعي

2-أ- التحقق من أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

من السؤال (3-جـ) نجد $1 - \frac{2}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}x$

نضع $u_n = x$ نجد أن $1 - \frac{2}{e^{u_n}+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

أي $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

2-ب- استنتاج أن المتتالية (u_n) متناقصة:

حتى تكون (u_n) متناقصة يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1} - u_n \leq 0$

لدينا من السؤال السابق $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

$u_{n+1} - u_n \leq -\frac{1}{2}u_n$

لكن $-\frac{1}{2}u_n < 0$ لأن $u_n > 0$

ومنه المتتالية متناقصة .

التقارب: بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 0 فإنها متقاربة

3- بيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

البرهان بالتراجع:

نضع الخاصية $p(n)$: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

من أجل $n = 0$; $u_0 = 1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $1 \leq$

الخاصية $p(0)$ محققة

نفرض صحتها من أجل $n \in \mathbb{N}$ ثم نبين صحتها من أجل $(n+1)$

من الفرضية لدينا : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

نضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ محققة أي الخاصية $p(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

حساب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

لدينا أن $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

إذن حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

137. دالة مقترحة رقم 31

الجزء الأول

m عدد حقيقي غير معدوم و f_m الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f_m(x) = 2x + 3 - (x+1)e^{mx}$

و (C_m)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس$(O\,;\vec{i};\vec{j})$

I-نضع $m = 1$

1-احسب $f'_1(x)$، $f''_1(x)$ ثم ادرس تغيرات $f'_1(x)$

2-احسب $f'_1(0)$، واستنتج إشارة $f'_1(x)$

3-ادرس تغيرات الدالة $f_1(x)$

4- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{mx}$ واستنتج معادلة (Δ) المستقيم المقارب لـ(C_1) ثم ادرس وضعية (C_1) مع المستقيم (Δ)

5- بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $0.92 < \alpha < 0.93$

و $-1.56 < \beta < -1.55$

ثم انشئ (Δ) و (C_1)

6-باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدود بـ(C_1) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = 1$ ، $x = \alpha$ ، $y = 2x + 3$

7-بين أن $A(\alpha) =$ [illegible] ثم جد حصرا للعدد$A(\alpha)$

الجزء الثاني

1-بين أن جميع المنحنيات (C_m) تمر بنقطتين ثابتتين M و N يطلب تعيين احداثيي كل منهما

2-أوجد معادلة المماس للمنحنى (C_m) عند النقطة ذات الاحداثيات $(2;0)$

3-بين أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لجميع المنحنيات (C_m) ثم ادرس وضعية (C_m) بالنسبة لـ(Δ)

4-n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2، و $f_m^{(n)}(x)$ المشتقة من الرتبة n للدالة $f_m(x)$

-بر هن بالتراجع أن:

$$f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx + m + n)$$

الحل

I- بوضع : $m = 1$

1-حساب المشتقات

$f_1(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$
$f'_1(x) = 2 - (x+2)e^x$
$f''_1(x) = -(x+3)e^x$

تغيرات $f'_1(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'_1(x) = 2$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f'_1(x) = -\infty$

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f''_1(x)$		$+$	0	$-$	
$f'_1(x)$	2	$\nearrow$	$2+\frac{1}{e^3}$	$\searrow$	$-\infty$

2- حساب $f'_1(0)$ واشارة و$f'_1(x)$:

$f'_1(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	

3- إشارة $f'_1(x)$،وجدول تغيرات $f_1(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	
$f_1(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{mx}$ واستنتاج معادلة(Δ)

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)e^{mx} = 0$

ومنه المستقيم(Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل لـ(C_1) بجوار $-\infty$

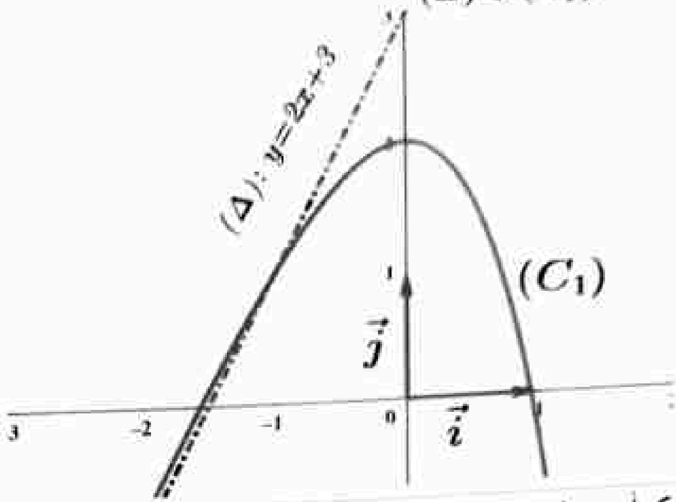
وضعية (C_1) مع (Δ)

(C_1) فوق (Δ) لما $x < -1$
(C_1) تحت (Δ) لما $x > -1$
(C_1) يقطع (Δ) لما $x = -1$

5- البرهان أن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلين

المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلين α و β وذلك بتطبيق مبرهنة القيم المتوسطة

انشاء (C_1) و (Δ)



6-أ-حساب $A(\alpha)$

$$A(\alpha)=\int_0^\alpha (x+1)e^x\,dx$$
$$=[(x+1)e^x]_0^\alpha-\int_0^\alpha e^x\,dx$$
$$=[(x+1)e^x-e^x]_0^\alpha$$
$$=[xe^x]_0^\alpha$$
$$A(\alpha)=\alpha e^\alpha$$

6-ب-تبيين أن $A(\alpha)=\frac{\alpha^3+2\alpha}{1+\alpha}$:

$$A(\alpha)=\alpha e^\alpha$$

لكن لدينا $f(\alpha)=0$ ومنه

$$e^\alpha=\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}$$

بالتعويض في عبارة $A(\alpha)$ نجد

$$A(\alpha)=\frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$$

حصر $A(\alpha)$

$$A(\alpha)=2\alpha+1-\frac{1}{\alpha+1}$$

ومنه

$$2.31<A(\alpha)<2.34$$

الجزء الثاني

1-البرهان أن جميع المنحنيات (C_m) تمر بنقطتين ثابتتين M و N

$$2x+3-(x+1)e^{mx}=y$$

$$\begin{cases}(x+1)e^{mx}=0\\ \text{و}\\ 2x+3=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ \text{و}\\ y=1\end{cases}$$

أو

$$\begin{cases}x=0\\ \text{و}\\ (2x+3)-(x+1)=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ \text{و}\\ y=2\end{cases}$$

ومنه كل المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين هما $M(-1;1)$ و $N(0;2)$

2-معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الاحداثيات $(0;2)$

$$(\Delta): y=(1-m)x+2$$

3-تبيين أن (Δ) م.م. مائل لجميع المنحنيات (C_m)

لدينا

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty$$

و

$$\lim_{x\to-\infty} f_m(x)-y=0$$

ولما $m<0$ نستعمل حالة $x\to+\infty$

اذن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لجميع المنحنيات (C_m)

الوضعية

ندرس إشارة الفرق $f_m(x)-y=(x+1)e^{mx}$

لما $x<-1$ (C_1) فوق (Δ)

لما $x>-1$ (C_1) تحت (Δ)

لما $x=-1$ (C_1) يقطع (Δ)

4-البرهان أن

$$f_m^{(n)}(x)=-m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$$

نبرهن على ذلك بالتراجع من أجل $n\geq 2$

$$f'_m(x)=2-(mx+m+1)e^{mx}$$
$$f''_m(x)=-(m^2x+m^2+2m)e^{mx}$$
$$=-m(mx+m+2)e^{mx}$$

نفرض أن

$$f_m^{(n)}(x)=-m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$$

فيكون

$$f_m^{(n+1)}(x)=(f_m^{(n)}(x))'$$
$$=-m^{n-1}(m^2x+m^2+mn+m)e^{mx}$$
$$=-m^n(mx+m+n+1)e^{mx}$$

ومنه مهما يكن n طبيعي أكبر من أو يساوي 2 فإن

$$f_m^{(n)}(x)=-m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$$

جزء الدوال الأجنبية

138. المغرب 2018 الرياضيّات العادية

-الجزء الأول-

نعتبر المتغير الحقيقي x حيث($\forall x \in]0;+\infty[$)

1-أ-بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

1-ب-باستعمال تغيير المتغير : $u = t^2$ بين أن:

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

1-جـ-استنتج أن:

$$\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

2-حدد: $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

-الجزء الثاني -

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1) \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

و (C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس$(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1-أ-بين أن الدالة f مستمرة على يمين 0

1-ب-بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0

1-جـ-احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2-أ-بين أن $f(x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيرها

2-جـ-تحقق أن $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$

3-مثل بيانيا (C_f)

-الجزء الثالث-

1-نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي

$$g(x) = f(x) - x$$

أ-بين أن

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

1-ب- استنتج أن g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ ثم بين أن:

$$g(\,]0;+\infty[\,) =]-\infty;1[$$

1-جـ- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$

2-ليكن a عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي: $u_0 = a$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

2-أ-بين أن: $u_n > 0$

2- تقبل أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

2-ب- بين بالتراجع أن:

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

2-جـ-استنتج أن المتتالية (u_n) تؤول الى α

الحل

الجزء الأول:

1-أ- البرهان أن $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

ليكن x من $]0;+\infty[$

$$\int_0^x \frac{t}{t+1}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$= [t - \ln(1+t)]_0^x$$
$$= x - \ln(1+x) - \ln(1)$$
$$= x - \ln(1+x)$$

1-ب- البرهان أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

ليكن x من $]0;+\infty[$ لدينا $u = t^2$

لدينا $t = x \Leftrightarrow u = x^2$

ومنه $t = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ولدينا $u = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{u}$

أي $du = 2tdt$

ومنه $dt = \frac{du}{2t}$

اذن $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}} \times \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$

اذن $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$

1-جـ استنتاج أن: $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

لدينا $\int_0^x \frac{t}{t+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$

و $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

أي $x - \ln(1+x) = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\,du$

ولدينا

$$0 \leq u \leq x^2$$

أي $0 \leq \sqrt{u} \leq x$

ومنه $1 \leq \sqrt{u} + 1 \leq x + 1$

أي $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{\sqrt{u}+1} \leq 1$

بما أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}+1}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$

بالتكامل نحصل على

$$\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{x+1}\,dx \le \frac{1}{2}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{u+1}}\,du \le \frac{1}{2}\int_0^{x^2}1\,du$$

$$\frac{x^2}{2(x+1)} \le x-\ln(x+1) \le \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2(x+1)} \le \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \le \frac{1}{2}$$

2-تحديد $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

لدينا $\frac{1}{2(x+1)} \le \frac{x-\ln(x+1)}{x^2} \le \frac{1}{2}$

ولدينا $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$

و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ومنه النهاية بالحصر

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

-الجزء الثاني-

1-برهان استمرارية f عند 0 من اليمين بمعنى 0^+

$$\lim_{\substack{> \\ x\to0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to0}}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1)$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{\ln(x+1)}{x}(x+1)$$
$$= 1\times1 = 1 = f(0)$$

ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0

1-ب-قابلية الاشتقاق f عند 0 من اليمين

$$\lim_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{\frac{(x+1)}{x}\ln(x+1)-1}{x}$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{(x+1)\ln(x+1)-x}{x^2}$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x\to0}}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

لأن $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

و $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to0}}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ حسب 2-1

1-جـ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1)$$
$$= +\infty$$

2-أ-برهان قابلية الاشتقاق للدالة f

الدالة $x\mapsto\ln(x+1)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ وكذلك الدالة $x\mapsto x+1$ والدالة $x\mapsto\frac{1}{x}$

اذن $f(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها جداء هاته الدوال.

-حساب $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$$

لدينا حسب الجزء الأول $\frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

ولدينا $0 < \frac{1}{2(1+x)}$

ومنه $0 < \frac{x-\ln(x+1)}{x^2}$

وبالتالي $f'(x) > 0$ على المجال $]0;+\infty[$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2-جـ-البرهان أن $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$

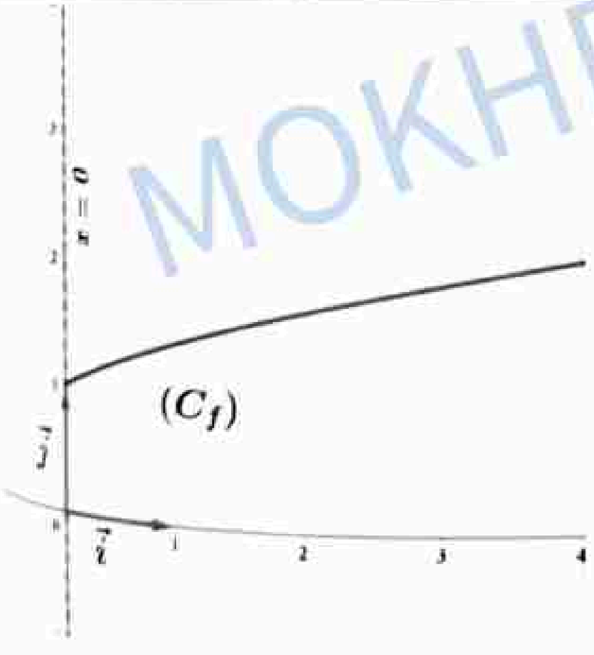
نعلم أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ولدينا $f(0) = 1$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

اذن $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$

3-التمثيل البياني لـ(C_f)



-الجزء الثالث

1-أ- البرهان أن $0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$

لدينا مما سبق ليكن $x\in]0;+\infty[$

$$\frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$$

و $f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

ولدينا $x > 0$ أي $\frac{1}{2(1+x)} > 0$

ومنه $0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$

1-ب-استنتاج ان الدالة g متناقصة تماما

لدينا $g(x) = f(x) - x$ ومنه

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

ولدينا من السؤال السابق

$$0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$$

ومنه $-1 \le f'(x) - 1 \le -\frac{1}{2}$

أي $-1 \le g'(x) \le -\frac{1}{2}$

ومنه $g'(x) < 0$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

1-جـ البرهان أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$$

لدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على $]0;+\infty[$

ولدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \end{cases}$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \times \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) < 0$

ومنه و حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α على $]0;+\infty[$

2-البرهان أن $u_n > 0$

نبرهن على ذلك بالتراجع

ليكن $n \in \mathbb{N}$

لأجل $n = 0$ لدينا $u_0 = a > 0$

نفترض أن $u_n > 0$

لنبين أن $u_{n+1} > 0$

لدينا $u_n > 0$ و f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

ومنه $f(u_n) > f(0)$

أي $u_{n+1} > 0$

ومنه حسب مبدأ التراجع $u_n > 0$

2-ب-البرهان بالتراجع أن:

$$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

من اجل $n = 0$ لدينا $|u_0 - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$

وهذا صحيح لأن $|a - \alpha| \le |a - \alpha|$

نفرض أن $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

لنبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$

لدينا من فرض التراجع

$$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

ومنه $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$

ونعلم أن $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

ومنه:

$$|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$$

اذن حسب مبدأ التراجع

$$|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$$

1-جـ-حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

ولدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$

وبالتالي: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

139. المغرب 2017 الرياضيات العادية

الجزء الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(0) = 0 \text{ و } f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى م م م $(O;\vec{i};\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1-أ- ادرس استمرارية f عند 0 من اليمين

1-ب بين أن f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين

2-أ-أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2-ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

3-أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تحديدها

3-ب-أرسم (C_f)

-الجزء الثاني-

نعتبر الدالة F المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي:

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt$$

1-بين أن $F(x)$ مستمرة على المجال $[0;+\infty[$

2-أ-باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن

$$\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

2-ب-احسب $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$

2-ج-بين أن $\int_0^1 f(x)dx = e^{-1}$

3- احسب cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات

$y=0$ و $x=2$ و $x=0$

الحل

1-أ-دراسة استمرارية f عند 0 من اليمين

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(1-t)e^{t}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(e^{t}-te^{t})$$
$$=0$$

بما أن $\lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ فإن f مستمرة عند 0 من اليمين

1-ب-البرهان أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0 من اليمين

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$
$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-t+t^2)e^{t}$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(-te^{t}+t^2e^{t})$$
$$=0$$

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0

ولدينا $f'(0)=0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب افقي لـ(C_f) بجوار $+\infty$

2-تشكيل جدول تغيرات $f(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و:

$f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$

بما أن $x\in]0;+\infty[$ فإن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

3-أ- نقطة الانعطاف

f' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة "الثانية" قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$f''(x) = \frac{1}{x^5}e^{-\frac{1}{x}}(-3x+1)$$

اشارة $f''(x)$ من إشارة $-3x+1$

ومنه

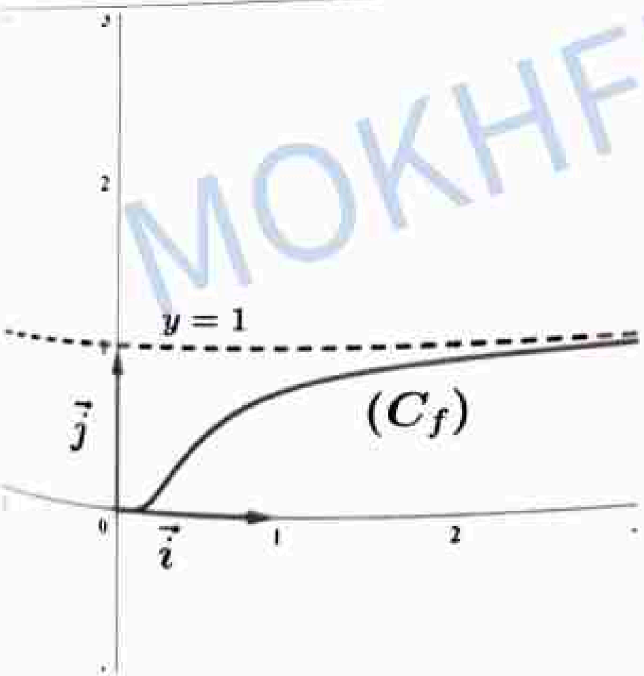
$f''(x) \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

على المجال $]0;\frac{1}{3}[$: $f''(x)>0$

على المجال $]\frac{1}{3};+\infty[$ $f''(x)<0$

بما أن f'' تنعدم وتغير اشارتها عند $\frac{1}{3}$ فإن النقطة $I\left(\frac{1}{3};4e^{-3}\right)$ هي نقطة انعطاف لـ(C_f)

3-ب- رسم (C_f)



-الجزء الثاني-

1-استمرارية $F(x)$

لدينا $f(x)$ مستمرة على $]0;+\infty[$

و $x\in[0;+\infty[$

$x\mapsto x$ و $x\mapsto 1$ قابلتين للاشتقاق على $]0;+\infty[$

اذن $F(x)$ مستمرة على $]0;+\infty[$

ملاحظة: $\int_x^1 f(t)dt = -\int_1^x f(t)dt$

2-حساب $\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt$

نستعمل المكاملة بالتجزئة حيث نضع

$u(x) = e^{\frac{-1}{t}}$	$u'(x) = \frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$
$v(x) = t$	$v'(x) = 1$

$$\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = \left[te^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{t}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

2-ب- حساب $\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$

$$\int_x^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt + \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$
$$= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$$

2-جـ-البرهان أن $\int_0^1 f(x)dx = e^{-1}$

لدينا:

$$\int_0^1 f(t)dt = e^{-1} = \int_0^1 \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt = F(0)$$

وبما أن F متصلة على يمين 0

فإن $F(0) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} F(x)$

اذن:

$$F(0) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0}\left(e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \lim_{t\to-\infty}\left(e^{-1} + \frac{1}{t}e^{t}\right) = e^{-1}$$

3-حساب مساحة الحيز A

$$A = \int_0^2 f(t)\, dt \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

لدينا $f(x) \geq 0$ حيث $x \in [0;2]$

اذن

$$A = \left(\int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt\right) \times 4cm^2$$

$$A = \left(e^{-1} - \left(e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}}\right)\right)4cm^2$$

$$A = 8e^{-\frac{1}{2}}\, cm^2$$

140. المغرب 2019 العلوم التجريبية العادية

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

1-أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2-أ-تحقق أن لكل x من $]0;+\infty[$:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}lnx - 1\right)lnx$$

2-ب-استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2-جـ-بين أن لكل x من $]0;+\infty[$:

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$$

ثم استنتج أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

3-أ-بين أن لكل x من $]0;1]$:

$(x-1) + \ln x \leq 0$

وأن لكل x من $[1;+\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$

3-ب-بين أن لكل x من $]0;+\infty[$:

$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$

3-جـ-ضع جدول تغيرات الدالة f

4-بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تحديد احداثياتها

5-أ-أحسب $f(x) - x$ وأدرس الوضع النسبي لـ (C_f) مع (Δ) ذو المعادلة $y = x$

5-ب-أنشئ (Δ) و (C_f) في نفس المعلم

6-أ- بين أن الدالة $H(x) = xlnx - x$ دالة أصلية للدالة $h(x) = lnx$ على المجال $]0;+\infty[$

باستعمال المكاملة بالتجزئة جد قيمة $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

6-جـ-احسب بـcm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$

الحل

الجزء الأول:

1-حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right)$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مقاربا شاقولي معادلته $x = 0$ في جوار $+\infty$

2-أ- التحقق من عبارة $f(x)$ المعطاة

$$x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$$
$$= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln x \times \ln x - \ln x$$
$$= x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$
$$= f(x)$$

استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x \right]$$
$$= +\infty$$

2-جـ_البرهان أن $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}\right)^2$$

-استنتاج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2}\right)^2 = 0$$

دراسة إشارة العبارة $(x-1) + \ln x$

1)-على المجال $]0;1]$ لدينا:

$$0 < x \leq 1$$
$$-1 < x - 1 \leq 0$$
$$\ln x \leq 0$$

بجمع المتراجحتين طرفا لطرف نجد

$$(x-1) + \ln x \leq 0$$

2)-على المجال $[1;+\infty[$ لدينا

$$x \geq 1$$
$$x - 1 \geq 0$$
$$\ln x \geq 0$$

ومنه $(x-1) + \ln x \geq 0$

3-ب-دراسة تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$$

جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

4-البرهان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

f' قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة "الثانية"

$$f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

إشارة $f''(x)$

$$f''(x) > 0$$
$$\Rightarrow \frac{2 - \ln x}{x^2} > 0$$
$$2 - \ln x > 0$$
$$\Rightarrow x < e^2$$

المشتقة الثانية تنعدم في e^2 وتغير اشارتها ومنه تقبل

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

عند e^2 نقطة انعطاف احداثياتها $\left(e^2; \frac{2e^2+1}{2}\right)$

5-أ- دراسة الوضع النسبي لـ(C_f) و(Δ)

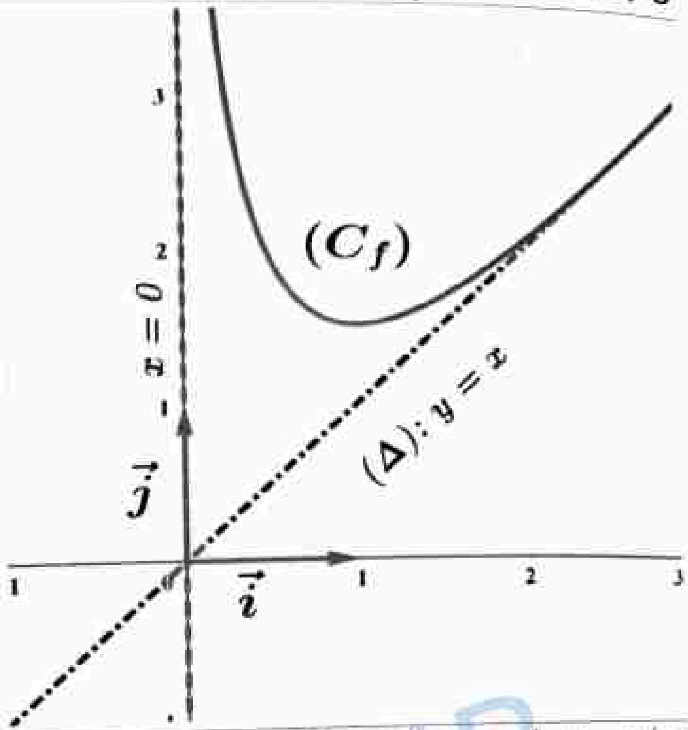
$$f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}((\ln x)^2 - 2\ln x + 1)$$
$$= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$$

ومنه $f(x) - x \geq 0$

ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) دائما

ويتقاطعان عند $x = e$

5-ب-أنشئ (Δ) و (C_f) في نفس المعلم



6-أ-البرهان أن H دالة أصلية لـ h

باشتقاق $H(x)$ نجد

$$H'(x) = lnx + x\frac{1}{x} - 1$$
$$= lnx = h(x)$$

6-ب-حساب $\int_1^e (\ln x)^2 dx$

نستعمل المكاملة بالتجزئة

$u(x) = lnx$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = xlnx - x$	$v'(x) = lnx$

ومنه

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [lnx(xlnx - x)]_1^e$$
$$- \int_1^e \frac{1}{x}(xlnx - x)dx$$
$$= [1(e \times 1 - e) - 0] - \int_1^e lnx\, dx + \int_1^e 1dx$$
$$= 0 - [xlnx - x]_1^e + [x]_1^e = e - 2$$

6-جـ-حساب مساحة الحيز A

$$A = \int_1^e [f(x) - x]dx$$
$$A = \int_1^e \left[\frac{1}{2} - lnx + \frac{1}{2}(lnx)^2\right]dx$$
$$A = \int_1^e \frac{1}{2}dx - \int_1^e lnx\, dx + \frac{1}{2}\int_1^e (\ln x)^2 dx$$
$$A = \frac{1}{2}[x]_1^e - [xlnx - x]_1^e + \frac{1}{2}(e-2)\, cm^2$$
$$A = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1\, cm^2$$
$$A = e - \frac{5}{2}\, cm^2$$

.141. المغرب 2017 العلوم التجريبية العادية

الجزء الأول

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$

الجدول التالي يمثل تغيرات الدالة g

احسب $g(1)$ ثم شكل جدول إشارة $g(x)$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1-احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2-احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f على المجال $]0;+\infty[$

3-أ-حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة:

$\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$

3-ب-استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) مع المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ على المجال $]1;2[$

4-أنشئ (C_f) و (D)

5-أ- احسب $\int_1^2 \frac{lnx}{x}dx$

5-ب- بين أن الدالة $H(x) = 2lnx - x$ هي دالة أصلية للدالة $h(x) = \frac{2}{x} - 1$ على المجال $]0;+\infty[$

5-جـ-باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) lnx\, dx = (1 - ln2)^2$$

6- احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و المستقيم (D) و المستقيمين الذين معادلاتهما $x = 1$ و $x = 2$

الحل

الجزء الأول

1-اشارة $g(x)$

لدينا $g(1) = 0$ ومن جدول التغيرات لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ومنه اشارة $g(x)$ تكون

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

الجزء الثاني

1-حساب النهايات

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ م م عمودي لـ(C_f) بجوار $+\infty$

2-جدول تغيرات $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f'(x) = \frac{x^3+x^2-2x+2x\ln x}{x^2} = \frac{x^2+x-2+2\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3-أ- حل المعادلة

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$$

$$\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

3-ب-استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) على المجال $]1;2[$

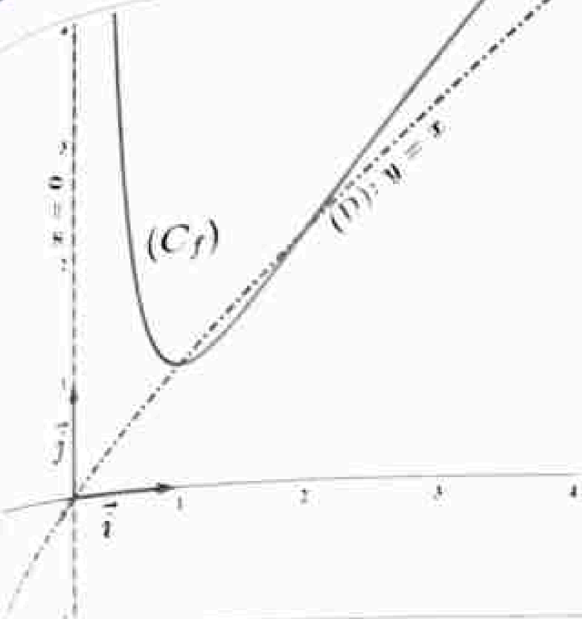
$$f(x) - x = \frac{x-2}{x} lnx$$

من حلول المعادلة $\left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x = 0$ وبما أن الدالة متزايدة على $[1;2]$ فانه على هذا المجال لدينا $\frac{x-2}{x} lnx \le 0$

ومنه $f(x) - x \le 0$

ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (D) على $[1;2]$

4-انشاء (C_f) و (D)



5-أ-حساب $\int_1^2 \frac{lnx}{x} dx$

$$\int_1^2 \frac{lnx}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} lnx\, dx = \left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^2$$

$$\int_1^2 \frac{lnx}{x} dx = \frac{1}{2}(ln2)^2$$

5-ب-اثبات أن H دالة اصلية لـh

على المجال $]0;+\infty[$

$$H'(x) = \frac{2}{x} - 1 = h(x)$$

5-جـ-باستعمال المكاملة بالتجزئة بيان أن:

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) lnx\, dx = (1-ln2)^2$$

$u(x) = lnx$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = 2lnx - x$	$v'(x) = \frac{2}{x} - 1$

$$\int_a^b u \times v' dx = [u \times v]_a^b - \int_a^b v \times u' dx$$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) lnx\, dx = [lnx(2lnx - x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}(2lnx - x)dx$$

$$= (1-ln2)^2$$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x}-1\right) lnx\, dx = (1-ln2)^2$$

6-حساب المساحة

$$A = \int_1^2 \left|\left(x + \left(1-\frac{2}{x}\right)\ln x\right) - x\right| dx$$
$$= (1-ln2)^2\ cm^2$$

142. بكالوريا تونس 2018 رياضيات

1- g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x)=1-x+x\ln(x)$$

أ- ادرس تغيرات الدالة g

ب- بين أن من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $1+x\ln x\geq x$

2- f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{1+x\ln x} & ;x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ- برهن أن f مستمرة عند 0 من اليمين

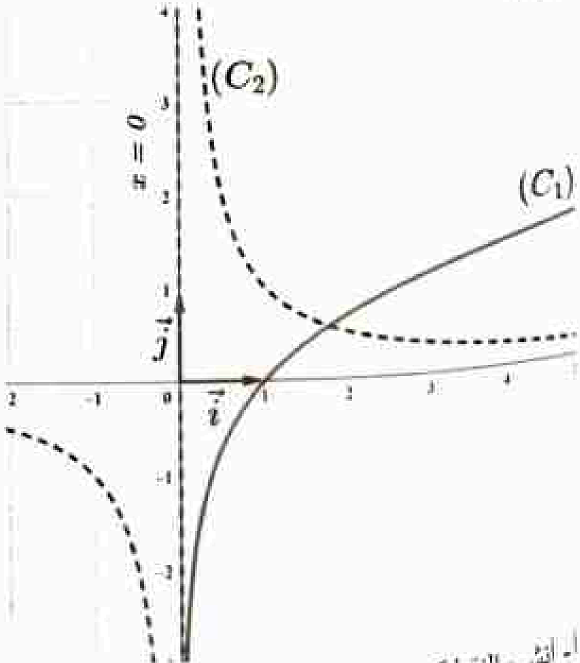
ب- بين أن $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=+\infty$ وفسر النتيجة هندسيا

جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

3-أ- بين أن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=-\frac{1+\ln x}{(1+x\ln x)^2}$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- يعطى أدناه التمثيلين البيانيين (C_1) و(C_2) على $]0;+\infty[$: للدالتين $x\mapsto\ln x$ و $x\mapsto\frac{1}{x}$ على الترتيب



أ- انشئ النقطة A من (C_1) ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$ والنقطة B من (C_2) ذات الفاصلة $\frac{1}{e}-1$ ثم استنتج انشاء تمثيل C نقطة من (C_f) ذات الفاصلة $\frac{1}{e}$

ب- باستعمال السؤال (1-ب) بين أن $f(x)\leq\frac{1}{x}$

استنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (C_2)

جـ- مثل (C_f)

5- نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ كما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$

أ- بين أن من أجل $t\in[1;+\infty[$ لدينا:

$$\frac{1}{t+t\ln t}\leq f(t)$$

ب- بين أن من أجل $x\in[1;+\infty[$ لدينا:

$$\ln(1+\ln x)\leq F(x)\leq\ln x$$

جـ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

143. بكالوريا تونس 2017 رياضيات

الجزء الأول:

الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا

2- بين أن $f'(x)=\frac{x+2}{x(x+1)}$ وشكل جدول تغيراتها

3-أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2=x+1$

3-ب- نرمز بـ α الحل الموجب للمعادلة السابقة تحقق أن الحل الثاني يساوي $-\frac{1}{\alpha}$

4-أ- أثبت أن (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة α

4-ب- أثبت أن معادلة المماس (T) عند النقطة A هي : $y=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$

4-جـ- تحقق أن (T) يمر من النقطة $B\left(0,-1-\frac{1}{\alpha^2}\right)$

5- ارسم كل من (C_f) و (T) و النقطتين A و B

-الجزء الثاني: n عدد طبيعي غير معدوم نضع من أجل $x\geq1$

$$G_n(x)=\int_1^x f(t^n)dt$$

1-أ- بين أن

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1)\leq G_n(x)\leq f(x^n)(x-1)$$

1-ب- بين أن من أجل $x\geq1$ يكون:

$$G_n(x)=xf(x^n)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)-n(x-1)$$

$$-\int_1^x \frac{n}{1+t^n}\,dt$$

2- نقوم بوضع:

$$I_n = n\int_1^{\sqrt[n]{\alpha}} \frac{1}{1+t^n}\,dt$$

2-أ- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$

2-ب- باستعمال إجابة السؤال (1-أ) أثبت أن

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha)$$

2-جـ- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

144. بكالوريا تونس 2015 رياضيات

-الجزء الأول

نعتبر u الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$u(t) = 3\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$$

1-أ- شكل جدول تغيرات الدالة u

1-ب- حدد إشارة u

2- نعتبر الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = x^3[\ln(x+1) - \ln x] \;\; ; x \in]0;1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2-أ- بين أن f مستمرة وقابلة للاشتقاق على يمين0 واحسب$f'(0)$

2-ب- تحقق من أجل $x \in]0;1]$ أن:

$$f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$$

- ثم شكل جدول تغيراتها.

الجزء الثاني

نعتبر الدالتين g وh المعرفتين على المجال $[0;1]$ بـ:

$$g(x) = x^3\ln(x+1)$$

و

$$\begin{cases} h(x) = x^3\ln x \;\; ; x \in]0;1] \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

حيث (C_f) و (C_g) و(C_h) **هي التمثيلات البيانية** للدوال f و g وh على الترتيب في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- أثبت أن (C_h) يقبل مماسا أفقيا عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$

2-أ- تحقق أن $f(x) = g(x) - h(x)$

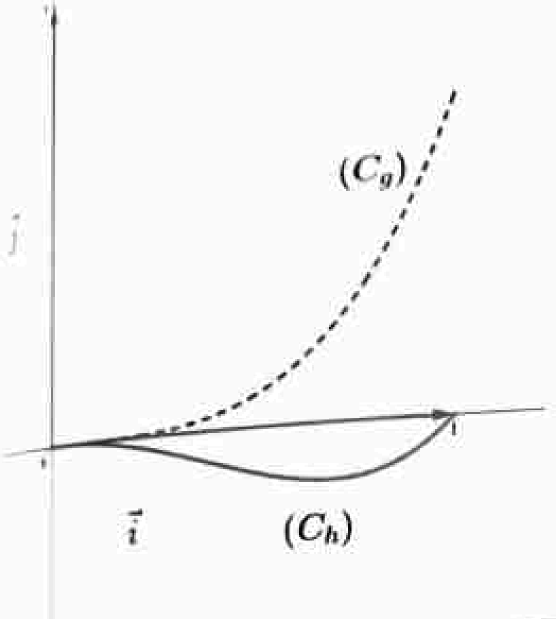
2-ب- ادرس الوضع النسبي لـ(C_f) مع (C_g)

3- نسمي (T) و (T') مماسي المنحنيين (C_f) و (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{3}}$

بين أن (T) و (T') متوازيان

4- يعطى التمثيل البياني لـ (C_g) و (C_h)

ارسم (C_f) و (T) و (T') في نفس المعلم



145. بكالوريا تونس 2018 تقني

الجزء الأول:

1- يعطى الجدول في الاسفل للدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ:

$h(x) = x - 1 + x\ln x$

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$h(x)$	-1 ↘	$-(1+e^{-1})$ ↗	$+\infty$

أ- أحسب $h(1)$

ب- أوجد اشارة الدالة h على المجال $]0,1]$ و $[1,+\infty[$

2- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$

$$f(x) = 1 + (x-1)\ln x$$

تمثيلها البياني (C) في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ- برهن أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

ثم فسر النتيجة بيانيا

3- برهن أن من أجل $x \in]0,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{x}$$

ب- أنشئ جدول التغيرات للدالة f

4- حل في $]0, +\infty[$ المعادلة $f(x) = x$.

ب- بين أن $x \leq f(x)$ إذا وفقط إذا كان $x \in [1, e]$

جـ- استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

5- ارسم (C)

6- A مساحة بالوحدة للجزء المحصور بالمنحنى (C) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوي المعادلتين $x = 1$ و $x = e$

أ باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن:

$$\int_1^e (xlnx)dx = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

ب- أحسب A

7- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على N

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- بين بالتراجع أنه لما $n \in N$ فان $u_n \in [1, e]$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة

جـ- استنتج أن المتتالية متقاربة وأوجد نهايتها

146. بكالوريا تونس 2017 تقني

1- لتكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$

$$g(x) = -x + 1 - 2\ln x$$

أ. اوجد اتجاه التغير للدالة g

ب. أحسب $g(1)$ ثم أوجد اشارة الدالة g على المجال $]0, +\infty[$

2- لتكن f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

أ- أحسب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ ثم ناقش النتيجة بيانيا

ب- أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم ناقش النتيجة بيانيا

3-أ- بين أنه من أجل $x \in]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

ب- أنشئ جدول التغيرات للدالة f

جـ- بين أن لمعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد β على المجال $]0, +\infty[$ بحيث $\beta \in]0.56; 0.57[$

4- يعطى (Γ) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $h(x) = \frac{1}{x}$

A نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) حيث قمنا برسم مماس لـ (C_f) في هذه النقطة

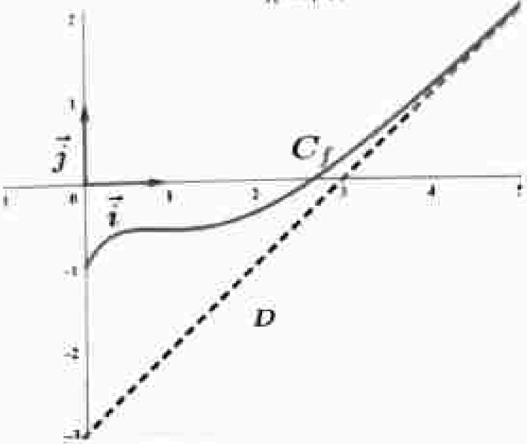
أ. ادرس الوضعية النسبية (C_f) و (Γ)

ب. أرسم المنحنى (C_f) في نفس المعلم

5- لتكن I_λ مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_f) و (Γ) والمستقيمين ذو المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$ بحيث أن λ عدد حقيقي أكبر من 1

أ. بين أن $I_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$

ب. أوجد $\lim_{\lambda \to +\infty} I_\lambda$



147. بكالوريا كاليدونيا 2014

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x - 3$

الجزء الأول

g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = f(x) - (x - 3)$$

1- برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ أن $g(x) > 0$

2- هل توجد نقطة مشتركة بين (C_f) والمستقيم (D)؟ برر.

الجزء الثاني

نعتبر M نقطة تنتمي الى المنحنى (C_f)، و N تنتمي الى المستقيم (D).

حيث M و N لهما نفس الفاصلة x

و MN المسافة بين النقطتين M و N

1- بين أن من اجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$، المسافة MN تساوي $g(x)$

الرياضيات	السلسلة الفضية - أدبيين - الرياضيات من الألف إلى الياء- للأستاذ نور الدين. السلسلة الفضية - تسيير - الرياضيات من الألف إلى الياء - للأستاذ نور الدين.
العلوم الاسلامية	السلسلة الأرجوانية والسلسلة الخضراء - العلوم الإسلامية للأستاذة بوسعادي.
الإنجليزية	السلسلة الفضية- آداب وفلسفة ولغات- الإنجليزية من الألف إلى الياء - الأستاذ عزوز.
الفلسفة	السلسلة الفضية- أدبيين- الفلسفة- الأستاذ حمدود. سلسلة عكاشة للخرائط الذهنية: الفلسفة للأدبيين - الأستاذ رحموني.
التاريخ والجغرافيا	السلسلة الأرجوانية والسلسلة الخضراء - التاريخ والجغرافيا للأستاذ بورنان.
الفرنسية	السلسلة الفضية: الفرنسية من الألف إلى الياء - قريبا-
الأدب العربي	السلسلة الفضية- أدبيين- الأدب العربي من الألف إلى الياء - الأستاذ قوادري.

الرياضيات	السلسلة الفضية: الدوال- السلسلة الفضية: المتتاليات- السلسلة الفضية: الاحتمالات السلسلة الفضية: الأعداد المركبة- السلسلة الفضية: الأعداد والحساب- للأستاذ نور الدين.
الفيزياء	السلسلة الفضية: المتابعة الزمنية من الألف إلى الياء - قريبا-
العلوم	السلسلة الفضية ش. علوم: علوم الطبيعة والحياة -للأستاذ بن خريف والأستاذ بن مداني. السلسلة الفضية ش. رياضيات: علوم الطبيعة والحياة -للأستاذ بن خريف والأستاذ بن مداني.
العلوم الاسلامية	السلسلة الأرجوانية والسلسلة الخضراء: العلوم الاسلامية للأستاذة بوسعادي.
التاريخ والجغرافيا	السلسلة الأرجوانية والسلسلة الخضراء: التاريخ والجغرافيا للأستاذ بورنان.
الإنجليزية	السلسلة الفضية: الإنجليزية من الألف إلى الياء - الأستاذ عزوز.
الفرنسية	السلسلة الفضية: الفرنسية من الألف إلى الياء - قريبا-
هندسة الطرائق	السلسلة الفضية: هندسة الطرائق من الألف إلى الياء - للأستاذة عماري عقيلة.
مشروع عكاشة للطالب المتفوق	الطالبة هبة جبابرية 18.33: كتاب كيف تحصل على العلامة الكاملة في الفلسفة. الطالبة إكرام بوزار 18.62: كتاب المتفوق في علوم الطبيعة والحياة. الطالبة ليديا وطار 18.91: كتاب كيف تحصل على العلامة الكاملة في الأدب العربي. مفاجأة الموسم في الهندسة الكهربائية: الطالب صديقي عبد الصمد 19.20 الأول وطنيا.

- كتاب أذكار الطالب المسلم.
- كتاب القصص التحفيزية لطلاب البكالوريا- تاج الغار - الطبعة الأولى.

ملاحظة: القائمة تتجدد دوريا يرجى زيارة صفحتنا على الفيس وانستغرام:

ترقبوا افتتاح موقعنا لطلبة البكالوريا الذي سيكون رفيقكم الدائم:

YouTube قناة الأستاذ نور الدين أكبر قناة خاصة بالرياضيات في الوطن العربي

22-17

9 789931 856160

FB: okacha bookStore مكتبة عكاشة
Okacha.bookstore@gmail.com
03Rue de Stade Ouled Fayet-Alger- Algérie
Tel: 0540 87 38 02 | 0673 08 62 05 | 0 72 38 82 02
03 شارع الملعب أولاد فايت الجزائر العاصمة

معتمد من طرف
عكاشة ACADEMY

تصميم بواسطة
عكاشة DESIGN

تحت إشراف
عكاشة COMPANY